UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

Eva Bohanesová

FINANČNÍ MATEMATIKA I

Olomouc
2006

Oponenti: Ing. Jaroslava Kubátová, Ph.D.
Mgr. RNDr. Ivo Müller, Ph.D.

Studijní text vznikl jako výstup řešení RP 2006 č. 260 Rozvoj modulární skladby ekonomických disciplín na UP v návaznosti na RP 2005 č. 428 Modulární skladba ekonomických disciplín na UP.

1. vydání

ISBN 80-244-1294-2

Obsah

Úvod

V současné době jsou stále aktuální témata týkající se spoření, poskytování hypotéčních, spotřebitelských či jiných úvěrů nebo investování do cenných papírů. Dokladem toho jsou ekonomické přílohy denního tisku a příslušné internetové stránky, kde je uvedena spousta zajímavých informací a dat, včetně jejich porovnání podle různých hledisek. Věřím, že tyto informace budou většinu dospělých čtenářů určitě zajímat, mnohdy se pro ně stanou životně důležitými, např. při rozhodování, jakým způsobem zaplatit stavbu nového domu. Mezi těmito čtenáři bychom určitě našli i takové, které by navíc zajímalo, jak se zveřejněné číselné údaje vypočítají.

Cílem studijního materiálu je naučit čtenáře výpočtům, které se používají právě v těch oblastech financí, s nimiž se každodenně setkáváme. Jednotlivé kapitoly ve skriptu jsou řazeny za sebou tak, aby v nich čtenář mohl postupovat od základních pojmů a výpočtů (úročení) až po jednotlivé aplikace. Naopak, má-li studující už nějaké předchozí znalosti, může z těchto skript studovat přímo vybrané kapitoly.

Ke studiu tohoto studijního textu je nutné, aby měl čtenář dobře zvládnutou problematiku aritmetických a geometrických posloupností a nekonečných geometrických řad. Je též vhodné, aby uměl pracovat s některým matematickým softwarem, např. s MS Excelem.

Výstupní znalosti jsou uvedeny vždy na začátku každé kapitoly v podobě studijních cílů. V nich je přehledně shrnuto, co se zde můžete naučit.

Obsahem druhé a čtvrté kapitoly je problematika úročení, která je zde podrobně rozebrána a je nezbytná pro další aplikace finanční matematiky, konkrétně pro účtování na běžných a kontokorentních účtech, výpočty cen krátkodobých cenných papírů, dále pro investiční rozhodování, spoření a důchody. Prvními dvěma aplikacemi se zabývá kapitola třetí, další tři témata jsou obsahem kapitoly páté, šesté a sedmé. Důchody úzce souvisí s dluhy. V osmé kapitole jsou proto ukázány metody vytváření splátkových kalendářů při splácení dluhu. Devátá a desátá kapitola jsou věnovány dluhopisům a akciím. Zde máte možnost poznat tyto významné cenné papíry zblízka a naučit se vypočítat jejich tržní ceny, případně hodnoty jejich dalších charakteristik. Poslední, jedenáctá, kapitola se týká měnových kurzů. Pozornost je zaměřena speciálně na výpočty křížových kurzů a termínových kurzů.

V průběhu každé kapitoly jsou nejdříve definovány a vysvětleny pojmy, dále jsou uvedeny předpoklady pro výpočty a pak následuje odvození potřebných vzorců. Z důvodu častého odkazování v textu je většina vzorců označena číslem na pravém okraji. Do jednotlivých odstavců jsou pro rychlejší pochopení výkladu zařazeny řešené příklady. Jejich číslování odpovídá způsobu číslování kapitol, resp. podkapitol, pouze poslední číslo je pořadové v rámci každé kapitoly, resp. podkapitoly.

V závěru každé kapitoly najdete úlohy k procvičení, na nichž si můžete ověřit získané výpočetní dovednosti. Pro kontrolu je u každého zadání úlohy uveden i výsledek.

V závěru skript je zmíněna literatura, kterou může autorka zájemcům o finanční matematiku doporučit.

Skriptum je určeno především studentům 3. ročníku bakalářského studijního programu Matematika a ekonomie se zaměřením na bankovnictví a studentům navazujícího magisterského studia zaměřeného na aplikace matematiky v ekonomii a samozřejmě všem dalším zájemcům o finanční matematiku. Věřím, že prostudováním tohoto textu získáte dovednosti nejen pro další studium, ale také pro život.

Závěrem bych chtěla uvést, že uvítám jakékoli připomínky, poznámky a názory čtenářů na studijní text.

Autorka děkuje za recenzi a cenné připomínky Mgr.& RNDr. I. Müllerovi, PhD. Tato skripta byla vypracována v rámci rozvojového projektu s názvem Modulární skladba ekonomických disciplín na UP.

V Olomouci, leden 2006 Autorka

Eva Bohanesová eva.bohanesova@email.cz

1 Základní pojmy ve finanční matematice

Studijní cíle:
V této kapitole budou definovány pojmy, které budete přímo nebo v menších obměnách používat v jednotlivých aplikacích finanční matematiky.

- **Finanční matematikou** rozumíme soubor obecných matematických metod uplatněných v oblasti financí, jakými jsou např. poskytování krátkodobých a dlouhodobých úvěrů, investování nebo různé obchodní transakce.

- Základním pojmem, na němž stojí snad všechny finanční výpočty, je **úrok**. Z hlediska věřitele lze úrok chápat jako odměnu ve formě náhrady za dočasnou ztrátu kapitálu a za riziko, že tento kapitál nebude splacen v dohodnuté době a výši. Z hlediska dlužníka je úrok cenou za poskytnutý úvěr ve smyslu pronájmu peněz, protože dlužník může vypůjčený kapitál hned použít, ovšem s tím, že jej musí v dohodnuté době vrátit zpět věřiteli a navíc za něj zaplatit.

- Výše úroku bývá nejčastěji uvedena pomocí **úrokové míry** - v procentech za určité období. Např. 5% p.a., kde zkratka *p.a.* pochází z latinského *per annum* a překládá se spojením *za rok*, značí úrok ve výši 5 procent, který bude připsán nebo zaplacen jednou za rok, obvykle buď na jeho začátku nebo na jeho konci. Existují i jiná úroková období, jejichž přehled je uveden níže:

  – pololetní, *per semestre (p.s.)*,
  – čtvrtletní, *per quartale (p.q.)*,
  – měsíční, *per mensem (p.m.)*,
  – denní, *per diem (p.d.)*.

  Úroková míra, která se vztahuje ke konkrétnímu finančnímu produktu (např. hypotéčnímu úvěru), se nazývá **úroková sazba**. Úroková míra realizovaná při investování se nazývá **míra výnosnosti (výnosnost, výnosové procento, míra zisku)** a bývá většinou uváděna na roční bázi.

- **Doba splatnosti (úroková doba)** je doba, po kterou je kapitál uložen či zapůjčen.

- **Úrokové období** je doba, na jejímž začátku nebo konci je připsán úrok z vkladu (je zaplacen úrok z úvěru). Obecně nemusí být stejně dlouhé jako doba splatnosti.

- **Úročení** je způsob výpočtu úroku. **Z hlediska doby splatnosti** dělíme úročení na jednoduché, složené a smíšené. **Jednoduché úročení** se používá v případě, že doba splatnosti nepřekročí jedno úrokové období. **Složené úročení** se zase používá tehdy, úročíme-li přes více úrokových období a **smíšené úročení** slouží pro případ, že dobu splatnosti lze vyjádřit jako součet celočíselného počtu úrokových období a zbytku, který je kratší než jedno úrokové období. **Z hlediska doby výplaty (splacení) úroku** rozdělujeme úročení na **předlhůtní (anticipativní)** a **polhůtní (dekursivní)**. V případě předlhůtního úročení je úrok zaplacen na začátku úrokového období a v případě polhůtního úročení na konci úrokového období.

2 Jednoduché úročení

Studijní cíle:
Cílem této kapitoly bude naučit se vypočítat jednoduchý úrok a diskont z daného základu a pak uplatnit tyto výpočty při provádění uzávěrek běžných a kontokorentních účtů nebo při stanovování cen krátkodobých cenných papírů.

Jednoduché úročení lze rozdělit podle doby zaplacení úroku na předlhůtní a polhůtní. Tuto kapitolu začneme nejdříve problematikou polhůtního úročení, které je svým způsobem více užívané v běžném životě než předlhůtní způsob úročení.

2.1 Jednoduché polhůtní úročení

Předpoklady pro výpočet jednoduchého úroku:

1. úrokové období je jeden rok, na jehož konci je připsán úrok
2. doba splatnosti bývá obvykle kratší než jeden rok, je-li delší, počítáme pak úrok ze stále stejného počátečního kapitálu (nepočítáme tedy úroky z úroků)

Výpočet jednoduchého úroku

$$u = P \cdot i \cdot t, \tag{1}$$

kde P je základní kapitál pro výpočet úroku (výše půjčky), i je úroková míra vyjádřená desetinným číslem a t je čas v letech, po které je základní kapitál uložen (půjčen). Ze vzorce (1) je zřejmé, že závislost výše úroku na čase je lineární.

Vzorec (1) lze také přepsat do tvaru

$$u = P \frac{p}{100} \frac{k}{360}, \tag{2}$$

kde p je úroková míra jako počet procent za rok, k je počet dní.

Pro vyjádření doby splatnosti ve dnech se v evropských zemích používají tzv. **standardy**:

- $ACT/365$ (anglický standard) znamená, že každý měsíc má skutečný počet dní (ACT) a rok má 365 dní v roce,

- $ACT/360$ (francouzský standard) znamená, že každý měsíc má skutečný počet dní (ACT) a rok má 360 dní v roce,
- $30E/360$ (německý standard) znamená, že každý měsíc má 30 dní a rok má 360 dní v roce.

Při použití posledního standardu $30E/360$ lze pro určení délky doby splatnosti ve dnech použít následující vzorec:
je-li $D_1M_1R_1$ datum uzavření obchodu (uložení peněz do banky, poskytnutí půjčky) a $D_2M_2R_2$ datum ukončení obchodu, platí pro dobu splatnosti (ve dnech) vztah

$$k = 360(R_2 - R_1) + 30(M_2 - M_1) + (D_2 - D_1). \tag{3}$$

Je-li $D_1 = 31$ nebo $D_2 = 31$, je nutné ve výpočtech uvažovat $D_1 = 30$ nebo $D_2 = 30$.

Příklad 2.1.1
Klient uložil do banky vklad ve výši 95 000 Kč dne 15.8.2004 a vybral jej i s úroky dne 31.12.2004. Jak velký byl úrok při úrokové míře 3% p.a.?

Řešení:
Použijeme vztah (2) a standard $30E/360$. Potom

$$u = 95000 \frac{3}{100} \frac{135}{360} = 1068,80 \text{ (Kč)}.$$

Při standardu $ACT/360$ bude úrok činit

$$u = 95000 \frac{3}{100} \frac{138}{360} = 1092,50 \text{ (Kč)}.$$

Při standardu $ACT/365$ bude úrok činit

$$u = 95000 \frac{3}{100} \frac{138}{365} = 1077,50 \text{ (Kč)}.$$

Úrok bude činit postupně 1 068,80 Kč, 1 092,50 Kč a 1 077,50 Kč. Z hlediska věřitele je výhodné použít německý standard $30E/360$, protože tak vyplácí nejnižší úrok. Z hlediska dlužníka je nejvýhodnější francouzský standard určení doby splatnosti, neboť tak získáme nejvyšší úrok.

Tabulka 1: Vklady

Částka (Kč)	Den uložení
12 000	17.1.
18 000	30.4.
15 000	13.9.
10 000	2.12.

Vyjádření úroku pomocí úrokového čísla (UC) a úrokového dělitele (UD)

Přepisem vztahu (2) lze získat jiný způsob výpočtu úroku:

$$u = P\frac{p}{100}\frac{k}{360} = \frac{\frac{Pk}{100}}{\frac{360}{p}} = \frac{UC}{UD}, \tag{4}$$

kde UC je **úrokové číslo** a UD **úrokový dělitel**. Z posledního vztahu je zřejmé, že

$$UC = \frac{Pk}{100}, \quad UD = \frac{360}{p}. \tag{5}$$

Tohoto způsobu výpočtu úroku lze využít i v případě, že počítáme celkový úrok z většího počtu uložených nebo vypůjčených částek. Při takových výpočtech použijeme vztah

$$u = \frac{\sum_{j=1}^{n} UC_j}{UD}. \tag{6}$$

V praxi se výpočtu úroku podle (6) používá při účtování na běžných a kontokorentních účtech nebo se takto počítá celkově vyplacená částka z většího počtu směnek.

Příklad 2.1
Vypočtěte celkový úrok k 31.12. z vkladů uvedených v tabulce 1. Úroková míra činí 4% p.a. Doby splatnosti počítejte podle standardu $ACT/360$.

Řešení:
Úroky pro jednotlivé úložky budeme počítat pomocí úrokových čísel a úrokového dělitele, použijeme tedy vztah (6). V tabulce 2 je naznačen výpočet.

Úrokový dělitel činí

Tabulka 2: Výpočet úrokových čísel

Částka (Kč)	Počet dní	UC
12 000	348	41 760
18 000	245	44 100
15 000	109	16 350
10 000	29	2 900
Σ	-	105 110

$$UD = \frac{360}{4} = 90,$$

takže celkový úrok je podle (6) roven

$$u = \frac{105110}{90} = 1167,90 \text{ (Kč)}.$$

Na konci roku bude na účet připsán úrok ve výši 1 167,90 Kč.

Základní rovnice jednoduchého polhůtního úročení

$$S = P + u = P(1 + it) = P(1 + \frac{p}{100}\frac{k}{360}) \tag{7}$$

- S je splatná částka
- P je základní kapitál (vklad, půjčka)

Základní rovnice slouží k výpočtu splatné částky, takové, která je vyplacena (splacena) v poslední den doby splatnosti v případě bankovního vkladu (v případě půjčky).

Současná a budoucí hodnota kapitálu

Hodnota peněz nezůstává v čase stejná, mění se, např. vzhledem k inflaci. Při výpočtech, kde potřebujeme porovnávat finanční částky v různých časech, je pravidlem vztahovat všechny tyto částky k jedinému časovému okamžiku. Je-li tímto časovým okamžikem *teď*, nazývají se hodnoty přepočtených částek **současnými hodnotami**. Jestliže jsou částky přepočítány do nějakého budoucího časového bodu, nazývají se pak jejich hodnoty **budoucími hodnotami**. V případě jednoduchého úročení je tedy splatná částka S budoucí hodnotou počátečního kapitálu P a, naopak, kapitál P je současnou hodnotou splatné částky S. Pro současnou hodnotu částky S dostaneme výpočtem ze vzorce (7) vztah

$$P = \frac{S}{1 + it}.$$

Příklad 2.1.2
Zájemce může koupit parcelu teď za 615 000 Kč nebo za půl roku v ceně 620 000 Kč. Která z variant je pro něj výhodnější, může-li částku 615 000 Kč investovat při roční úrokové míře 3% p.a.?

Řešení:
Máme dvě možnosti výpočtu. Můžeme porovnávat současné nebo budoucí hodnoty obou částek. Současná hodnota částky 620 000 Kč činí

$$\frac{620000}{1 + 0,03 \cdot 0,5} = 610837,40 \text{ (Kč)},$$

což je méně než 615 000 Kč. Výhodnější je tedy druhá varianta.
Budoucí hodnota částky 615 000 Kč činí

$$615000(1 + 0,015) = 624225 \text{ (Kč)}.$$

Získaná částka je vyšší než 620 000 Kč, opět je tedy výhodnější parcelu koupit za půl roku v ceně 620 000 Kč.

Ze vzorce (7) lze odvodit vztahy pro

výpočet úrokové míry:

$$i = \frac{S - P}{Pt} = \frac{u}{Pt},$$

výpočet délky doby splatnosti:

$$t = \frac{S - P}{Pi} = \frac{u}{Pi}$$

2.2 Jednoduchý diskont

Představme si, že je nám nabídnuta krátkodobá půjčka splatná za jeden rok, avšak s podmínkou, že úrok z ní má být splacen hned při jejím poskytnutí, tj. na začátku doby splatnosti a celá půjčka pak bude splacena na konci doby splatnosti. Tento způsob úročení se nazývá **předlhůtní**. Název je odvozen z toho, že úrok je vypočten a zaplacen hned na začátku úrokového období. Příslušný úrok se nazývá **diskont** (značí se D) a vypočítá se ze splatné částky S, která v tomto případě představuje půjčený kapitál:

$$D = S \cdot d \cdot t,$$

kde d je **diskontní míra** nahrazující polhůtní úrokovou míru. Částka, která je skutečně poskytnuta, se značí P a je rovna částce S snížené o diskont:

$$P = S(1 - dt) = S(1 - \frac{p_D}{100}\frac{t_z}{360}), \tag{8}$$

kde p_D je diskontní míra v procentech a t_z značí zbytkovou dobu splatnosti ve dnech, která začíná dnem poskytnutí půjčky a končí dnem splacení celé půjčky S. Symbolem t je označena zbytková doba splatnosti v letech.

Příklad 2.2.1
Jak velká částka bude vyplacena dlužníkovi, který si vypůjčil 12 000 Kč při diskontní míře 6% p.a. na dobu jednoho roku?

Řešení:
Odpověď nalezneme pomocí vztahu (8)

$$P = 12000(1 - 0,06) = 11280 \text{ (Kč)}.$$

Dlužníkovi bude vyplaceno 11 280 Kč.

Vztah mezi polhůtní úrokovou mírou i a diskontní mírou d

získáme porovnáním částek S ze vzorců (7) a (8). Obdržíme vztahy

$$i = \frac{d}{1 - dt}, \qquad d = \frac{i}{1 + it}, \tag{9}$$

které nacházejí využití při porovnání výhodnosti krátkodobých půjček, aniž bychom museli počítat splatné částky.

Příklad 2.2.2
Potřebujeme získat úvěr na jeden rok. Máme tyto dvě možnosti:

1. úrok z úvěru splatit hned při poskytnutí při diskontní míře 4,6% p.a.,
2. splatit úvěr i s úroky na konci roku při (polhůtní) úrokové míře 5% p.a.

Která z možností je výhodnější pro dlužníka a která pro věřitele?

Řešení:
Dané diskontní míře ve výši 4,6% p.a. odpovídá podle prvního ze vztahů (9) polhůtní úroková míra

$$i = \frac{0,046}{1 - 0,046} = 0,0482.$$

Vypočtená úroková míra je nižší než daných 5% p.a. Pro dlužníka je tedy lepší první z variant, neboť zaplatí na úrocích méně, zatímco pro věřitele je výhodnější varianta druhá.
Úlohu lze řešit ještě druhým způsobem. Polhůtní úrokové míře 5% p.a. odpovídá podle druhého ze vztahů (9) diskontní míra ve výši

$$d = \frac{0,05}{1 + 0,05} = 0,0476.$$

Získaná diskontní míra má vyšší hodnotu než daných 4,6% p.a. To znamená, že dlužník dostane vyplacenou částku sníženou o nižší diskont než v případě, že diskontní míra činí 4,6% p.a. Dlužník tedy zaplatí nižší úrok a první varianta je pro něj výhodnější. Pro věřitele zůstává výhodnější druhá varianta.

Příklad 2.2.3
Uvažujme stejné zadání jako v předchozím příkladu. Jak by se musely obě míry změnit, aby obě půjčky byly stejně efektivní?

Řešení:
Vyjdeme nejdříve z diskontní míry, která činí 4,6% p.a. Aby půjčka s polhůtní úrokovou mírou byla srovnatelná s půjčkou založenou na diskontu, musí pro úrokovou míru i podle (9) platit

$$i = \frac{0,046}{1 - 0,046} = 0,0482.$$

Úroková míra i klesne z 5% p.a. na 4,82% p.a. Diskontní míře 4,6% p.a. tedy odpovídá polhůtní úroková míra 4,82% p.a.

Naopak, nechť polhůtní úroková míra i je pevná a má hodnotu 5% p.a. Příslušnou diskontní míru pak vypočteme opět podle (9)

$$d = \frac{0,05}{1,05} = 0,0476.$$

Diskontní míra vzroste z 4,6% p.a. na 4,76% p.a., tedy polhůtní úrokové míře 5% p.a. bude odpovídat diskontní míra 4,76% p.a.

Úlohy k procvičení:

1. Jak dlouho byl uložen vklad 1000 Kč na účtu, jestliže vzrostl na 1 015 Kč při úrokové míře 1,5% p.a.?
   (360dní)

2. Vypočtěte úrokovou míru, která za 4 měsíce a 5 dní zúročí vklad 10 000 Kč na 10 100 Kč. Použijte standard $30E/360$.
   (2,88% p.a.)

3. Určete výši úroku a budoucí hodnotu vkladu 5 000 Kč za půl roku a za dva roky při roční úrokové míře 3% p.a. Použijte standard $30E/360$.
   (úroky: 75; 300; budoucí hodnota: 5 075; 5 300)

4. Jak velký je úrok z úvěru ve výši 200 000 Kč jednorázově splatného za 240 dní včetně úroku při úrokové míře 9 % p.a.?
   (12 000 Kč)

5. Jakou částku se splatností 4 měsíce si můžeme půjčit, jestliže budeme mít po této době na splacení úvěru a úroku 100 000 Kč? Úroková míra je 11% p.a.
   (96 463 Kč)

6. Jakou hodnotu bude mít 100 Kč za 9 měsíců při roční úrokové míře 2% p.a.?
   (101,50 Kč)

7. Klient banky si v průběhu roku vypůjčil tyto částky:

20 000 Kč	15.3.
50 000 Kč	20.6.
15 000 Kč	23.11.

   Vypočtěte, jak velký úrok na konci roku zaplatí. Úroková míra činí 9% p.a. Použijte standard $ACT/360$.
   (4 022,50 Kč)

8. Rozhodněte, která z půjček je výhodnější pro dlužníka a která pro věřitele:

   Varianta 1: na začátku roku si můžeme půjčit 50 000 Kč na dobu 10 měsíců při úrokové míře 8% p.a.; úroky jsou splatné až na konci této doby.

   Varianta 2: na začátku roku si můžeme půjčit 50 000 Kč na stejnou dobu, ovšem s tím, že úroky jsou splatné hned při poskytnutí půjčky při diskontní míře 7,6% p.a.

   Jak by se musely obě míry změnit, aby obě půjčky byly stejně efektivní? Pro výpočty uvažujte standard $30E/360$.
   (Pro dlužníka první varianta, pro věřitele druhá varianta; i=8,225% p.a., d=7,407% p.a.)

9. Graficky znázorněte průběh splatné částky S v závislosti na době splatnosti t (uvažujte $t \leq 1$ rok) pro úrokové míry 5%p.a., 10%p.a., 20%p.a. Dále je $P = 100$ Kč.

10. Graficky znázorněte průběh vyplacené částky P v závislosti v závislosti na zbytkové době splatnosti t_z (uvažujte $t_z \leq 365$ dní) pro diskontní míry 5%p.a., 10%p.a., 20%p.a. Dále je $S = 100$ Kč.

3 Aplikace jednoduchého úročení

Studijní cíle:
Pomocí této kapitoly se naučíte provádět uzávěrky na běžných a kontokorentních účtech a dále budete umět počítat ceny vybraných krátkodobých cenných papírů.

V praxi se používají oba způsoby jednoduchého úročení. Krátkodobé cenné papíry, jejichž doba splatnosti je kratší než jeden rok, bývají obchodovány na principu jednoduchého diskontu, zatímco při tvorbě uzávěrek běžných či kontokorentních účtů se používá polhůtního způsobu úročení.

3.1 Aplikace jednoduchého polhůtního úročení

V této podkapitole bude ukázáno na příkladech, jak se provádí uzávěrka běžného a kontokorentního účtu na konci roku. Předpokládáme, že úroky jsou na účet připsány vždy na konci roku. Na konkrétních příkladech bude ukázáno, jak lze úroky počítat pomocí úrokových čísel a úrokového dělitele.

3.1.1 Běžný účet

Existují tři způsoby, jak provádět uzávěrku na běžném účtu:

1. **Zůstatkový způsob (anglický)**
   Zůstatky na účtu jsou úročeny vždycky za dobu, po kterou skutečně byly na účtu uloženy. Pro úrok u, který bude na konci roku připsán na účet, platí při úrokové míře i

   $$u = \frac{\sum_{j=1}^{n} UC_j}{UD},$$

   kde $UC_j, j = 1, \dots, n$ jsou úroková čísla za j-tou dobu, po kterou byl zůstatek na účtu uložen.

   Příklad 3.1.1.1
   Proveďte uzávěrku běžného účtu, na kterém byly zaznamenány následující pohyby (viz tabulku 3). Úroková míra činí 1,5% p.a., použijte standard $ACT/360$. Pro jednoduchost upouštíme od danění připsaného úroku.

   Řešení:

   Úroková čísla UC a úrokový dělitel UD byly vypočteny podle (5), např.

Tabulka 3: Pohyby na běžném účtu

Datum	Příjmy (Kč)	Výdaje (Kč)	Zůstatek (Kč)
12.1.	16 000	-	16 000
25.5.	-	7 000	9 000
4.10.	15 000	-	24 000
31.12.	-	-	24 000

Tabulka 4: Účtování zůstatkovým způsobem

Zůstatek (Kč)	Počet dní	UC
16 000	133	21 280
9 000	132	11 880
24 000	88	21 120
Σ	-	54 280

$$UC = \frac{16000 \cdot 133}{100} = 21280,$$
$$UD = \frac{360}{1,5} = 240.$$

Úrok, který bude na účet koncem roku připsán, bude roven hodnotě

$$u = \frac{54280}{240} = 226,20 \text{ (Kč)}.$$

Sečtením posledního zůstatku 24 000 Kč a připsaného úroku dostaneme konečný zůstatek. Jeho hodnota tedy je 24 226,20 Kč.

2. **Postupný způsob (německý)**
Úroky z jednotlivých položek jsou počítány za dobu od data, kdy se na účtu objevily (toto datum nepočítáme), až do konce roku. U položek ze sloupce *Dal* budou mít příslušná úroková čísla kladné znaménko, u položek ze sloupce *Má dáti* záporné znaménko. Výše úroku připsaného na účet na konci roku činí

$$u = \frac{\sum UC_{Dal} - \sum UC_{Má\ dáti}}{UD}. \tag{10}$$

Tabulka 5: Účtování postupným způsobem

Datum	Má dáti	Dal	Dny	UC
12.1.	-	16 000	353	56 480
25.5.	7 000	-	220	15 400
4.10.	-	15 000	88	13 200
Zůst.k 31.12.	-	24 000	-	-

Příklad 3.1.1.2
Proveďte uzávěrku běžného účtu z předchozího příkladu postupným způsobem. Úroková míra a standard zůstávají stejné.

Řešení:

Úrok vypočteme podle vzorce (10):

$$u = \frac{56480 - 15400 + 13200}{240} = 226,20 \text{ (Kč)}.$$

Konečný zůstatek na účtu je 24 226,20 Kč.

3. **Zpětný způsob (francouzský)**
Postup výpočtu úroku je opačný než u německého způsobu. Úroky jsou počítány od zvoleného **data epochy** (např. 1.1.) až do data změny na účtu včetně. Znaménka úrokových čísel pro položky *Dal* jsou záporná a pro položky *Má dáti* kladná. Úrokové číslo náležející zůstatku ze dne 31.12. má však kladné znaménko. Celkový připsaný úrok bude

$$u = \frac{\sum UC_{Má\ dáti} - \sum UC_{Dal} + UC_{31.12.}}{UD}. \qquad (11)$$

Příklad 3.1.3
Proveďte uzávěrku běžného účtu z předchozího příkladu zpětným způsobem. Úroková míra je 1,5%p.a..

Řešení:
Zvolme 1. leden jako datum epochy. Pak pohyby na účtu a jim odpovídající počty dnů a úroková čísla jsou následující (viz tabulku 6):

Úrok vypočteme podle vzorce (11):

$$u = \frac{10150 - 1920 - 41550 + 87600}{240} = 226,20 \text{ (Kč)}.$$

Konečný zůstatek na účtu je 24 226,20 Kč.

Tabulka 6: Účtování zpětným způsobem

Datum	Má dáti	Dal	Dny	UC
12.1.	-	16 000	12	1920
25.5.	7 000	-	145	10 150
4.10.	-	15 000	277	41 550
31.12.	-	24 000	365	87 600

3.1.2 Kontokorentní účet

Tento typ účtu nabízí klientovi banky možnost přechodně přejít z kladných zůstatků do záporných (do debetu) s tím, že je předem dohodnuta maximální výše debetu. Klient takto získává krátkodobou půjčku, která bývá v praxi označována jako kontokorentní úvěr. V souvislosti s poskytováním těchto úvěrů je potřeba se dále seznámit s následujícími pojmy:

- **úvěrový rámec (UR)** - maximální povolený debet na účtu,
- kreditní úrok - úrok z kladných zůstatků připsaný ve prospěch majitele účtu,
- debetní úrok - úrok ze záporných zůstatků, které nejsou větší než sjednaný úvěrový rámec,
- **pohotovostní provize** - náklady vzniklé v důsledku sjednaného, avšak nečerpaného úvěru; patří sem pohotovostní provize z nečerpaného úvěrového rámce (NU),
- **provize za překročení úvěrového rámce (PR)** - sankční úrok při porušení sjednané výše úvěrového rámce.

Uzávěrku kontokorentního účtu provádíme tak, že postupně vypočteme výši kreditních úroků, debetních úroků a provizí - pomocí úrokových čísel a příslušných úrokových dělitelů. K tomu je daná kreditní úroková míra i_c, debetní úroková míra i_d a dále sazby pro pohotovostní provizi z nečerpaného úvěru p_{NU} a pro sankční úrok v případě překročení úvěrového rámce p_{PR}. Kreditní a debetní úroky, pohotovostní provize z nečerpaného úvěrového rámce a provize za překročení úvěrového rámce pro příslušný stav účtu se vypočítají zůstatkovým způsobem (viz předchozí podkapitola).

Konečný zůstatek k poslednímu dni v roce získáme přičtením kreditních úroků k poslednímu zůstatku a odečtením úrokových nákladů (debetní úroky, provize), případně dalších poplatků.

Tabulka 7: Pohyby na kontokorentním účtu

Datum	Příjmy	Výdaje	Zůstatek
2.2.	10 000	-	10 000
24.4.	-	25 000	-15 000
30.6.	5 000	-	-10 000
17.9.	-	50 000	-60 000
21.10.	10 000	-	-20 000
6.12.	30 000	-	10 000
31.12.	-	-	10 000

Tabulka 8: Výpočet úrokových čísel na kontokorentním účtu

Dní	Kred.zůst.	UC	Deb.zůst.	UC	NR	UC	PR	UC
81	10 000	8 100	-	-	50 000	40 500	-	-
67	-	-	15 000	10 500	35 000	23 450	-	-
79	-	-	10 000	7 900	40 000	31 600	-	-
34	-	-	60 000	20 400	-	-	10 000	3 400
46	-	-	20 000	9 200	30 000	13 800	-	-
25	10 000	2500	-	-	50 000	12 500	-	-
Σ	-	10 600	-	48 000	-	121 850	-	3 400
UD	-	180	-	30	-	720	-	72
Úroky	-	58,90	-	1 600	-	169,20	-	47,20

Příklad 3.1.2.1
V tabulce 7 jsou zachyceny pohyby na kontokorentním účtu, na němž je sjednán úvěrový rámec ve výši 50 000 Kč. Je povoleno jeho krátkodobé překročení, přičemž banka účtuje přirážku 5% k debetním úrokům a dále pohotovostní provizi z nevyužitého rámce ve výši 0,5% p.a. Úroková míra z kladných zůstatků je 2% p.a. a z debetních zůstatků 12% p.a. Proveďte uzávěrku tohoto účtu. Pro výpočet použijte standard $ACT/360$.

Řešení:
Řešení úlohy je naznačeno v tabulce 8.

Konečný zůstatek k 31.12. pak získáme vyúčtováním:
k zůstatku z posledního dne v roce přičteme úrokové výnosy (kreditní úroky) a odečteme od něj náklady, které zde představují debetní úroky, pohotovostní provize z nevyužitého rámce a sankce za jeho překročení. Konečný zůstatek tedy bude činit 8 242,50 Kč.

Tabulka 9: Historie běžného účtu

Datum	Příjmy	Výdaje
12.1.	7 000	-
3.3.	-	2 000
18.6.	5 000	-
22.9.	-	6 000
8.11.	8 000	-
15.12.	30 000	-

Tabulka 10: Pohyby na kontokorentním účtu

Den	Příjmy	Výdaje
30.3.	-	30 000
14.4.	-	10 000
30.6.	5000	-
17.9.	-	20 000
21.10.	40000	-
6.12.	20 000	-

Úlohy k procvičení:

1. Ověřte způsob účtování úroků na vlastním běžném účtu. (Uvědomte si, kolikrát v roce jsou úroky připisovány; jsou-li připisovány např. čtyřikrát za rok, stačí provést uzávěrku na konci zvoleného čtvrtletí.)

2. Proveďte uzávěrku běžného účtu, jehož historie je uvedena v tabulce 9,

   pomocí zůstatkového, postupného i zpětného způsobu s použitím standardu $ACT/360$. Úroková míra je 2% p.a. (42 174,90 Kč)

3. Na kontokorentním účtu byl sjednán úvěrový rámec 50 000 Kč.

   Jeho stavy uvádí tabulka 10. Proveďte roční uzávěrku, jestliže kreditní úroková míra je 2%p.a., debetní úroková míra 12%p.a., provize za překročení úvěrového rámce 5% a pohotovostní provize z nevyužitého rámce 0,5%. Pro výpočty použijte standard $ACT/360$.
   (1 960,62 Kč)

3.2 Aplikace jednoduchého diskontování

Jednoduché diskontování nachází uplatnění při obchodování s **krátkodobými cennými papíry**. Typickým příkladem těchto cenných papírů jsou pokladniční poukázky a směnky, někdy k nim řadíme i depozitní certifikáty. Krátkodobé cenné papíry jsou obchodovány na peněžním trhu.

3.2.1 Pokladniční poukázky, depozitní certifikáty

Pokladniční poukázky jsou krátkodobé cenné papíry s dobou splatnosti od 14 dní až po několik měsíců, které emitují státní orgány v případě deficitu ve státním rozpočtu. Díky krátké době splatnosti jsou pokladniční poukázky velmi likvidní, tj. snadno přeměnitelné v hotovost, ale, vzhledem ke státní garanci z nich plyne jen nižší úrokový výnos. V USA jsou pokladniční poukázky známy pod názvem T-bills.

Depozitní certifikát je cenný papír, často obchodovaný na diskontním principu, kterým je potvrzen vklad při jisté úrokové míře na jistou dobu, zpravidla nepřekračující jeden rok. Depozitní certifikáty vystavují banky. Jejich prodejem (za cenu rovnou nominální hodnotě snížené o diskont) tak získávají kapitál, který lze považovat za úvěr, splatný ve výši nominální hodnoty certifikátu v době splatnosti. Depozitní certifikáty je možné slosovat a jejich majitel tak může získat prémii navíc.

U depozitních certifikátů jsme narazili na pojem **nominální hodnota**. Nominální hodnotou cenného papíru rozumíme částku, která je na něm přímo uvedena a která je v určitých případech (depozitní certifikáty, dluhopisy, pokladniční poukázky, směnky) splatná právě v den splatnosti cenného papíru.

Výpočet ceny P obou uvedených cenných papírů před dobou splatnosti

$$P = S(1 - dt), \tag{12}$$

kde S je nominální hodnota cenného papíru, d roční diskontní míra a t je zbytková doba splatnosti.

Příklad 3.2.1.1
Určete cenu, za kterou lze koupit pokladniční poukázky s nominální hodnotou 10 000 Kč, dobou splatnosti 90 dní při diskontní míře 5,5% p.a.

Řešení:

$$P = 10000(1 - 0,055\frac{90}{360}) = 9862,50 \text{ (Kč)}.$$

Pokladniční poukázky lze koupit za 9 862,50 Kč.

3.2.2 Směnky

Směnka je krátkodobý cenný papír, na němž musí být uvedeny následující údaje:

1. slovo *směnka* v textu listiny,
2. bezpodmínečný příkaz k zaplacení dohodnuté částky (na směnce je přímo napsáno *zaplatím* nebo *zaplaťte*),
3. sjednaná částka (nominální hodnota) vyjádřená slovy i číslem,
4. jméno směnečného dlužníka (směnečníka, trasáta) a jeho podpis,
5. jméno směnečného věřitele (trasanta) neboli toho, komu nebo na jehož řad má být zaplaceno a jeho podpis,
6. datum splatnosti směnky,
7. místo splatnosti směnky (banka, adresa),
8. datum a místo vystavení směnky,
9. podpis výstavce směnky,

Směnky můžeme klasifikovat např. pomocí těchto hledisek:

1. Podle **počtu osob zúčastněných ve směnečném vztahu** rozlišujeme nejčastěji tři směnky:

   - **vlatní směnka (sólosměnka)** - směnečným dlužníkem je přímo výstavce směnky a zavazuje se zaplatit směnečnému věřiteli dohodnutou částku. Na směnce je tedy uvedeno slovo *zaplatím* a podpis dlužníka. Vlastní směnku je možné použít např. v případě dovozu určitého zboží: odběratel zboží se takto zavazuje zaplatit dodavateli zboží za jeho dovoz,

- **cizí směnka (trata)** - výstavce směnky dává příkaz směnečnému dlužníkovi, který mu dluží z jiného obchodu, aby zaplatil majiteli směnky. Na směnce je tedy uvedeno *zaplaťte*. Cizí směnku lze nejčastěji použít např. v obchodní situaci, kdy odběratel určitého zboží pověří banku, v níž má svůj účet, aby zaplatila dodavateli za dovoz zboží. Výstavcem směnky je tedy odběratel, směnečným věřitelem je dodavatel a směnečným dlužníkem banka,
- **cizí směnka na vlastní řad** - je speciální případ cizí směnky, kde výstavce a směnečný věřitel je tatáž osoba přikazující směnečnému dlužníkovi zaplatit dohodnutou částku způsobem *zaplaťte na náš vlastní řad*. Směnku lze převádět ze současného majitele (*indosanta*) na nového (*indosatáře*) tzv. **rubopisem** (*indosací, žirováním*).

2. Podle **důvodu vystavení** se směnky dělí na **obchodní** (vystavené v rámci obchodní transakce) a **finanční** (vystavené při poskytnutí krátkodobé půjčky).

3. Podle **splatnosti** lze rozlišit směnky

   - **na viděnou** (splatné při předložení),
   - **lhůtní** (splatné určitý čas po viděné),
   - **denní, fixní** (vystavené na určitý den),
   - **datasměnky** (splatné určitý čas po vystavení).

Eskont směnky
Eskont obecně znamená odkup dosud nesplacené pohledávky s určitým datem splatnosti po srážce úroků naběhlých za dobu ode dne eskontu do dne splatnosti. Nejčastější je přitom **eskont směnek** obchodní bankou, o který může majitel směnky požádat. Je-li žádost přijata, získává majitel směnky finanční prostředky za nesplacenou pohledávku ještě před dobou splatnosti. Banka, která směnku odkoupí (eskontuje), takto poskytuje majiteli půjčku známou jako **eskontní úvěr**. Jeho zvláštností je, že poskytnutou půjčku nesplácí majitel směnky, který je současně žadatelem o úvěr, ale třetí osoba - směnečný dlužník, nebo v případě cizí směnky na řad další osoby uvedené na seznamu majitelů v pořadí od konce seznamu. Jestliže ani směnečný dlužník ani žádný z majitelů nemohou dluh vyrovnat, zbývá tato povinnost na toho, od něhož banka směnku eskontovala. Banka nejčastěji přijímá k eskontu cizí směnky nebo cizí směnky na vlastní řad. Při eskontu směnky neproplácí jejímu majiteli celou směnečnou částku, nýbrž částku sníženou o diskont odpovídající době mezi dnem eskontu a dnem splatnosti. Navíc banka obvykle účtuje **eskontní provizi** udávanou v procentech ze směnečné částky.

Reeskont směnky je opětovný eskont směnky národní bankou. K reeskontu dochází takto: obchodní banka eskontuje směnku a proplatí jejímu majiteli částku sníženou o diskont a provizi. Poté tato banka nabídne k eskontu tutéž směnku národní bance, která jí opět směnku proplatí. Vzniklý dluh pak národní banka vymáhá na směněčném dlužníkovi.

Výpočet ceny směnky

Cena směnky S_D před dobou splatnosti se opět vypočte podle vzorce (12), kde S je směnečná částka (ozn. S), která je vždy uvedena přímo na směnce. Pro směnku tedy platí

$$S_D = S(1 - dt) = S(1 - \frac{p_D}{100}\frac{t_z}{360}),$$

kde t je zbytková doba splatnosti v letech a t_z ve dnech.

Příklad 3.2.2.1
Směnka znějící na částku 100 000 Kč a s datem splatnosti 19.10.2005 byla eskontována v bance dne 5.7.2005. Jakou částku vyplatí banka držiteli směnky, je-li diskontní míra 5% p.a. a jestliže banka účtuje eskontní provizi 0,05% ze směnečné částky? Při výpočtu použijte standard $30E/360$.

Řešení:
Banka vyplatí držiteli směnky částku sníženou o diskont za dobu od 5.7. do 19.10., tj.

$$S_D = 100000(1 - 0,05\frac{104}{360}) = 98555,60 \text{ (Kč)},$$

a dále sníženou o eskontní provizi, která v našem případě činí 50 Kč. Celkem tedy bude bankou vyplaceno 98 505,60 Kč.

Případ více směnek

Eskontuje-li banka více směnek s různými směnečnými částkami a různými splatnostmi najednou při stejné diskontní míře, má dvě možnosti, jak při jejich proplacení postupovat. V prvním případě může směnky proplatit hned v den eskontu tak, že u každé směnky srazí příslušný diskont, v druhém případě počká s vyplacením až na tzv. **střední den splatnosti**, kdy držiteli směnek vyplatí částku rovnou součtu nominálních hodnot.

Výpočet vyplacené částky za více směnek v den eskontu

V tomto případě bude u každé směnky stržen příslušný diskont z její směnečné částky za dobu mezi dnem eskontu a dnem splatnosti. Při výpočtu diskontu použijeme úroková čísla a úrokového dělitele. Pro j-tou směnku, $j = 1, \ldots, n$ bude výše diskontu rovna

Tabulka 11: Výpočet úrokových čísel pro směnky

Směnka	S_i(Kč)	Den splatnosti	Počet dní	UC
A	105 000	15.12.2005	22	23 100
B	150 000	2.12.2005	9	13 500
C	85 000	11.12.2005	19	16 150
Σ	340 000	-	-	52 750

$$D_j = S_j \cdot d \cdot t_j = \frac{S_j \cdot t_{zj}}{100} \cdot \frac{1}{\frac{360}{p_D}} = \frac{UC_j}{UD},$$

pro celkový diskont pak

$$D = \frac{\sum_{j=1}^{n} UC_j}{UD} = \frac{p_D \sum_{j=1}^{n} S_j \cdot t_{zj}}{36000}.$$

Vyplacenou částku za všechny směnky dohromady pak vypočteme pomocí vzorce

$$\begin{aligned} S_D = \sum_{j=1}^{n} S_{Dj} = \sum_{j=1}^{n} S_j - \frac{\sum_{j=1}^{n} UC_j}{UD} = \\ = \sum_{j=1}^{n} S_j - \frac{p_D \sum_{j=1}^{n} S_j \cdot t_{zj}}{36000}. \end{aligned} \tag{13}$$

Příklad 3.2.2.2
Firma eskontovala v bance k 23.11.2005 směnku A znějící na částku 105 000 Kč splatnou k 15.12.2005, směnku B na částku 150 000 Kč splatnou k 2.12.2005 a směnku C na částku 85 000 Kč splatnou ke 12.12.2005. Jakou částku banka vyplatila firmě při diskontní míře 6% p.a.?

Řešení:
Při výpočtu využijeme úroková čísla a úrokového dělitele. Postup výpočtu je naznačen v tabulce 11.

Úrokový dělitel je 360/6 = 60. Vyplacenou částku vypočteme podle vztahu (13)

$$S_D = 340000 - \frac{52750}{60} = 339120,80 \text{ (Kč)}.$$

Banka firmě vyplatila částku 339 120,80 Kč.

Tabulka 12: Směnky a jejich charakteristiky

Směnka	S(Kč)	Den splatnosti
A	100 000	15.11.
B	150 000	2.12.
C	80 000	8.12.

Výpočet střední doby splatnosti t_S a středního dne splatnosti T_S směnek

V tomto případě banka směnky proplatí ve **střední den splatnosti**, což je den, k němuž je současná hodnota všech eskontovaných směnek rovna součtu jejich směnečných částek. Potom se však k tomuto dni musí vyrovnat součet úroků ze směnek splatných před středním dnem splatnosti se součtem diskontů ze směnek, jejichž den splatnosti nastane až po středním dnu splatnosti. Matematicky je tato skutečnost formulována takto:

$$\frac{p_D \sum_{j=1}^{m} S_j \cdot (t_S - t_{zj})}{36000} = \frac{p_D \sum_{k=1}^{n} S_k \cdot (t_{zk} - t_S)}{36000},$$

$$t_S = \frac{\sum_{j=1}^{m} S_j t_{zj} + \sum_{k=1}^{n} S_k t_{zk}}{\sum_{j=1}^{m} S_j + \sum_{k=1}^{n} S_k}, \tag{14}$$

kde S_j a t_{zj}, kde $j = 1, \ldots, m$, jsou směnečné částky a zbytkové doby splatnosti směnek splatných před středním dnem splatnosti; S_k a t_{zk}, kde $k = 1, \ldots, n$, jsou směnečné částky a zbytkové doby splatnosti směnek splatných po středním dnu splatnosti.

Veličina t_S se nazývá **střední doba splatnosti** a označuje období mezi dnem eskontu a středním dnem splatnosti. Datum středního dne splatnosti pak určíme přičtením střední doby splatnosti k datu eskontu.

$$T_S = \text{datum eskontu} + t_S$$

Příklad 3.2.2.3

Firma eskontovala dne 3.11.2005 na banku tři směnky, viz tabulku 12. Určete střední dobu splatnosti a střední den splatnosti, v němž banka vyplatí firmě směnečné částky. Diskontní míra je 10% p.a.

Řešení:

Střední dobu splatnosti vypočteme podle vzorce (14):

$$t_S = \frac{100000 \cdot 12 + 150000 \cdot 29 + 80000 \cdot 35}{330000} = 25 \text{ (dní)}.$$

Střední doba splatnosti je 25 dní. Střední datum splatnosti určíme přičtením střední doby splatnosti k datu eskontu. V našem případě bude střední datum splatnosti 28.11.2005.

Směnka jako investiční příležitost

Směnka je cenný papír, jehož lze využít k investování. Výnos plynoucí z investice do směnek může být obdobou kapitálového výnosu, který je spojen s nákupem směnky a jejím následným prodejem ještě před dnem splatnosti. Kapitálový výnos počítáme jako jednoduchý polhůtní úrok. Další možností, která je k investování vhodná, jsou **depozitní směnky**. Ke směnce tohoto typu je připojena úroková doložka, na níž je uvedena úroková míra, kterou je směnečná částka ode dne vystavení do dne splatnosti úročena. Úrokovou doložku mohou obsahovat pouze směnky na viděnou nebo v určité době po viděné (po předložení). Výnos z depozitních směnek se rovněž vypočte jako jednoduchý polhůtní úrok.

Příklad 3.2.2.4

Investor zakoupil dne 3.5.2005 depozitní směnku za její směnečnou hodnotu 100 000 Kč. Ke směnce byla připojena úroková doložka s úrokovou mírou 7% p.a. Směnka byla splatná na viděnou, ne dříve než za 2 měsíce a ne později než za 4 měsíce. Směnka byla předložena k proplacení dne 14.8.2005. Určete výnos z této směnky při standardu $30E/360$. Jaká celková částka bude vyplacena investorovi?

Řešení:

Banka vyplatí investorovi po předložení směnky v požadované době směnečnou částku a navíc i úrokový výnos, který vypočteme jako jednoduchý úrok (viz vzorec 2):

$$u = 100000 \cdot 0,07 \cdot \frac{101}{360} = 1963,90 \text{ (Kč)}.$$

Výnos z depozitní směnky je 1 963,90 Kč. Investorovi bude celkem vyplaceno 101 963,90 Kč.

Příklad 3.2.2.5

Směnka na částku 1 650 000 Kč splatná k 1.6.2005 byla dne 8.3.2005 zakoupena při diskontní míře 9,5% p.a. a dne 5.4.2005 prodána při diskontní míře 9,3% p.a. Jaká míra výnosnosti (hrubá výnosnost) byla obchodem se směnkami realizována? Pro určení počtu dní použijte standard $ACT/360$.

Řešení:
Nejdříve vypočteme cenu směnky, za kterou byla zakoupena (P_1) a následně prodána (P_2).

$$P_1 = 1650000(1 - 0,095\frac{85}{360}) = 1612989,60 \text{ (Kč)}$$
$$P_2 = 1650000(1 - 0,093\frac{57}{360}) = 1625703,80 \text{ (Kč)}$$

Míru výnosnosti, která je současně hrubou výnosností (neuvažujeme daně, případně jiné srážky), plynoucí z obchodu se směnkami vypočteme jako úrokovou míru v případě jednoduchého úročení, tj.

$$i = \frac{360}{28}(\frac{1625703,80}{1612989,60} - 1) = 0,1013, \text{ tj. } 10,13\%.$$

Míra výnosnosti činila 10,13% p.a.

Úlohy k procvičení:

1. Směnka znějící na částku 200 000 Kč a s datem splatnosti 19.3.2005 byla eskontována v bance dne 5.1.2005. Jakou částku vyplatí banka držiteli směnky, je-li diskontní míra 5% p.a. a jestliže banka účtuje eskontní provizi 0,05% ze směnečné částky? Při výpočtu použijte standard $30E/360$.
   (197 844,40 Kč)

2. Firma eskontovala v bance dne 1.6. čtyři směnky, pro jednoduchost označené písmeny A, B, C, D. Jejich charakteristiky najdeme v tabulce. Kolik banka vyplatila firmě, jestliže aktuální diskontní míra činila 6% p.a.?
   (308 535,90 Kč)

Směnka	S	Den splatnosti
A	75 000 Kč	14.6.
B	80 000 Kč	2.7.
C	65 000 Kč	29.6.
D	90 000 Kč	10.7.

3. Vypočtěte střední dobu a střední den splatnosti u směnek z předchozího příkladu, jestliže den eskontu je 1.7. a diskontní míra je 6% p.a.
   (7,4 dne)

4. Firma koupila dne 27.5. směnku znějící na částku 75 000 Kč splatnou ke dni 3.8. při diskontní míře 6,9% p.a. Za 3 týdny tuto směnku prodala při diskontní míře 6,5% p.a. Jak velká byla míra výnosnosti? Při výpočtu použijte standard $ACT/360$.
   (7,90%)

4 Složené úročení

Studijní cíle:
V této kapitole poznáte specifika složeného úročení a naučíte se počítat splatné částky v případě různých délek úrokových období. Naučíte se porovnávat úrokové míry definované pro odlišné délky úrokových období pomocí efektivní úrokové míry. Zjistíte, jaký je rozdíl mezi nominální a reálnou úrokovou mírou a jakým způsobem se určí hrubá a čistá výnosnost.

Na rozdíl od jednoduchého úročení budeme v případě složeného úročení předpokládat, že počáteční kapitál K_0 je úročen po dobu tvořenou **více úrokovými obdobími**, kde úrokové období je jeden rok. Úrok bude ke vkladu připsán vždy na konci roku a následující rok bude znovu spolu s vkladem úročen, vzniknou tedy úroky z úroků. Vzhledem k době připisování úroků půjde o polhůtní (roční) složené úročení. Předlhůtní složené úročení nemá v praxi využití, nebudeme se jím dále zabývat.

Základní rovnice složeného úročení

Nechť K_0 je počáteční kapitál. Zajímá nás, jak se změní jeho výše za n let, kde n je celé kladné číslo, jestliže úroky byly připisovány vždy na konci roku a další rok znovu úročeny při neměnné úrokové míře i. Postup odvození je uveden v tabulce 13.

Základní rovnice pro složené úročení je uvedena v posledním řádku tabulky 13, tedy

$$K_n = K_0(1+i)^n, \tag{15}$$

kde K_n je splatná částka na konci n-tého roku. Částky $K_j, j = 1, \dots, n$, na konci i-tého roku tvoří geometrickou posloupnost s kvocientem $1+i$, který se nazývá **úrokovací faktor** neboli **úročitel**. Úročitel můžeme interpretovat jako budoucí hodnotu jednotkového kapitálu na konci roku.

Příklad 4.1
Jak vzroste částka 10 000 Kč uložená na účtu po dobu 5 let při ročním složeném úročení? Úroková míra je 10% p.a.

Řešení:
Budeme počítat hodnotu K_5 podle základní rovnice pro složené úročení:

$$K_5 = 10000(1+0,1)^5 = 16105,10 \text{ (Kč)}.$$

Částka 10 000 Kč vzroste za uvedených podmínek na 16 105,10 Kč.

Tabulka 13: Odvození základní rovnice složeného úročení

Rok	Stav na konci roku
1	$K_1 = K_0(1+i)$
2	$K_2 = K_1(1+i) = K_0(1+i)^2$
3	$K_3 = K_2(1+i) = K_0(1+i)^3$
.	.
.	.
n	$K_n = K_0(1+i)^n$

Současná a budoucí hodnota kapitálu

Z hlediska času je částka K_n **budoucí hodnotou počátečního kapitálu** K_0 a, naopak, částka K_0 je **současnou hodnotou splatné částky** K_n. Současnou hodnotu K_0 vypočítáme ze základní rovnice (15):

$$K_0 = K_n \frac{1}{(1+i)^n} = K_n (\frac{1}{1+i})^n, \tag{16}$$

podíl $\frac{1}{1+i}$ se nazývá **diskontní faktor** neboli **odúročitel**. V literatuře se často značí jako v, tj.

$$v = \frac{1}{1+i},$$
$$K_0 = K_n v^n,$$

a je interpretován jako současná hodnota jednotkového kapitálu počítaná za období jednoho roku. V případě, že finanční částky diskontujeme přes více úrokových období, mluvíme o **složeném diskontování**.

Příklad 4.2

Jakou částku musíme dnes složit na účet, abychom z něj za 3 roky mohli vybrat 20 000 Kč? Úroková míra je 6% p.a.

Řešení:

Částka, kterou budeme dnes ukládat, představuje současnou hodnotu částky 20 000 Kč. Podle vztahu (16) dostaneme

$$K_0 = 20000 \frac{1}{(1+0,06)^3} = 16792,40 \text{ (Kč)}.$$

Na účet dnes musíme složit 16 792,40 Kč.

Výpočet doby splatnosti

Dobu splatnosti při složeném úročení vypočteme ze základní rovnice (15) použitím následujících matematických úprav:

$$K_n = K_0(1+i)^n$$
$$\frac{K_n}{K_0} = (1+i)^n$$
$$\ln(\frac{K_n}{K_0}) = n\ln(1+i)$$
$$n = \frac{\ln(K_n/K_0)}{\ln(1+i)} \tag{17}$$

Poznámka:
Doba splatnosti nemusí vyjít v podobě celého čísla.

Výpočet úrokové míry

Úrokovou míru odvodíme též ze základní rovnice.

$$K_n = K_0(1+i)^n$$
$$\frac{K_n}{K_0} = (1+i)^n$$
$$\sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} = 1+i$$
$$i = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$$

Příklad 4.3
Jak velká byla úroková míra, která zúročila vklad 9 000 Kč na 12 500 Kč za 3 roky při ročním složeném úročení?

Řešení:

$$i = \sqrt[3]{\frac{12500}{9000}} - 1 = 0,1157.$$

Úroková míra činila 0,115 7, tj. 11,57% p.a.

Tabulka 14: Úroková období

Úrokové období	m
roční	1
pololetní	2
čtvrtletní	4
měsíční	12
týdenní	52
denní	365

4.1 Složené úročení s častějším připisováním úroků

Zde budeme předpokládat, že počáteční kapitál je K_0, doba splatnosti je tvořena více úrokovými obdobími kratšími než jeden rok, jejichž počet je vyjádřen celým kladným číslem m, úrok je připsán vždy na konci úrokového období, při roční úrokové míře i.
Jestliže je dána roční úroková míra a přitom úrokové období je kratší než jeden rok, nazývá se tato roční úroková míra **nominální úroková míra**.

Nejčastěji používaná úroková období včetně jejich počtu v jednom roce jsou uvedena v tabulce 14.

Splatná částky na konci n-tého roku
Na začátku roku uložíme částku K_0 a na konci každé m-tiny roku připíšeme úrok na základě složeného úročení při nominální úrokové míře i. Je-li úrokové období kratší než jeden rok, je nutné nominální úrokovou míru vydělit příslušnou hodnotou m. Proto při odvození (viz tabulku 15) použijeme úrokovou míru $\frac{i}{m}$.

V posledním řádku tabulky nalezneme rovnici pro výpočet splatné částky za n let.

Příklad 4.1.1
Na kolik vzroste vklad 10 000 Kč uložený 5 roků při úrokové míře 10% p.a. se čtvrtletním připisováním úroků?

Řešení:
Podle základní rovnice máme

$$K_5 = 10000(1 + 0,1/4)^{20} = 16386,20 \text{ (Kč)}.$$

Daný vklad vzroste na 16 386,20 Kč.

Tabulka 15: Odvození splatné částky při področním složeném úročení

Část roku (m)	Stav kapitálu na konci části roku
$\frac{1}{m}$	$K_{\frac{1}{m}} = K_0(1+\frac{i}{m})$
$\frac{2}{m}$	$K_{\frac{2}{m}} = K_{\frac{1}{m}}(1+\frac{i}{m}) = K_0(1+\frac{i}{m})^2$
$\frac{3}{m}$	$K_{\frac{3}{m}} = K_{\frac{2}{m}}(1+\frac{i}{m}) = K_0(1+\frac{i}{m})^3$
.	.
.	.
$\frac{m-1}{m}$	$K_{\frac{m-1}{m}} = K_{\frac{m-2}{m}}(1+\frac{i}{m}) = K_0(1+\frac{i}{m})^{m-1}$
$\frac{m}{m}$	$K_{\frac{m}{m}} = K_0(1+\frac{i}{m})^m = K_1$
.	.
$\frac{2m}{m}$	$K_{\frac{2m}{m}} = K_0(1+\frac{i}{m})^{2m} = K_2$
.	.
$\frac{3m}{m}$	$K_{\frac{3m}{m}} = K_0(1+\frac{i}{m})^{3m} = K_3$
.	.
.	.
$\frac{nm}{m}$	$K_{\frac{nm}{m}} = K_0(1+\frac{i}{m})^{nm} = K_n$

4.2 Smíšené úročení

Smíšené úročení je kombinací složeného a jednoduchého úročení v případě, že doba splatnosti n zde není vyjádřena celým kladným číslem, nýbrž je dána jako součet celého počtu úrokových období n_m a zbytku l, který je kratší než jedno úrokové období. Po dobu n_m jsou úroky připisovány vždy na konci úrokového období a v dalším období znovu úročeny, pouze na konci doby splatnosti (za dobu l) se úročí jednoduše. Dále uvažujeme počáteční kapitál K_0 a roční úrokovou míru i. Splatnou částku při smíšeném úročení vypočteme tedy ze vztahu

$$K_n = K_0(1+\frac{i}{m})^{n_m}(1+il), \tag{18}$$

kde $n = n_m + l$.

Příklad 4.2.1
Na kolik vzroste vklad 10 000 Kč uložený 5 roků a 3 měsíce při úrokové míře 10% p.a.? Úroky jsou připisovány ročně a dále úročeny s vkladem.

Řešení:
Doba, po kterou je vklad uložen, vzhledem k frekvenci připisování úroků není celočíselná, půjde tedy o případ smíšeného úročení. Podle vztahu (18) je

$$K_n = 10000(1 + 0,1)^5(1 + 0,1 \cdot 3/12) = 16507,70 \text{ (Kč)}.$$

Vklad vzroste na 16 507,70 Kč.

Příklad 4.2.2
Určete dobu uložení kapitálu 20 000 Kč, jehož budoucí hodnota je 24 000 Kč, při úrokové míře 6% p.a. a

1. ročním složeném úročení,
2. měsíčním složeném úročení. Vyjádřete v tomto případě dobu uložení v rocích i v měsících.

Řešení:
V prvním případě dosadíme do vzorce (17), tj.

$$n = \frac{\ln 24000 - \ln 20000}{\ln(1 + 0,06)} = 3,13 \text{ (roků)}.$$

V druhém případě je možné vypočítat dobu uložení v měsících i v letech způsobem

$$nm = \frac{\ln 24000 - \ln 20000}{\ln(1 + 0,06/12)} = 36,56 \text{ (měsíců)},$$
$$n = \frac{1}{12}\frac{\ln 24000 - \ln 20000}{\ln(1 + 0,06/12)} = 3,05 \text{ (roků)}.$$

Doba uložení kapitálu při ročním složeném úročení je 3,13 roků (3 roky a 47 dní), při měsíčním složeném úročení 3,05 roků, což je 36,56 měsíců.

4.3 Efektivní úroková míra, úroková intenzita

Efektivní úroková míra i_e je úroková míra, která poskytne za jedno roční úrokové období stejný úrok jako nominální úroková míra i s častějším připisováním úroků. Platí

$$1 + i_e = (1 + \frac{i}{m})^m,$$
$$i_e = (1 + \frac{i}{m})^m - 1.$$

Tabulka 16: Efektivní úrokové míry pro úrokovou míru 10% p.a. s různou frekvencí úročení

m	i_e (% p.a.)
1	10,00
2	10,25
4	10,38
12	10,47
52	10,51
365	10,516

Příklad 4.3.1
Určete efektivní úrokovou míru, která odpovídá nominální úrokové míře 10% s ročním, pololetním, čtvrtletním, měsíčním, týdenním a denním připisováním úroků.

Řešení:
Využijeme vztahu

$$i_e = (1 + \frac{i}{m})^m - 1,$$

kde m je frekvence úročení. Výsledné hodnoty efektivní úrokové míry udává tabulka 16.

Efektivní úroková míra odpovídající spojitému úročení (úrokové období je nekonečně malé) se nazývá **úroková intenzita**. Vypočteme ji pomocí následující limity:

$$1 + i_e = \lim_{m\to\infty}(1 + \frac{i}{m})^m = \lim_{m\to\infty}[(1 + \frac{1}{\frac{m}{i}})^{\frac{m}{i}}]^i = e^i,$$

$$i_e = e^i - 1. \tag{19}$$

Splatnou částku při spojitém úročení pak vypočteme podle vzorce

$$K_n = K_0 e^{in}, \qquad n \in R^+. \tag{20}$$

Příklad 4.3.2
Jak se změní hodnota vkladu 15 000 Kč uloženého jeden rok na účtu při úrokové míře 10% p.a. se spojitým úročením? Jaká bude úroková intenzita?

Řešení:
Hodnotu vkladu za rok získáme užitím vztahu (20)

$$K_1 = 15000e^{0,1} = 16577,60 \text{ (Kč)}.$$

Úrokovou intenzitu vypočteme pomocí vzorce (19), tj.

$$i_e = e^{0,1} - 1 = 0,10517, \text{ tj. } 10,517\% \text{ p.a.}$$

Vklad za jeden rok vzroste na 16 577,60 Kč. Úroková intenzita je 10,517% p.a. To je o 0,001% ročně více než v případě, kdy jsou úroky ke vkladu připisovány denně (viz minulý příklad).

Využití efektivní úrokové míry

Efektivní úrokovou míru lze využít při porovnávání úrokových měr s různou frekvencí připisování úroků. Při častějším připisování úroků je odpovídající efektivní úroková míra rostoucí, svého maxima dosahuje v případě spojitého úročení.

4.4 Nominální a reálná úroková míra

S nominální úrokovou mírou jsme se už setkali v předchozí kapitole. Její význam spočíval pouze v označení roční úrokové míry v případě, že úrokové období však bylo kratší než jeden rok. Při výpočtech jsme tuto nominální úrokovou míru vydělili počtem úrokových období m v roce, takže jsme vlastně použili úrokovou míru $\frac{i}{m}$.

Na pojem **nominální úroková míra** však můžeme narazit ještě v souvislosti s mírou inflace. V tomto případě rozlišujeme:

- **nominální úrokovou míru** - takovou, která je přímo uvedená ve smlouvách, v nabídkách bankovních produktů nebo na cenných papírech (např. směnečná částka na směnce) a u níž míra inflace zohledněna není,
- **reálnou úrokovou míru**, u níž míra inflace zohledněna je.

Typickým příkladem je výpočet úrokové míry z bankovního vkladu. Uložíme-li počátkem roku částku 100 Kč a na konci roku vybereme částku 110 Kč, bude úroková míra, která zúročila tento vklad, činit 10%. Vypočtenou úrokovou míru můžeme označit za nominální, protože jsme žádným způsobem nezohlednili míru inflace. Budeme-li však vědět, že míra inflace za uvažovaný rok činila 3%, můžeme zhruba určit reálnou úrokovou míru a to odečtením míry inflace od nominální úrokové míry. Výsledkem bude hodnota 7%. Tedy vidíme, že reálný výnos z našeho vkladu je nižší.

Přesné matematické odvození reálné úrokové míry je následující:
máme-li počáteční kapitál K_0, bude splatná částka za jeden rok při nominální roční úrokové míře i činit podle (7)

$$K_1 = K_0(1 + i).$$

Uvažujeme-li míru inflace i_i, bude platit:

$$K_0(1 + i)\frac{1}{1 + i_i} = K_0(1 + i_r),$$

kde podíl $\frac{1}{1+i_i}$ značí kupní sílu (reálnou hodnotu) jedné koruny na konci uvažovaného roku a i_r reálnou úrokovou míru. Úpravou rovnice dostaneme vztah

$$i = i_r + i_i + i_r i_i,$$

zvaný **Fisherova rovnice**. Součin $i_r i_i$ se někdy pro svoje nízké hodnoty zanedbává a Fisherova rovnice se zapisuje ve zkráceném tvaru

$$i \doteq i_r + i_i.$$

Vrátíme-li se k příkladu z úvodu této podkapitoly, použili jsme k výpočtu reálné úrokové míry Fisherovu rovnici v přibližném tvaru, aniž jsme o tom před tím věděli.

Na závěr uvedeme ještě příklad, v němž bude ukázáno, jak se počítají reálné hodnoty finančních částek.

Příklad 4.4.1
Jaká bude reálná hodnota stokoruny po dvou letech (na konci druhého roku), je-li míra inflace v prvním roce 10% a v druhém 15%?

Řešení:
Na konci prvního roku bude reálná hodnota stokoruny činit

$$\frac{100}{1 + 0,1} = 90,90 \text{ (Kč)},$$

na konci druhého roku pak

$$\frac{\frac{100}{1+0,1}}{1+0,15} = 79,05 \text{ (Kč)}.$$

Reálná hodnota neboli kupní síla stokoruny po dvou letech bude činit jen 79,05 Kč.

4.5 Hrubá a čistá výnosnost

Hrubá výnosnost je úroková míra realizovaná při investování, **čistá výnosnost** je hrubá výnosnost snížená o určitou daň. Je-li $d\prime$ daňová sazba, i hrubá výnosnost, pak čistou výnosnost obecně vypočteme ze vztahu

$$i_c = i(1 - d\prime). \tag{21}$$

Čistý konečný kapitál je v případě jednoduchého úročení vyjádřen jako

$$K_n = K_0[1 + i(1 - d\prime)t],$$

odkud můžeme odvodit vztahy jak pro čistou výnosnost (i_c), tak pro hrubou výnosnost (i):

$$i(1 - d\prime)t = \frac{K_n}{K_0} - 1,$$

$$i(1 - d\prime) = \frac{K_n/K_0 - 1}{t} = i_c,$$

$$i = \frac{K_n/K_0 - 1}{(1 - d\prime)t}.$$

V případě složeného úročení vypočteme čistý konečný kapitál způsobem

$$K_n = K_0[1 + (1 - d\prime)i]^n,$$

čistou a hrubou výnosnost pak podobným odvozením jako v případě jednoduchého úročení. Obdržíme vztahy

$$\sqrt{\frac{K_n}{K_0}} - 1 = (1 - d\prime)i = i_c,$$

$$\frac{\sqrt{K_n/K_0}-1}{1-d\prime}=i. \tag{22}$$

Příklad 4.5.1
Vraťme se k příkladu z kapitoly o směnkách, v němž bylo úkolem spočítat roční míru zisku. Vypočtenou míru zisku, která činila 0,1013, můžeme považovat za hrubou (roční) výnosnost, protože jsme nebrali ohled na zdanění. Jestliže budeme znát daňovou sazbu pro výnosy z obchodování se směnkami, pak lze vypočítat čistou (roční) výnosnost podle vztahu (21). Je-li daňová sazba $d\prime = 0{,}15$, bude čistá výnosnost i_c pro výše uvedený případ rovna

$$i_c = 0,1013(1-0,15) = 0,0861, \text{ tj. } 8,61\%.$$

Čistá roční výnosnost daného obchodu je 8,61%.

Příklad 4.5.2
Při jaké nominální úrokové míře byl uložen vklad 2 000 000 Kč, jestliže po zdanění sazbou 15% vzrostla jeho hodnota za 2 roky na 2 281 248 Kč? Úroky byly připisovány vždy na konci roku, ponechány na účtu a znovu úročeny.

Řešení:
Nominální úrokovou míru zde můžeme považovat za hrubou výnosnost z investice do bankovního vkladu. Pro její výpočet použijeme vzorec (22).

$$i=\frac{\sqrt{\frac{2281248}{2000000}}-1}{1-0,15}=0,08.$$

Vklad byl uložen při nominální úrokové míře 8% p.a.

Úlohy k procvičení:

1. Vypočtěte budoucí hodnotu částky 15 000 Kč, která byla uložena po dobu 1 roku na účtu úročeném 2% p.a. s a) ročním, b) pololetním, c) čtvrtletním, d) měsíčním připisováním úroků.
(a)15 300 Kč; b)15 301,50 Kč; c)15 302,30 Kč; d)15 302,80 Kč)

2. Na jakou částku vzroste vklad 15 000 Kč uložený na účtu 3 roky a 5 měsíců při úrokové míře 10,5% p.a., jsou-li úroky připisovány a) pololetně, b) čtvrtletně, c) měsíčně?
(a)21 282,40 Kč; b)21 375,50 Kč; c)21 439,60 Kč)

3. Jaký byl počáteční kapitál a úroková míra, víme-li, že po roce byl jeho stav 50 000 Kč a po 2 letech 55 000 Kč při ročním úročení? Úroky byly připsány ke vkladu a dále úročeny s ním stejnou úrokovou mírou.
(45 454,50 Kč, 10% p.a.)

4. Určete dobu uložení kapitálu 10 000 Kč, jestliže bylo v době splatnosti vyplaceno 21 000 Kč při úrokové míře 10% p.a. s pololetním úročením.
(7,6 let)

5. Jakou částku musíme dnes složit na účet, abychom mohli jet za rok na dovolenou, jejíž cenu lze odhadnout na 30 000 Kč? Účet je úročen 5%-ní roční úrokovou mírou se čtvrtletním připisováním úroků.
(28 545,70 Kč)

6. Počáteční hodnota vkladu je 14 000 Kč. Po uplynutí 6 let vklad vzrostl na 19 400 Kč. Jaká byla roční úroková míra, jestliže úroky byly ke vkladu připsány a dále s ním úročeny? Předpokládáme, že úroková míra se během uvedené doby neměnila.
(5,59% p.a.)

7. Chceme koupit automobil za cenu 560 000 Kč. Máme možnost zaplatit za něj ihned při nákupu nebo dát zálohu 280 000 Kč a za dva roky doplatit 305 000 Kč. Která z variant je pro nás výhodnější, můžeme-li uložit peníze při úrokové míře 4% p.a.
(první)

8. Vypočtěte efektivní úrokovou míru pro nominální úrokovou míru 2% p.a., je-li frekvence úročení a)pololetní, b)čtvrtletní, c)měsíční, d)týdenní, e)denní, f)je-li úročení spojité.
(a) 2,010% p.a.; b) 2,015% p.a.; c) 2,018% p.a.; d) 2,019% p.a.; e) 2,0202008% p.a.; f) 2,0202013% p.a.)

9. Rozhodli jsme se založit termínovaný účet u banky, která nabízí dva typy:

a) účet s úrokovou mírou 1% p.m.,
b) účet s úrokovou mírou 6,25% p.s.
Který z účtů si vybereme?
(druhý)

10. Na účet úročený úrokovou mírou 5,6% p.a. jsme uložili 14 000 Kč. Jak se změní hodnota tohoto vkladu za 6 roků při spojitém úročení? Výsledek porovnejte s výsledkem z úlohy 6.
(19 590,70 Kč)

11. Roční úroková míra běžného účtu činí 6%. Jaký bude reálný výnos, jestliže míra inflace v uvažovaném roce je 3% a předpokládáme, že se nemění?
(2,91% p.a.)

12. Vypočítejte nominální úrokovou míru v úloze 6, jestliže úroky z vkladu jsou daněny 15-procentní daňovou sazbou.
(6,57% p.a.)

5 Investiční rozhodování

Studijní cíle:
V této kapitole si uvědomíte, proč nelze s finančními částkami pracovat najednou v různých časech, naučíte se výpočtům konkrétních částek prostřednictvím hodnotové rovnice. Tyto znalosti pak budete schopni uplatnit při oceňování investic podle speciálních pravidel a navíc budete umět podle nich rozhodnout, jestli se investice vyplatí či nevyplatí. V závěru kapitoly se dozvíte o dalších investičních kriteriích.

Základní pojmy:

1. **hodnota peněz** - nezůstává v čase stejná, mění se vlivem míry inflace nebo vlivem míry výnosnosti;
2. **finanční toky (cash flows)** - realizované nebo očekávané pohyby peněžních prostředků v různých časových okamžicích investičních projektů, dělíme je na
   příjmy - finanční toky s kladným znaménkem,
   výdaje - finanční toky se záporným znaménkem ;
3. **investice** - je systém finančních toků rozložených v čase, při výpočtech obvykle vztahujeme všechny finanční toky k jednomu časovému bodu, tzv. **referenčnímu datu**, přičemž použijeme úročení, jdeme-li časově dopředu (zajímají nás budoucí hodnoty) a diskontování při pohybu dozadu (zajímají nás současné hodnoty);
4. **ocenění investice** - pomocí investičních pravidel určíme, zda je vhodné investovat či ne
   pravidla pro ocenění investic:
   - pravidlo (čisté) současné hodnoty,
   - pravidlo vnitřní míry výnosnosti,
   - pravidlo doby návratnosti;
5. **hodnotová rovnice** - rovnice, v níž porovnáváme dané finanční toky vztažené k referenčnímu datu a kterou řešíme podle příslušné neznámé.

Příklad 5.1
Stavební firma koupila pozemek za 6 miliónů Kč, přitom 3 milióny zaplatila okamžitě a dále vystavila směnku na 2 milióny Kč splatnou za rok a směnku na 1 milión Kč splatnou za 2 roky. Jaká směnka splatná za tři roky splatí zbytek dluhu, účtuje-li věřitel roční úrokovou míru 11%?

Řešení:
Označme zbytek dluhu symbolem x. Abychom mohli zbytek dluhu vypočítat, je nutné převést všechny jmenované částky ke stejnému referenčnímu datu. Zvolme referenční datum připadající na den, který je tři roky od data nákupu, leží tedy v budoucnosti. Jednotlivé částky pak budou přepočítávány pomocí úročení. Příslušná hodnotová rovnice bude mít tedy tvar

$$6000000 \cdot 1,11^3 = 3000000 \cdot 1,11^3 + 2000000 \cdot 1,11^2 + 1000000 \cdot 1,11 + x$$

$$x = 528693 \text{ (Kč)}.$$

Kdyby referenčním datem byl den nákupu, použili bychom pro přepočet částek diskontování, neboť bychom se pohybovali časově dozadu. Hodnotová rovnice by pak vypadala takto:

$$6000000 = 3000000 + \frac{2000000}{1,11} + \frac{1000000}{1,11^2} + \frac{x}{1,11^3}$$
$$x = 528693 \text{ (Kč)}.$$

Zbytek dluhu by splatila směnka na 528 693 Kč.

5.1 Pravidlo současné hodnoty

Nechť $C_0, C_1, \ldots, C_n$ jsou finanční toky vztažené k určité investici, kde C_0 značí počáteční výdaj (pořizovací cenu investice) a i je úroková míra charakteristická pro investice se srovnatelnými parametry. Pak současná hodnota (present value, PV) finančních toků $C_1, \ldots, C_n$ je

$$PV = \sum_{j=1}^{n} \frac{C_j}{(1+r)^j} = \sum_{j=1}^{n} C_j v^j, \tag{23}$$

kde r je míra výnosnosti v rámci uvažovaného typu investice. Jestliže některé z finančních toků $C_1, \ldots, C_n$ představují výdaje, musíme je do vzorce (23) uvést se záporným znaménkem. Příjmové položky dosadíme s kladným znaménkem.

Pravidlo současné hodnoty spočívá v porovnání hodnot PV a C_0 a podle toho, která z hodnot je větší, se doporučuje investovat nebo neinvestovat:

- je-li $PV > C_0$, pak **investuj**,
- je-li $PV < C_0$, pak **neinvestuj**,

Tabulka 17: Finanční toky

Rok	2003	2004	2005	2006
Příjmy (Kč)	-	66 000	72 000	760 000
Výdaje (Kč)	700 000	-	-	-

- je-li $PV = C_0$, pak nelze podle tohoto pravidla rozhodnout.

Započítáme-li do sočasné hodnoty také částku C_0, dostaneme **čistou současnou hodnotu** (net present value, NPV):

$$NPV = \sum_{j=0}^{n} \frac{C_j}{(1+r)^j} = \sum_{j=0}^{n} C_j v^j. \tag{24}$$

Pravidlo čisté současné hodnoty:

- je-li $NPV > 0$, pak **investuj**,
- je-li $NPV < 0$, pak **neinvestuj**,
- je-li $NPV = 0$, pak nelze podle tohoto pravidla rozhodnout.

Příklad 5.1.1
Zjistěte, jestli se vyplatí investovat do bytu, který pronajmeme na určitou dobu a poté jej opět prodáme. Úroková míra v rámci investic do nemovitostí činí 10% p.a. Příslušné finanční toky jsou uvedeny v tabulce 17:

Řešení:
Vypočteme čistou současnou hodnotu podle (24).

$$NPV = -700000 + \frac{66000}{1,1} + \frac{72000}{1,1^2} + \frac{760000}{1,1^3} = -9496,60 \text{ (Kč)}.$$

Získaná hodnota NPV je záporná a podle pravidla čisté současné hodnoty se daná investice nevyplatí. Důvodem mohou být ne příliš vysoké příjmy nebo ne příliš vysoká prodejní cena bytu při dané míře výnosnosti 10%. Aby se investice do bytu vyplatila, měl by investor požadovat vyšší nájemné nebo by se měl snažit prodat byt dráže a nebo, jestli by mu postačovaly nižší příjmy, měl by požadovat míru výnosnosti nižší než 10%. Zkusme proto řešit úlohu při 7-procentní míře výnosnosti.

Řešení:

$$NPV = -700000 + \frac{66000}{1,07} + \frac{72000}{1,07^2} + \frac{760000}{1,07^3} = 44956,20 \text{ (Kč)}.$$

Hodnota NPV při míře výnosnosti 7% je již kladná a tedy investovat do bytu se vyplatí.

5.2 Pravidlo vnitřní míry výnosnosti

Vnitřní mírou výnosnosti rozumíme míru výnosnosti realizovanou v rámci investic srovnatelných parametrů, např. v rámci investic do určitého typu nemovitostí. Vnitřní míra výnosnosti, bude označena r, je odhadována z rovnice

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{C_j}{(1+r)^j} = 0,$$

a následně porovnána s mírou výnosnosti i, která je běžně dostupná na trhu v rámci investic se srovnatelnými parametry. Při použití tohoto pravidla záleží také na průběhu funkce popisující závislost čisté současné hodnoty na míře výnosnosti.

Jsou-li $C_0 < 0, C_1 > 0, \ldots, C_n > 0$ finanční toky, má funkce NPV tvar

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{C_j}{(1+r)^j}$$

a **pravidlo vnitřní míry výnosnosti** zní:

- je-li $r > i$, pak **investuj**,
- je-li $r < i$, pak **neinvestuj**

Příklad 5.2.1
Řešte předchozí příklad s použitím pravidla vnitřní míry výnosnosti.

Řešení:
Hodnotu míry výnosnosti budeme odhadovat z rovnice

$$-700000 + \frac{66000}{1+r} + \frac{72000}{(1+r)^2} + \frac{760000}{(1+r)^3} = 0.$$

Použitím SW Microsoft Excel (funkce Míra výnosnosti) získáme hodnotu 0,0945 neboli 9,45%. Jestliže je míra výnosnosti v rámci investic do bytů 10%, potom naše vypočtená hodnota je nižší a podle pravidla vnitřní míry výnosnosti pro daný typ funkce NPV se investice nevyplatí. Kdyby míra výnosnosti v rámci investic do bytů činila 7%, potom vypočtená hodnota 9,45% je vyšší a podle pravidla lze investici do bytu doporučit.

5.3 Pravidlo doby návratnosti

Doba návratnosti je doba, za kterou postupně splatí kumulované příjmy investovaný kapitál. Kumulované příjmy získáme sečtením jednotlivých příjmů za minulé roky, neuvažujeme zde tedy úrokovou míru. Při použití tohoto pravidla preferujeme investici s nejkratší dobou návratnosti. Vypočtenou dobu návratnosti porovnáváme se známou dobou návratnosti v rámci stejného typu investice.

5.4 Investiční kritéria

Investoři při výběru vhodné investice sledují zpravidla následující tři hlediska:

- výnosnost, s níž souvisí ocenění investice dle tří pravidel výše,
- riziko (bývá vyjádřeno směrodatnou odchylkou, existují různé stupnice rizika),
- likviditu, tj. rychlost, s jakou lze investici zpět proměnit v hotovost.

Tato tři kritéria se většinou vzájemně vylučují, proto musí investor udělat mezi nimi kompromis. Výnosnost investice vždy bývá spjata s rizikem, že jí nedosáhneme. Příslušné riziko může nabývat určitých hodnot vypočtených jako směrodatné odchylky od průměrné výnosnosti. Pro lepší představu o rizikovosti jednotlivých typů investic se setavují různé stupnice rizika. Níže je uveden příklad investic seřazených od nejméně rizikových po nejvíce rizikové.

- nemovitosti, drahé kovy, starožitnosti;
- pokladniční poukázky, peněžní vklady;
- státní obligace, komunální obligace;

- depozitní cetifikáty, podílové listy;
- směnky, prioritní akcie;
- obyčejné akcie;
- termínové obchody.

Podobně existují také stupnice pro likviditu investic, např. následující řada je uspořádána od nejlikvidnějších investic po nejméně likvidní:

- peněžní prostředky (tuzemské, devizy, valuty);
- zlato, vklady, pokladniční poukázky, podílové listy;
- depozitní certifikáty, obligace, akcie kotované na burze;
- obligace a akcie nekotované na burze;
- nemovitosti, starožitnosti, podnikatelské projekty.

Úlohy k procvičení:

1. Podnikatel platí 50 000 Kč za nájem počátkem každého měsíce. Vzhledem k finanční tísni nezaplatil nájem za duben, květen a červen. Počátkem července mohl vzniklý dluh splatit a navíc zaplatil nájem až do konce roku. Jakou částku podnikatel zaplatil v červenci, je-li úroková míra 6% p.a. s měsíčním úročením?
   (447 798,30 Kč)
2. Podnikatel dluží bance 200 000 Kč splatných za 1 rok a 300 000 Kč splatných za 2 roky. Banka souhlasí, že podnikatel může dluh vyrovnat okamžitě, přičemž požaduje roční úrokovou míru 15% s pololetním úročením. Kolik bance zaplatí?
   (397 706,70 Kč)
3. Otec ve své závěti stanovil, že částka 300 000 Kč je převedena do zvláštního fondu, z něhož každé ze tří dětí dostane při dosažení věku 18 let stejný podíl. Fond byl investován s úrokovou mírou 8% p.a. s pololetním úročením. V době smrti otce bylo stáří jeho dětí 11, 13 a 16 let. Jakou částku při dovršení 18 let každé z dětí obdrží?
   (142 325,60 Kč)
4. Oceňte investici do cenného papíru, je-li průměrný roční výnos a)10%, b)20%. Finanční toky naleznete v tabulce 18.
   (a) investuj; b) neinvestuj)

Tabulka 18: Finanční toky

Rok	Výdaje (Kč)	Příjmy (Kč)
0	500	-
1	-	150
2	-	150
3	-	150
4	-	150
5	-	225

Tabulka 19: Investice 1

Rok	Příjmy(tis. Kč)	Výdaje(tis. Kč)
2003	130	1 100
2004	130	-
2005	130	-
2006	130	-
2007	1 130	-

5. Na začátku roku 2003 máme možnost koupit nemovitost za 3 milióny Kč, v níž lze pronajat od tohoto roku určité prostory za 375 000 Kč. Na konci roku 2007 chceme nemovitost prodat za 2,5 miliónů Kč, proto nájem v tomto roce bude nižší a bude činit jen 125 000 Kč. Určete, zdali se investice do domu při požadované míře výnosnosti 5% vyplatí. (ano)

6. Máme dvě investiční příležitosti se stejnou kupní cenou 1 100 000 Kč a finančními toky, které jsou uvedeny v tabulkách 19 a 20.

   Pro kterou z investic se rozhodneme, je-li míra výnosnosti 12%? (první)

Tabulka 20: Investice 2

Rok	Příjmy(tis. Kč)	Výdaje(tis. Kč)
2003	-	1 100
2004	-	-
2005	650	-
2006	-	-
2007	1 000	-

6 Spoření

Studijní cíle:
V této kapitole se seznámíte s krátkodobým, dlouhodobým a kombinovaným spořením a naučíte se počítat naspořené částky v jednotlivých případech spoření.

Spořením rozumíme pravidelné ukládání určité částky po dobu konečné délky. Součet všech úložek se nazývá **částka uložená**. Součet uložené částky a příslušných úroků se nazývá **částka naspořená**. Ta bývá obvykle cílem výpočtů v oblasti spoření.

Klasifikace spoření:

- **z hlediska počtu úrokových období**
  - spoření krátkodobé,
  - spoření dlouhodobé,
  - spoření kombinované.

  U krátkodobého spoření je doba, po kterou se spoří, rovna právě jednomu úrokovému období, na jehož konci se připíše úrok z úložek. V případě dlouhodobého spoření spoříme po dobu několika úrokových období, úrok z úložky je připsán na konci období a v dalším období znovu úročen. Vznikají tedy úroky z úroků;

- **z hlediska toho, spoříme-li stanovenou částku na počátku pravidelného časového intervalu nebo na jeho konci**
  - spoření předlhůtní,
  - spoření polhůtní.

Kombinací těchto výše uvedených rozlišení získáme několik typů spoření, jejichž naspořené částky budou odvozeny v následujících podkapitolách.

6.1 Krátkodobé předlhůtní spoření

Předpoklady:
ukládáme jednu m-tinu koruny na počátku každé m-tiny úrokového období (nejčastěji ročního) při neměnné úrokové míře i.

Odvození naspořené částky

Naspořenou částku pro krátkodobé předlhůtní spoření pro celkově uloženou

Tabulka 21: Odvození naspořené částky $S\prime_1$

Pořadí úložky	Doba splatnosti úložky	Úrok
1	$m\frac{1}{m}$	$\frac{1}{m} \cdot i\frac{m}{m}$
2	$(m-1)\frac{1}{m}$	$\frac{1}{m} \cdot i\frac{m-1}{m}$
3	$(m-2)\frac{1}{m}$	$\frac{1}{m} \cdot i\frac{m-2}{m}$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
m	$\frac{1}{m}$	$\frac{1}{m} \cdot i\frac{1}{m}$

částku ve výši 1 Kč budeme značit $S\prime_1$. Její určení spočívá v sečtení všech úložek a úroků z těchto úložek, které vypočteme pomocí jednoduchého úročení. Celý postup je ukázán v tabulce 21.

Hodnoty úroků z jednotlivých úložek (ve třetím sloupci tabulky) tvoří aritmetickou posloupnost s diferencí $\frac{1}{m}\frac{i}{m}$. Sečtením těchto hodnot dostaneme výši celkového úroku

$$u = \frac{m+1}{2m}i.$$

Částka uložená činí 1 Kč, částka naspořená $S\prime_1$ pak je

$$S\prime_1 = 1 + \frac{m+1}{2m}i.$$

V případě, že spoříme počátkem každé m-tiny úrokového období částku x Kč, bude mít naspořená částka tvar

$$S\prime_x = mx\left(1 + \frac{m+1}{2m}i\right). \qquad (25)$$

Příklad 6.1.1
Jakou částku uspoříme do konce roku, jestliže ukládáme počátkem každého měsíce 1 200 Kč při úrokové míře 9% p.a.?

Řešení:
Dosadíme do vzorce (25), s tím, že $m = 12$ a $x = 1200$:

$$S\prime_{1200} = 12 \cdot 1200\left(1 + \frac{13}{24} \cdot 0,09\right) = 15102 \text{ (Kč)}.$$

Tabulka 22: Odvození naspořené částky S_1

Pořadí úložky	Doba splatnosti úložky	Úrok
1	$\frac{m-1}{m}$	$\frac{1}{m} \cdot i\frac{m-1}{m}$
2	$(m-2)\frac{1}{m}$	$\frac{1}{m} \cdot i\frac{m-2}{m}$
3	$(m-3)\frac{1}{m}$	$\frac{1}{m} \cdot i\frac{m-3}{m}$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
$m-1$	$\frac{1}{m}$	$\frac{1}{m} \cdot i\frac{1}{m}$
m	0	0

Uspoříme 15 102 Kč.

Výpočet výše úložky

$$x = \frac{S\prime_x}{m(1 + \frac{m+1}{2m}i)} \tag{26}$$

Příklad 6.1.2
Kolik musíme ukládat počátkem každého čtvrtletí, abychom za rok uspořili 10 000 Kč při úrokové míře 8% p.a.?

Řešení:
Použijeme vzorec (26):

$$x = \frac{10000}{4(1 + 5/8 \cdot 0,08)} = 2381 \text{ (Kč)}.$$

Abychom naspořili 10 000 Kč, musíme pravidelně ukládat 2 381 Kč.

6.2 Krátkodobé polhůtní spoření

Předpoklady:
ukládáme jednu m-tinu koruny na konci každé m-tiny úrokového období, opět nejčastěji ročního, při neměnné úrokové míře i.

Odvození naspořené částky

Naspořenou částku pro krátkodobé polhůtní spoření pro celkově uloženou částku ve výši 1 Kč budeme značit S_1 a odvodíme ji opět s použitím jednoduchého úročení. Postup výpočtu je naznačen v tabulce 22.

Hodnoty úroků z jednotlivých úložek tvoří opět aritmetickou posloupnost s diferencí $\frac{1}{m}\frac{i}{m}$. Celkový úrok pak je

$$u = \frac{m-1}{2m} i.$$

Částka uložená činí 1 Kč, částka naspořená S_1

$$S_1 = 1 + \frac{m-1}{2m} i.$$

V případě, že spoříme koncem každé m-tiny úrokového období částku x Kč, bude mít vzorec pro naspořenou částku tvar

$$S_x = mx\left(1 + \frac{m-1}{2m} i\right). \tag{27}$$

Příklad 6.2.1
Jakou částku uspoříme do konce roku, jestliže koncem každého měsíce ukládáme 1 200 Kč při úrokové míře 9% p.a.?

Řešení:
Dosadíme do vzorce (27), kde opět $m = 12$ a $x = 1200$:

$$S_{1200} = 12 \cdot 1200 \left(1 + \frac{11}{24} 0,09\right) = 14994 \text{ (Kč)}.$$

Uspoříme 14 994 Kč. To je o 8 Kč méně než v případě předlhůtního spoření, kdy jsou úroky počítány ze všech úložek. U polhůtního spoření úrok z poslední úložky už nepočítáme, proto je naspořená částka nižší.

Výpočet výše úložky

$$x = \frac{S\prime_x}{m(1 + \frac{m+1}{2m} i)} \tag{28}$$

Příklad 6.2.2
Kolik musíme ukládat koncem každého čtvrtletí, abychom za rok uspořili 10 000 Kč při úrokové míře 8% p.a.?

Řešení:
Použijeme vzorec (28):

$$x = \frac{10000}{4(1 + 3/8 \cdot 0,08)} = 2427,20 \text{ (Kč)}.$$

Abychom naspořili 10 000 Kč, musíme pravidelně ukládat 2 427,20 Kč.

Tabulka 23: Odvození naspořené částky $S\prime$

Pořadí úložky	Počet období, po která je úložka úročena	Hodnota úložky na konci n-tého období
1	n	$a(1+i)^n$
2	$(n-1)$	$a(1+i)^{n-1}$
3	$(n-2)$	$a(1+i)^{n-2}$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
n	1	$a(1+i)$

6.3 Dlouhodobé předlhůtní spoření

Předpoklady:
spoříme částku a Kč na začátku zvoleného úrokového období po dobu n úrokových období při neměnné úrokové míře i, úrok je připsán na konci každého úrokového období.

Odvození naspořené částky

Naspořenou částku pro dlouhodobé předlhůtní spoření budeme značit $S\prime$. Na rozdíl od krátkodobého spoření zde bude každá úložka úročena přes více úrokových období. Pro výpočet naspořené částky tedy použijeme složené úročení. Postup odvození je zachycen v tabulce 23.

Hodnoty ve třetím sloupci tabulky tvoří geometrickou posloupnost s kvocientem $1+i$. Sečtením těchto hodnot dostaneme přímo výši naspořené částky:

$$S\prime = a(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i}. \tag{29}$$

Výraz $(1+i)\frac{(1+i)^n-1}{i}$ se nazývá **střadatel předlhůtní**, značíme jej $s\prime_n^i$ a lze jej interpretovat jako naspořenou částku, kterou získáme, spoříme-li na počátku každého úrokového období jednu korunu po dobu n úrokových období při úrokové míře i.

Zkrácený zápis rovnice (29): $S\prime = a \cdot s\prime_n^i$.

Příklad 6.3.1
Kolik naspoříme za 5 let, ukládáme-li pravidelně počátkem každého roku částku 20 000 Kč při roční úrokové míře 5%?

Řešení:
Naspořenou částku vypočteme podle vztahu (29)

$$S\prime = 20000(1+0,05)\frac{(1+0,05)^5-1}{0,05} = 116038,30 \text{ (Kč)}.$$

Za 5 let při daných podmínkách naspoříme 116 038,30 Kč.

Příklad 6.3.2
Kolik uspoříme na konci roku, ukládáme-li počátkem každého čtvrtletí částku 5 000 Kč při roční úrokové míře 3%? Úroky jsou připisovány čtvrtletně.

Řešení:
Zde je potřeba si uvědomit, jak dlouhé je úrokové období a s jakou úrokovou mírou budeme dále počítat. V zadání je uvedeno čtvrtletní připisování úroků, což znamená, že úroky jsou připsány na konci každého čtvrtletí. Úrokové období je tedy čtvrtletní. Pokud jde o úrokovou míru, máme ji sice dánu na roční bázi, ale protože úroky budou připsány čtyřikrát do roka, vydělíme ji čtyřmi. Vzhledem k počtu úrokových období a vzhledem ke skutečnosti, že spoříme počátkem každého čtvrtletí po dobu jednoho roku (čtyř čtvrtletí), jde o dlouhodobé předlhůtní spoření. Pro výpočet naspořené částky použijeme vztah (29) s úrokovou mírou vydělenou čtyřmi a počtem úrokových období rovným čtyřem.

$$S\prime = 5000(1+0,03/4)\frac{(1+0,03/4)^4-1}{0,03/4} = 20377,80 \text{ (Kč)}$$

Na konci roku budeme mít za daných podmínek uspořeno 20 377,80 Kč.

Výpočet splátky

$$a = \frac{S\prime i}{(1+i)[(1+i)^n-1]}$$

Výpočet délky doby spoření

$$S\prime = a(1+i)\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

$$\frac{S\prime i}{a(1+i)} + 1 = (1+i)^n$$

Tabulka 24: Odvození naspořené částky S

Pořadí úložky	Počet období, po která je úložka úročena	Hodnota úložky na konci n-tého období
1	$n-1$	$a(1+i)^{n-1}$
2	$(n-2)$	$a(1+i)^{n-2}$
3	$(n-3)$	$a(1+i)^{n-3}$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
n	0	a

$$n = \frac{\ln\left(\frac{Si}{a(1+i)} + 1\right)}{\ln(1+i)} \tag{30}$$

Poznámka:
Délka doby, po kterou se spoří, nemusí vyjít ve formě celého čísla.

Příklad 6.3.3
Za jak dlouho naspoříme 100 000 Kč, ukládáme-li počátkem každého roku 20 000 Kč při roční úrokové míře 3%?

Řešení:
Použijeme vztah (36):

$$n = \frac{\ln\left(\frac{100000\cdot 0{,}03}{20000(1+0{,}03)} + 1\right)}{\ln(1+0,03)} = 4,6 \text{ (roku)}.$$

Danou částku naspoříme za 4,6 roku, což jsou asi 4 roky a 7 měsíců.

6.4 Dlouhodobé polhůtní spoření

Předpoklady:
spoříme částku a Kč na konci úrokového období po dobu n úrokových období při neměnné úrokové míře i, úrok je připsán na konci každého úrokového období.

Odvození naspořené částky

Naspořenou částku pro dlouhodobé polhůtní spoření budeme značit S a pro její výpočet opět použijeme složené úročení. Postup odvození zachycuje tabulka 24.

Hodnoty ve třetím sloupci tabulky tvoří geometrickou posloupnost s kvocientem $1+i$. Sečtením těchto hodnot dostaneme opět výši naspořené částky:

$$S = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}. \tag{31}$$

Výraz $\frac{(1+i)^n-1}{i}$ se nazývá **střadatel polhůtní**, značíme jej s_n^i a můžeme jej interpretovat jako naspořenou částku, kterou získáme, spoříme-li na konci každého úrokového období jednu korunu po dobu n úrokových období při úrokové míře i.

Zkrácený zápis rovnice (31): $S = a \cdot s_n^i$.

Příklad 6.4.1
Kolik naspoříme za 5 let, ukládáme-li pravidelně koncem každého roku částku 20 000 Kč při roční úrokové míře 5%?

Řešení:
Naspořenou částku vypočteme podle vztahu (31)

$$S = 20000\frac{(1+0,05)^5 - 1}{0,05} = 110512,60 \text{ (Kč)}.$$

Za 5 let při daných podmínkách naspoříme 110 512,60 Kč.

Výpočet splátky

$$a = \frac{Si}{(1+i)^n - 1}$$

Výpočet délky doby spoření

$$S = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\frac{Si}{a} + 1 = (1+i)^n$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{Si}{a} + 1\right)}{\ln(1+i)} \tag{32}$$

Poznámka:
Délka doby, po kterou se spoří, opět nemusí vyjít ve formě celého čísla.

Příklad 6.4.2
Za jak dlouho naspoříme 100 000 Kč, ukládáme-li koncem každého roku 20 000 Kč při roční úrokové míře 3%?

Řešení:
Použijeme vztah (32):

$$n = \frac{\ln\left(\frac{100000 \cdot 0{,}03}{20000} + 1\right)}{\ln(1 + 0,03)} = 4,73 \text{ (roku)}.$$

Danou částku naspoříme za 4,73 roku, což jsou asi 4 roky a 9 měsíců.

Vztah mezi střadatelem předlhůtním a polhůtním:

$$s\prime^{i}_{n} = (1 + i)s^{i}_{n}.$$

6.5 Kombinace krátko- a dlouhodobého spoření

Předpoklady:
částku ve výši x Kč ukládáme m-krát za zvolené úrokové období (opět nejčastěji roční) po dobu n úrokových období při neměnné úrokové míře i, vztažené ke zvolenému úrokovému období. Podle toho, jestli spoříme počátkem nebo na konci každé m-tiny úrokového období, rozlišujeme předlhůtní a polhůtní případ kombinovaného spoření.

Princip odvození naspořených částek:
Do konce prvního úrokového období naspoříme na principu krátkodobého spoření částky $S\prime_x$ nebo S_x. Na obě částky pak pohlížíme jako na úložky při dlouhodobém polhůtním spoření trvajícím n úrokových období, proto částku a ve vzorcích (29), (31) nahradíme částkami $S\prime_x$ a S_x.
Vztahy pro naspořenou částku při kombinovaném spoření mají pak tvar

Předlhůtní spoření

$$S\prime = mx\left(1 + \frac{m+1}{2m}i\right)\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Polhůtní spoření

$$S = mx\left(1 + \frac{m-1}{2m}i\right)\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Příklad 6.5.1
Kolik naspoříme za 5 let, ukládáme-li pravidelně a) počátkem, b) koncem každého čtvrtletí částku 5 000 Kč při roční úrokové míře 5%?

Řešení:
a) Použijeme vztah pro předlhůtní případ, kde $m = 4$:

$$S\prime = 4 \cdot 5000 \left(1 + \frac{5}{8} 0,05\right) \frac{1,05^5 - 1}{0,05} = 113966,10 \text{ (Kč)}.$$

b) V tomto, polhůtním případě máme

$$S = 4 \cdot 5000 \left(1 + \frac{3}{8} 0,05\right) \frac{(1,05)^5 - 1}{0,05} = 112584,70 \text{ (Kč)}.$$

Za 5 let při daných podmínkách naspoříme v případě a) 113 966,10 Kč a v případě b) 112 584,70 Kč.

Shrnutí:

Krátkodobé spoření:

- spoříme po dobu jednoho úrokového období, proto je délka intervalu mezi dvěma úložkami menší než úrokové období.

Dlouhodobé spoření:

- spoříme po dobu více úrokových období,
- délka intervalu mezi dvěma úložkami je rovna právě jednomu úrokovému období.

Kombinované spoření:

- spoříme po dobu více úrokových období,
- délka intervalu mezi dvěma úložkami je menší než jedno úrokové období.

Úlohy k procvičení:

1. Kolik naspoříme a) do konce roku, b) do konce prvního čtvrtletí, ukládáme-li počátkem každého měsíce 1 500 Kč při úrokové míře 3% p.a.? V případě b) uvažujeme čtvrtletní připisování úroků.
(18 292,50 Kč; 4 522,50 Kč)

2. Kolik naspoříme za 5 let, ukládáme-li a) počátkem, b) koncem každého roku 20 000 Kč? Úroková míra činí 3% p.a., úroky jsou připisovány na konci roku.
(109 368,20 Kč; 106 182,70 Kč)

3. Za 5 let chceme koupit nový automobil v ceně 750 000 Kč. Kolik musíme spořit a) počátkem, b) koncem každého roku při úrokové míře 12% p.a., abychom si automobil mohli pořídit?
(105 408,30 Kč; 118 057,30 Kč)

4. Jakou částku uspoříme na konci roku, jestliže ukládáme koncem každého čtvrtletí částku 5 000 Kč při úrokové míře 3% p.a.? Uvažujte čtvrtletní připisování úroků.
(20 226,10 Kč)

5. Jakou částku naspoří čtyřčlenná rodina za 6 let, ukládají-li její členové počátkem každého měsíce částky 2 500 Kč, 2 000 Kč, 1 500 Kč a 1 000 Kč při úrokové míře 3% p.a.?
(552 175,80 Kč)

6. Jak dlouho budeme spořit 1 000 Kč koncem každého měsíce, chceme-li si našetřit na nové kolo v ceně 15 000 Kč? Úroková míra je 3% p.a. s měsíčním úročením.
(1,23 let)

7 Důchody

Studijní cíle:
V této kapitole poznáte různé typy důchodů a naučíte se počítat jejich současné hodnoty a v některých případech i jejich budoucí hodnoty.

Pod pojmem důchod ve finanční matematice rozumíme systém periodicky vyplácených plateb. U důchodů nás zajímá především jeho **současná hodnota (present value)** PV, která je rovna součtu všech budoucích plateb diskontovaných k dnešnímu datu. Někdy se zjišťuje **budoucí hodnota (future value)** důchodu, označená FV, jakožto součet budoucích hodnot všech výplat. K pojmenování výplaty u důchodu lze též použít pojem **anuita**. **Výplatním obdobím** rozumíme období mezi dvěma výplatami. Může být stejně dlouhé jako úrokové období nebo může být kratší.

Klasifikace důchodů:

- **podle celkové doby výplat**
  - důchod dočasný,
  - důchod věčný;
- **podle toho, je-li výplata uskutečněna na začátku či na konci pravidelného intervalu**
  - důchod předlhůtní,
  - důchod polhůtní;
- **podle toho, odkdy se s výplatami začíná**
  - důchod bezprostřední,
  - důchod odložený;
- **podle toho, je-li výplatní období dlouhé právě jeden rok nebo je kratší než jeden rok**
  - důchod roční,
  - důchody področní.

7.1 Důchod dočasný

Vyplácení dočasného důchodu je časově omezené a obecně lze předpokládat n výplatních období.

Tabulka 25: Odvození současné hodnoty bezprostředního předlhůtního důchodu

Pořadí výplaty	Současná hodnota
1	a
2	$a \cdot v$
3	$a \cdot v^2$
.	.
.	.
.	.
n	$a \cdot v^{n-1}$

7.1.1 Důchod bezprostřední předlhůtní roční

Předpoklady:
Slovo bezprostřední v nadpise značí, že s vyplácením anuit ve výši a Kč se začne ihned. Dále předpokládáme, že anuita je vyplácena počátkem každého roku při roční neměnné úrokové míře i (s ročním úročením). Výplatní období je tedy jeden rok a je shodné s úrokovým obdobím.

Současná hodnota důchodu

Současná hodnota je odvozena v tabulce 25.

Sečtením hodnot v pravém sloupci tabulky dostaneme **současnou hodnotu důchodu** PV:

$$PV = a\frac{1-v^n}{1-v} = a\frac{1-v^n}{d} = a(1+i)\frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{i}, \tag{33}$$

kde $v = \frac{1}{1+i}$ je diskontní faktor z kapitoly 4 a $d = \frac{i}{1+i}$ je diskontní míra z kapitoly 2.2, viz vzorec (9) pro $t = 1$. Výraz $\frac{1-v^n}{d}$ se jmenuje **zásobitel předlhůtní**, značíme jej $a{\prime}_n^i$ nebo $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ a lze jej interpretovat jako současnou hodnotu důchodu s anuitami ve výši 1 Kč vyplácenými počátkem každého roku po dobu n let při úrokové míře i.

Zkrácený zápis pro vztah (33): $PV = a \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|} = a \cdot a{\prime}_n^i$.

Budoucí hodnota důchodu:

$$FV = a(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Tabulka 26: Odvození současné hodnoty bezprostředního polhůtního důchodu

Pořadí výplaty	Současná hodnota
1	av
2	$a \cdot v^2$
3	$a \cdot v^3$
.	.
.	.
.	.
n	$a \cdot v^n$

Budoucí hodnota důchodu je rovna součtu anuit úročených na konec n-tého výplatního období. Současně též vyjadřuje hodnotu naspořené částky pro dlouhodobé předlhůtní spoření. Pro výraz $(1+i)\frac{(1+i)^n-1}{i}$ existuje druhé označení (první bylo $s\prime^i_n$), a sice $\ddot{s}_{\overline{n}|}$.

Příklad 7.1.1.1

Vypočtěte současnou hodnotu důchodu vypláceného vždy počátkem roku po dobu 5 let. S výplatami, které činí 1 200 Kč, začneme hned. Úroková míra činí 5% p.a.

Řešení:

Současnou hodnotu zjistíme ze vztahu (33):

$$PV = 1200(1+0,05)\frac{1-\frac{1}{(1+0,05)^5}}{0,05} = 5455,10\ (\text{Kč}).$$

Současná hodnota důchodu činí 5 455,10 Kč. Jinými slovy, abychom mohli na počátku každého roku po dobu 5 let pobírat důchod ve výši 1 000 Kč, musíme teď složit částku 5 455,10 Kč.

7.1.2 Důchod bezprostřední polhůtní roční

Předpoklady:

Pro tento důchod předpokládáme, že částka a Kč je vyplácena koncem každého roku při neměnné úrokové míře i, s výplatami se začíná odteď.

Současná hodnota důchodu

Současná hodnota je odvozena v tabulce 26.

Sečtením hodnot v pravém sloupci tabulky dostaneme **současnou hodnotu důchodu**:

$$PV = a\frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} = a\frac{1 - v^n}{i}. \tag{34}$$

Výraz $\frac{1-v^n}{i}$ se jmenuje **zásobitel polhůtní**, značíme ho a_n^i nebo $a_{\overline{n}|}$ a lze jej interpretovat jako současnou hodnotu důchodu s anuitami ve výši 1 Kč vyplácenými koncem každého roku po dobu n let při úrokové míře i.

Zkrácený zápis pro vztah (34): $PV = a \cdot a_{\overline{n}|} = a \cdot a_n^i$.

Budoucí hodnota důchodu:

$$FV = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Budoucí hodnota důchodu je rovna naspořené částce u dlouhodobého polhůtního spoření. Pro výraz $\frac{(1+i)^n-1}{i}$ existuje též druhé označení (první bylo s_n^i), a sice $s_{\overline{n}|}$.

Příklad 7.1.2.1
Vypočtěte současnou hodnotu důchodu vypláceného vždy koncem roku po dobu 5 let. S výplatami, které činí 1 200 Kč, začneme hned. Úroková míra činí 5% p.a.

Řešení:
Současnou hodnotu zjistíme ze vztahu (34):

$$PV = 1200\frac{1 - \frac{1}{(1+0,05)^5}}{0,05} = 5195,40 \text{ (Kč)}.$$

Současná hodnota důchodu činí 5 195,40 Kč.

Výpočet počtu výplatních období n:

Ze vzorce (34) pro n dostaneme

$$n = -\frac{\ln(1 - \frac{PVi}{a})}{\ln(1+i)}.$$

Aby měl výraz v čitateli zlomku smysl, musí platit $1 - \frac{PVi}{a} > 0$, odtud je

$$a > PV \cdot i. \tag{35}$$

Hodnoty n tedy jsou

$$n = \begin{cases} -\frac{\ln(1-\frac{PV \cdot i}{a})}{\ln(1+i)} & \text{je-li } a > PV \cdot i, \\ \infty & \text{je-li } a \leq PV \cdot i. \end{cases} \tag{36}$$

Příklad 7.1.2.2
Jak dlouho budeme pobírat důchod ve výši 500 Kč vždy na konci roku při úrokové míře 5% p.a., je-li jeho současná hodnota a) 9 000 Kč, b) 11 000 Kč?

Řešení:
Nejdříve ověříme podmínku (35) dosazením za příslušné hodnoty:

a) $500 > 450$, podmínka je splněna a dobu, po kterou se bude důchod vyplácet, můžeme spočítat.
b) $500 < 550$, podmínka splněna není a tedy důchod by byl vyplácen nekonečně dlouho.

Teď vypočteme u případu a) dobu vyplácení. Podle vztahu (36) dostaneme

$$n = -\frac{\ln(1 - \frac{9000 \cdot 0{,}05}{500})}{\ln(1 + 0{,}05)} = 47 \text{ (let)}.$$

Důchod bude vyplácen po dobu 47 let.

7.1.3 Důchod bezprostřední předlhůtní področní

Předpoklady:
Částka a Kč je vyplácena od nynějška počátkem každé m-tiny roku při neměnné nominální (roční) úrokové míře i, přičemž úrok je připsán m-krát za rok, výplatní období je právě jedna m-tina roku. Výplatní a úrokové období mají opět stejnou délku.

Současná hodnota důchodu
Současnou hodnotu bezprostředního předlhůtního področního důchodu za daných předpokladů vypočteme analogicky jako u bezprostředního předlhůtního ročního důchodu s tím, že úrokovou míru vydělíme frekvencí m úročení (místo i budeme psát $\frac{i}{m}$) a pro celkový počet výplatních období vezmeme hodnotu mn. **Současná hodnota** področního důchodu tedy je

$$PV = a\frac{1 - (\frac{1}{1+\frac{i}{m}})^{mn}}{1 - \frac{1}{1+\frac{i}{m}}} = a(1 + \frac{i}{m})\frac{1 - (\frac{1}{1+\frac{i}{m}})^{mn}}{\frac{i}{m}}, \tag{37}$$

kde výraz $\frac{1-(\frac{1}{1+\frac{i}{m}})^n}{1-\frac{1}{1+\frac{i}{m}}}$ se značí symbolem $\ddot{a}_{\overline{mn}|\frac{i}{m}}$ a můžeme jej interpretovat jako současnou hodnotu jednotkového důchodu vypláceného počátkem každé m-tiny roku po dobu n let při úrokové míře i.

Zkrácený zápis pro současnou hodnotu: $PV = a \cdot \ddot{a}_{\overline{mn}|\frac{i}{m}}$.

Pro výpočet současné a budoucí hodnoty tohoto področního důchodu je možné uvažovat též roční připisování úroků. V tomto případě bude úrokové období roční, ale výplatní období zůstane rovné jedné m-tině roku. Odvození současné a budoucí hodnoty pak vychází z následující úvahy:
anuity vyplacené počátkem každé m-tiny přepočítáme pomocí jednoduchého úročení ke konci roku tak, jako kdybychom počítali naspořenou částku při krátkodobém spoření. Tuto naspořenou částku pak dále považujeme za anuitu polhůtního ročního důchodu a s využitím složeného diskontování (úročení) pak určíme současnou (budoucí) hodnotu področního důchodu. Matematická formulace této úvahy pro obě hodnoty se uvádí v podobě přibližného vztahu ve tvaru:

Současná hodnota důchodu

$$PV \doteq ma\left(1 + \frac{m+1}{2m}i\right)\frac{1-v^n}{i} = ma(1 + \frac{m+1}{2m}i)a_{\overline{n}|i} \tag{38}$$

Budoucí hodnota důchodu

$$FV \doteq ma(1 + \frac{m+1}{2m}i)s_{\overline{n}|i}.$$

Příklad 7.1.3.1
Vypočtěte současnou hodnotu důchodu 100 Kč vypláceného počátkem každého měsíce po dobu 5 let při úrokové míře 5% p.a. s měsíčním i ročním úročením.

Řešení:
Pro měsíční úročení využijeme vztah (37), kde $m = 12$:

$$PV = 100\frac{1-(\frac{1}{1+\frac{0,05}{12}})^{60}}{1-\frac{1}{1+\frac{0,05}{12}}} = 5321,10 \text{ (Kč)}.$$

Pro roční úročení využijeme vztah (38):

$$PV = 12 \cdot 100 \left(1 + \frac{13}{24} 0,05\right) \frac{1 - (\frac{1}{1,05})^5}{0,05} = 5336,10 \text{ (Kč)}.$$

Současná hodnota daného měsíčního důchodu je v případě měsíčního úročení 5 321,10 Kč, v případě ročního úročení činí 5 336,10 Kč. U prvního případu je současná hodnota nižší. Je to proto, že častějším úročením se zvyšuje částka, z níž je vyplácen důchod, i v průběhu roku. Na začátku roku tedy stačí uložit nižší kapitál než v případě ročního úročení.

7.1.4 Důchod bezprostřední polhůtní področní

Předpoklady:
Částka a Kč je vyplácena od nynějška koncem každé m-tiny roku při neměnné nominální úrokové míře i, výplatní i úrokové období jsou rovny právě jedné m-tině roku.

Současná hodnota důchodu
Současnou hodnotu bezprostředního polhůtního področního důchodu za daných předpokladů vypočteme opět analogicky jako u bezprostředního polhůtního ročního důchodu. **Současná hodnota** področního důchodu tedy je

$$PV = a \frac{1 - (\frac{1}{1+\frac{i}{m}})^{mn}}{\frac{i}{m}}, \tag{39}$$

kde výraz $\frac{1-(\frac{1}{1+\frac{i}{m}})^n}{\frac{i}{m}}$ se značí symbolem $a_{\overline{mn}|\frac{i}{m}}$ a můžeme jej interpretovat jako současnou hodnotu jednotkového důchodu vypláceného koncem každé m-tiny roku po dobu n let při úrokové míře i.

Zkrácený zápis pro současnou hodnotu: $PV = a \cdot a_{\overline{mn}|\frac{i}{m}}$.

Při odvození současné a budoucí hodnoty področního polhůtního důchodu v případě ročního úročení uplatníme obdobné úvahy jako u předlhůtního področního důchodu. Výsledkem jsou opět přibližné vztahy:

Současná hodnota důchodu

$$PV \doteq ma \left(1 + \frac{m-1}{2m} i\right) \frac{1 - v^n}{i} = ma(1 + \frac{m-1}{2m} i) a_{\overline{n}|i} \tag{40}$$

Budoucí hodnota důchodu

$$FV \doteq ma(1 + \frac{m-1}{2m} i) s_{\overline{n}|i}$$

Příklad 7.1.4.1
Vypočtěte současnou hodnotu důchodu 100 Kč vypláceného vždy koncem každého měsíce po dobu 5 let při úrokové míře 5% p.a. s měsíčním i ročním úročením.

Řešení:
Pro měsíční úročení využijeme vztah (39), kde $m = 12$:

$$PV = 100 \frac{1 - (\frac{1}{1+\frac{0,05}{12}})^{60}}{\frac{0,05}{12}} = 5299,10 \text{ (Kč)}.$$

Pro roční úročení použijeme vztah (40):

$$PV = 12 \cdot 100 \left(1 + \frac{11}{24} 0,05\right) \frac{1 - \frac{1}{1,05}^5}{0,05} = 5314,40 \text{ (Kč)}.$$

Současná hodnota daného měsíčního důchodu v případě měsíčního úročení činí 5 299,10 Kč, v případě ročního úročení pak 5 314,40 Kč. Současná hodnota v prvém případě je nižší, opět ze stejných důvodů jako u předlhůtního področního důchodu. Současné hodnoty polhůtních důchodů jsou nižší než současné hodnoty odpovídajících si předlhůtních důchodů, neboť než dojde k první polhůtní výplatě, zúročí se vložený kapitál ještě o jedno úrokové období. Opět tedy stačí vložit pro polhůtní důchod nižší kapitál než v případě předlhůtního důchodu.

Jestliže budeme zkracovat výplatní období délky $\frac{1}{m}$ až na nulu, dostaneme případ **spojitého důchodu**, pro jehož současnou a budoucí hodnotu platí:

$$PV = a \int_0^n e^{-it} dt = \frac{a}{i}(1 - e^{-in}),$$
$$FV = a \int_0^n e^{it} dt = \frac{a}{i}(e^{in} - 1).$$

7.2 Důchod věčný

V tomto případě jsou anuity v hodnotě a Kč vypláceny v pravidelných intervalech stále (teoreticky do nekonečna). Z toho důvodu je věčný důchod limitním případem příslušného dočasného důchodu. Výpočty současných hodnot věčných důchodů lze provést dvěma způsoby. Zde uvedeme pouze vztahy pro výpočet současné hodnoty věčného bezprostředního ročního důchodu předlhůtního a polhůtního, při neměnné roční úrokové míře i.

Pro **předlhůtní věčný důchod** platí

$$PV = a + av + av^2 + \cdots = a\frac{1}{1-v} = \frac{a(1+i)}{i} = \frac{a}{d},$$

kde $d = \frac{i}{1+i}$ je diskontní míra z kapitoly 2.2, viz opět vzorec (9) pro $t = 1$.

Jiný přístup k odvození současné hodnoty je pomocí limity:

$$PV = \lim_{n\to\infty} a\frac{1-v^n}{d} = \frac{a}{d}.$$

Pro **polhůtní věčný důchod** dostaneme vztahy

$$PV = av + av^2 + \cdots = av\frac{1}{1-v} = \frac{a}{i},$$

nebo

$$PV = \lim_{n\to\infty} a\frac{1-v^n}{i} = \frac{a}{i}.$$

Příklad 7.2.1
Vypočtěte současnou hodnotu věčného důchodu 1 200 Kč vypláceného a) počátkem, b) koncem každého roku při úrokové míře 5% p.a.

Řešení:
a)

$$\frac{1200\ (1+0,05)}{0,05} = 25200\ (\text{Kč}),$$

b)

$$\frac{1200}{0,05} = 24000\ (\text{Kč}).$$

Současné hodnoty věčných důchodů činí 25 200 a 24 000 Kč.

Využití věčného důchodu:
Věčné důchody nacházejí uplatnění při výpočtu ceny konzoly, což je obligace s časově neomezeným vyplácením kupónových plateb nebo při výpočtu vnitřní hodnoty akcie, kde se předpokládá časově neomezené vyplácení dividend. Blíže k této problematice viz kapitoly 9 a 10.

7.3 Důchod odložený

Na rozdíl od bezprostředního důchodu zde budeme předpokládat k výplatních období, o které bude první výplata důchodu opožděna. Současnou hodnotu odloženého důchodu získáme diskontováním současné hodnoty příslušného bezprostředního důchodu o dobu odkladu. V případě področních důchodů je třeba diskontovat o km výplatních období.

Příklady odložených důchodů a jejich současné hodnoty

1. *odložený dočasný roční předlhůtní důchod*

$$PV = av^k \frac{1-v^n}{d} = a\ {}_{k|}\ddot{a}_{\overline{n}|}$$

2. *odložený dočasný roční polhůtní důchod*

$$PV = av^k \frac{1-v^n}{i} = a\ {}_{k|}a_{\overline{n}|}$$

3. *odložený dočasný področní předlhůtní důchod*

$$PV = av^{km} \frac{1-\left(\frac{1}{1+\frac{i}{m}}\right)^{mn}}{1-\frac{1}{1+\frac{i}{m}}}$$

nebo

$$PV \doteq mav^k(1+\frac{m+1}{2m}i)a_{\overline{n}|i}$$

4. *odložený dočasný področní polhůtní důchod*

$$PV = av^{km} \frac{1-\left(\frac{1}{1+\frac{i}{m}}\right)^{mn}}{\frac{i}{m}}$$

nebo

$$PV \doteq mav^k(1+\frac{m-1}{2m}i)a_{\overline{n}|i}$$

5. *odložený věčný předlhůtní důchod*

$$PV = \frac{av^k}{d}$$

6. *odložený věčný polhůtní důchod*

$$PV = \frac{av^k}{i}$$

Příklad 7.3.1
Řešte předchozí příklad s tím, že výplata první anuity bude odložena o 2 roky.

Řešení:
a)

$$(\frac{1}{1+0,05})^2 \frac{1200(1+0,05)}{0,05} = 22857,10 \text{ (Kč)},$$

b)

$$(\frac{1}{1+0,05})^2 \frac{1200}{0,05} = 21768,70 \text{ (Kč)}.$$

Současné hodnoty věčných důchodů činí 22 857,10 a 21 768,70 Kč.

Úlohy k procvičení:

1. Vyhráli jste v soutěži a můžete si vybrat:
   a) okamžitě dostat 380 000 Kč,
   b) po dobu 5 let získávat ročně 82 000 Kč.
   Která z variant je výhodnější, lze-li peníze investovat při úrokové míře 3% p.a.? Variantu b) spočítejte pro předlhůtní i polhůtní případ.
   (Jestliže uvažujeme u varianty b) předlhůtní výplaty, pak je tato varianta výhodnější. Jestliže uvažujeme u varianty b) polhůtní výplaty, pak je výhodnější varianta a).)

2. Kolik zaplatíme za investici, jejíž životnost je 20 let a koncem každého roku nám z ní plyne platba ve výši 16 000 Kč? Uvažujte roční úrokovou míru 6% p.a.
   (183 518,70 Kč)

3. Kolik musíme spořit počátkem každého pololetí po dobu pěti let při úrokové míře 3% p.a., abychom pak mohli pobírat počátkem každého čtvrtletí důchod 5 000 Kč po dobu 20 let při úrokové míře 2% p.a. s ročním úročením?
   (14 123,90 Kč)

4. Jak dlouho budeme splácet dluh ve výši 40 000 Kč rozepsaný do polhůtních čtvrtletních splátek ve výši 10 000 Kč při úrokové míře 9% p.a. se čtvrtletním úročením?
   (1,06 roku)

5. Jak velkou částku musíme složit v bance v době narození našeho potomka, chceme-li mu zajistit pravidelný důchod ve výši 2 000 Kč, který bude pobírat vždycky počátkem každého měsíce po dobu 5 let? S výplatami důchodu se začne po dosažení věku 19 let. Úroková míra je 5% p.a. Úlohu řešte pro roční i měsíční úročení.
   (při ročním úročení 42 233,40 Kč, při měsíčním úročení 41 239,50 Kč)

6. Zákazník chce koupit nemovitost za 150 000 Kč. Při uzavření smlouvy zaplatí 15 000 Kč hotově, zbytek má zaplatit v měsíčních polhůtních splátkách za 10 let. Kolik bude činit splátka při roční úrokové míře 6% s ročním i měsíčním úročením?
   (při ročním úročení 1 487,60 Kč; při měsíčním úročení 1 498,80 Kč)

7. Prodejem domu jsme získali 3 000 000 Kč, které jsme následně uložili při úrokové míře 5% p.a. s měsíčním úročením. Z uložené částky začneme ihned pobírat počátkem každého měsíce důchod ve výši a) 25 000 Kč, b) 11 500 Kč. Za jak dlouho vklad vybereme a jaký bude poslední výběr?
   (a) 13,8 let; 17 729,30 Kč; b) vklad nikdy nevybereme)

8. Jaká částka dnes složená nám zajistí důchod ve výši 2 500 Kč, který bude vyplácen vždy koncem roku při úrokové míře 3% p.a. až do konce našeho života? Řešte i pro případ, že důchod bude vyplácen na počátku roku.
   (83 333,30 Kč; 85 833,30 Kč)

9. Je nám 30 let a chceme si spořit na starobní penzi. Předpokládáme, že budeme počátkem každého měsíce ukládat částku 600 Kč po dobu 35 let při úrokové míře 4% p.a. s ročním připisováním úroků. Jaký důchod budeme pobírat počátkem každého roku počínaje dosažením věku 65 let až do konce života při stejné úrokové míře?
   (20 837,90 Kč)

8 Splácení úvěrů

Studijní cíle:
V této kapitole využijeme poznatky z předchozí kapitoly o důchodech a uplatníme je v problematice splácení úvěrů. Naučíte se, jak se vypočítá doba splácení a poslední splátka úvěru a naučíte se též vytvářet splátkový kalendář. Zjistíte, jak se vypočtou výše splátek hypotéčního úvěru.

V této kapitole budeme předpokládat, že dluh ve výši D bude splácen ihned, polhůtními ročními anuitami ve výši a při neměnné roční úrokové míře i po dobu n let. Ve splátce (a) je zahrnut **úrok** (U) vypočtený z posledního stavu dluhu a **úmor** (M). To je částka, která se skutečně odečte od posledního stavu dluhu. Pro splátku pak platí vztah

$$a = U + M.$$

Vzhledem k tomu, že dlužník splácí úvěr věřiteli obvykle v pravidelných (zde ročních) intervalech, lze proces splácení přirovnat k vyplácení anuit důchodu. V případě vyplácení je věřitelem např. majitel kupónové obligace, kterému banka v roli dlužníka vyplácí jednotlivé kupónové platby. Cena obligace je v určitém případě též přímo rovna součtu diskontovaných budoucích plateb. Výše dluhu (cena obligace) zde tedy hraje stejnou úlohu jako současná hodnota důchodu. Proto při výpočtu hodnoty splátky úvěru budeme počáteční dluh považovat za současnou hodnotu důchodu, podle předpokladů výše se bude jednat o dočasný bezprostřední polhůtní roční důchod. Hodnotu splátky tedy získáme ze vztahu (34), tj.

$$a = \frac{PVi}{1 - v^n},$$

kde $PV = D$.

Průběh splácení dluhu se zapisuje do tabulky zvané **umořovací plán** nebo též **splátkový kalendář**. Plán obsahuje pět sloupců, v nichž je uvedeno období (rok), výše splátky, úroku a úmoru v příslušném období a stav dluhu na konci období. Počet řádků v plánu je dán počtem období, kdy je dluh splácen.

8.1 Splácení dluhu splátkami stejné výše

Je-li dluh splácen stejně vysokými splátkami, pak můžeme sloupec pro splátku v umořovacím plánu (viz tabulku 27) vyplnit ihned. Úrok pro každé období spočteme podle vztahu

Tabulka 27: Umořovací plán pro splácení dluhu stejnými splátkami

Rok	Splátka	Úrok	Úmor	Stav dluhu
0	-	-	-	$D = a.a_{\overline{n}\vert}$
1	a	$a(1 - v^n)$	av^n	$a \cdot a_{\overline{n-1}\vert}$
2	a	$a(1 - v^{n-1})$	av^{n-1}	$a \cdot a_{\overline{n-2}\vert}$
3	a	$a(1 - v^{n-2})$	av^{n-2}	$a \cdot a_{\overline{n-3}\vert}$
.	.	.	.	.
$n-1$	a	$a(1 - v^2)$	av^2	$a \cdot a_{\overline{1}\vert}$
n	a	$a(1 - v)$	av	0
$\sum$	na	$na - D$	D	-

$$U_j = i \cdot D_{j-1},$$

kde $U_j, j = 1, \ldots, n$ značí úrok v j-tém období a D_{j-1} stav dluhu v předchozím, $(j-1)$-tém období. Výše úmoru pro každé období je dána rozdílem mezi splátkou a úrokem v témže období, neboli

$$M_j = a - U_j, \quad j = 1, \ldots, n,$$

kde M_j označuje úmor v j-tém období. Stav dluhu pro každé období se vypočte jako rozdíl předchozího stavu dluhu a úmoru v současném období, tj.

$$D_j = D_{j-1} - M_j, \quad j = 1, \ldots, n,$$

kde D_{j-1} je předchozí stav dluhu, M_j je úmor v současném období a D_j je nový stav dluhu.

Do posledního řádku splátkového kalendáře bývá zvykem uvést celkovou sumu zaplacenou za úvěr (ve sloupci pro splátku), celkově zaplacené úroky (ve sloupci pro úroky) a součet úmorů za jednotlivé roky. Ten musí být roven právě výši dluhu. Symboly $a_{\overline{n}|}, a_{\overline{n-1}|}, \ldots$, v posledním sloupci označují zásobitele pro zbývající počty roků splácení, tj. pro $n, n-1, \ldots, 1$ roků.

V praxi často nastane případ, že **poslední splátka** je menší než všechny předchozí. Tuto nižší splátku b uhradíme v n-tém roce. Pro současnou hodnotu úvěru tedy platí

$$D = av + av^2 + \ldots + av^{n-1} + bv^n. \tag{41}$$

Tabulka 28: Umořovací plán

Rok	Splátka	Úrok	Úmor	Stav dluhu
0	-	-	-	500 000
1	90 000	31 500	58 500	441 500
2	90 000	27 814,50	62 185,50	379 314,50
3	90 000	23 896,80	66 103,20	313 211,30
4	90 000	19 732,30	70 267,70	242 943,60
5	90 000	15 305,40	74 694,60	168 249
6	90 000	10 599,70	79 400,30	88 848,70
7	90 000	5 597,50	84 402,50	4 446,20
8	4 726,30	280,10	4 446,20	-
Σ	634 726,30	134 726,3	500 000	-

Počet roků, po které je úvěr splácen, určíme ve formě celého čísla ze vztahu (34):

$$n-1=\lfloor\frac{\ln(1-\frac{D\cdot i}{a})}{\ln v}\rfloor.$$

Pro počet roků splácení použijeme ve vzorci symbol $n-1$ místo n z důvodu stejného značení použitého v rovnici (41). Symbolem $\lfloor x\rfloor$ označujeme celoučást čísla x.
Pro výši **poslední splátky** máme

$$b=\frac{D-a\frac{1-v^{n-1}}{i}}{v^n}.$$

Příklad 8.1.1
Úvěr 500 000 Kč má být umořen polhůtními ročními splátkami ve výši 90 000 Kč při úrokové míře 6,3% p.a. Určete počet anuit, výši poslední splátky a sestavte umořovací plán.

Řešení:
Počet anuit je dán počtem roků, po které budeme splácet dluh. Nejprve bychom měli ověřit, jestli lze daný dluh vůbec splatit, viz podmínku (35). Délku doby splácení vypočteme ze vztahu (36):

$$n-1=\lfloor\frac{\ln(1-\frac{500000\cdot 0{,}063}{90000})}{\ln(\frac{1}{1{,}063})}\rfloor=7\ (\text{let}).$$

Tedy úvěr budeme splácet 7 let ve splátkách 90 000 Kč. Poslední, osmý rok uhradíme zbytek dluhu poslední splátkou b, kterou vypočteme ze vztahu (41).

$$b = \frac{500000 - 90000\frac{1-(\frac{1}{1{,}063})^7}{0{,}063}}{(\frac{1}{1{,}063})^8} = 4726,40 \text{ (Kč)}.$$

Sestavíme umořovací plán, viz tabulku 28. Uvedené částky jsou v korunách. V řádku pro osmý rok splácení je pod splátkou uvedena hodnota 4 726,30 Kč. Při výpočtu poslední splátky vyšlo 4 726,40 Kč. Rozdíl mezi oběma částkami, byť nepatrný, vznikl při zaokrouhlování při sestavování umořovacího plánu.

8.2 Umořování dluhu konstantním úmorem

V tomto případě bude v každém období umořena stejná část dluhu. Výši úmoru M pak vypočteme vydělením celkové hodnoty dluhu počtem let splácení (známe-li dobu splácení), tj.

$$M = \frac{D}{n}.$$

Umořovací plán, viz tabulku 29, bude vypadat stejně jako v předchozím případě, ale způsob jeho vyplnění bude odlišný. Především lze nejdřív vyplnit sloupec pro úmor a sloupec pro stav dluhu. Nové stavy dluhu postupně získáme odečítáním úmoru, neboli musí platit

$$D_j = D_{j-1} - M, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Potom vypočteme výše úroku pro každé období podle vztahu

$$U_j = i \cdot D_{j-1},$$

a nakonec určíme výši splátky sečtením úmoru a úroku v každém období, tj.

$$a_j = U_j + M.$$

V posledním řádku umořovacího plánu jsou opět uvedeny úhrnné hodnoty pro úrok a pro úmor a ve sloupci pro splátku celkově zaplacená částka.

Tabulka 29: Umořovací plán pro umořování dluhu konstantním úmorem

Rok	Splátka	Úrok	Úmor	Stav dluhu
0	-	-	-	$D = n\frac{D}{n}$
1	$\frac{D}{n}(in+1)$	$n \cdot \frac{D}{n} \cdot i$	$\frac{D}{n}$	$\frac{D}{n}(n-1)$
2	$\frac{D}{n}[i(n-1)+1]$	$(n-1)\frac{D}{n} \cdot i$	$\frac{D}{n}$	$\frac{D}{n}(n-2)$
3	$\frac{D}{n}[i(n-2)+1]$	$(n-2)\frac{D}{n} \cdot i$	$\frac{D}{n}$	$\frac{D}{n}(n-3)$
.	.	.	.	.
$n-1$	$\frac{D}{n}(2i+1)$	$2\frac{D}{n} \cdot i$	$\frac{D}{n}$	$\frac{D}{n}$
n	$\frac{D}{n}(i+1)$	$\frac{D}{n} \cdot i$	$\frac{D}{n}$	0
$\sum$	$D\left(\frac{n+1}{2} \cdot i + 1\right)$	$D\frac{n+1}{2} \cdot i$	D	-

Tabulka 30: Umořovací plán

Rok	Splátka	Úrok	Úmor	Stav dluhu
0	-	-	-	490 000
1	94 500	24 500	70 000	420 000
2	91 000	21 000	70 000	350 000
3	87 500	17 500	70 000	280 000
4	84 000	14 000	70 000	210 000
5	80 500	10 500	70 000	140 000
6	77 000	7 000	70 000	70 000
7	73 500	3 500	70 000	-
Σ	588 000	98 000	490 000	-

Příklad 8.2.1
Máme splatit úvěr 490 000 Kč tak, že vždy na konci roku bude umořeno 70 000 Kč. Sestavte umořovací plán, je-li úroková míra 5% p.a.

Řešení:
Nejdříve vypočteme, jak dlouho budeme úvěr splácet. Vydělíme výši úvěru hodnotou úmoru, tj. 490 000/70 000 = 7. Splácet tedy budeme 7 let. Umořovací plán, viz tabulku 30, vytvoříme způsobem uvedeným u obecného případu výše.

8.3 Hypotéční úvěr

Hypotéční úvěr bývá poskytován v souvislosti s pořízením nemovitosti, která slouží jako zástava po dobu splácení úvěru. Velikost poskytnuté půjčky je v současné době až sto procent, dříve banky poskytovaly maximálně 70 pro-

Tabulka 31: Výše státní podpory vzhledem k úrokové míře

Úroková míra	Podpora
$> 10\%$	4%
$> 9\%$	3%
$> 8\%$	2%
$> 7\%$	1%
$< 7\%$	0

cent z kupní ceny nemovitosti. Úvěr se v současné době poskytuje na dobu 5-30 let a bývá obvykle splácen měsíčními anuitami, jejichž výši vypočteme ze vztahu (39), kde m = 12:

$$PV = a\frac{1-(\frac{1}{1+\frac{i}{12}})^{12n}}{\frac{i}{12}}. \tag{42}$$

Automaticky tedy předpokládáme měsíční úročení. Pokud jde o úrokovou míru, existuje dnes možnost zafixovat ji na určitý počet roků, konkrétně na 1-15 let, výjimečně až na 30 let. Za určitých podmínek lze využít státní podpory (dotace), jejíž výše, obvykle uváděná v procentech, závisí na velikosti úrokové míry pro hypotéční úvěry, viz tabulku 31.

Státní podpora se poskytuje na dobu maximálně 10 let a nemusí se vztahovat na celou výši půjčky. To záleží na typu pořizované nemovitosti a také na tom, je-li do půjčky zahrnuta též cena pozemku. Podpora se tedy vztahuje na hypotéční úvěry nebo jejich části, jejichž hodnota nepřekročí

- 1,5 mil. Kč na výstavbu nebo koupi rodinného domku s jedním bytem,
- 2 mil. Kč na výstavbu nebo koupi rodinného domku se dvěma byty,
- 12 000 Kč za 1 m^2 celkové podlahové plochy bytu, nejvýše však 800 000 Kč na jeden byt v bytovém domě s více než dvěma byty,
- 12 000 Kč za 1 m^2 celkové podlahové plochy bytu, nejvýše však 800 000 Kč na jeden byt, pokud přístavbou, vestavbou, půdní nástavbou nebo stavebními úpravami vznikne nový byt s podlahovou plochou nejméně 40 m^2.

V prvních třech případech je možné podporu uplatnit na částku zvýšenou o dalších 200 000 Kč, je-li hypotéční úvěr použit též na nákup pozemku, na němž se má nová nemovitost nacházet. Toto zvýšení platí bez ohledu na počet bytů v domě.

Výpočet splátky při uplatnění státní podpory

Označme D výši poskytnutého hypotéčního úvěru a D_p jeho část, na niž se bude uplatňovat státní podpora. Nechť i je úroková míra zafixovaná na celou dobu splácení úvěru po dobu n let a i_s je úroková míra snížená o procenta z přiznané podpory. Splátky úvěru budou realizovány vždy koncem každého měsíce. Pro hodnoty D a D_p platí:

$$D \geq D_p$$

Jestliže $D > D_p$, pak anuitu, která bude odpovídat části dluhu D_p, označíme a_p a vypočteme podle vztahu

$$a_p = \frac{D_p \frac{i_s}{12}}{1 - (\frac{1}{1+\frac{i_s}{12}})^{12n}} \tag{43}$$

a anuitu pro zbytek dluhu označíme symbolem a_b a vypočteme ze vzorce

$$a_b = \frac{(D - D_p)\frac{i}{12}}{1 - (\frac{1}{1+\frac{i}{12}})^{12n}}. \tag{44}$$

Celková splátka dluhu D bude mít hodnotu

$$a = a_p + a_b.$$

Jestliže $D = D_p$, pak splátka a bude přímo rovna hodnotě a_p.

Příklad 8.3.1

Chceme postavit rodinný dům se dvěma byty v ceně 5 miliónů Kč. Předpokládejme, že hypotéční banka nám půjčí jen 70% z této ceny a že úvěr budeme splácet 20 let. Vypočtěte měsíční anuitu, je-li roční úroková míra 8,9%, bez poskytnutí státní podpory a pro případ, že je poskytnuta podpora ve výši 2%.

Řešení:

Banka poskytne úvěr ve výši 70% z 5 miliónů Kč, tj. 3,5 miliónů Kč. V případě, že nebude poskytnuta státní podpora, vypočteme měsíční splátku podle vztahu (42):

$$a = \frac{3500000\frac{0,089}{12}}{1 - (\frac{1}{1+\frac{0,089}{12}})^{240}} = 31265,70 \text{ (Kč)}.$$

Vzhledem k tomu, že jde o výstavbu rodinného domu se dvěma byty, bude se státní podpora vztahovat pouze na částku 2 milióny Kč. Celý úvěr bude rozdělen na dvě části - 2 mil. Kč, na které je přiznána státní podpora, a 1,5 mil. Kč, na něž se žádná podpora nevztahuje. Splátku a_p odpovídající částce 2 mil. Kč vypočteme podle (43):

$$a_p = \frac{2000000\frac{0,069}{12}}{1-(\frac{1}{1+\frac{0,069}{12}})^{240}} = 15386,20 \text{ (Kč)}.$$

Splátku pro zbývající část dluhu, na nějž se podpora nevztahuje, určíme podle (44):

$$a_b = \frac{(3500000-2000000)\frac{0,089}{12}}{1-(\frac{1}{1+\frac{0,089}{12}})^{240}} = 13399,60 \text{ (Kč)}.$$

Výslednou splátku získáme sečtením obou výše vypočtených hodnot, její výše bude 28 785,80 Kč. To je o 3 537,50 Kč méně než v případě, že státní dotace nebyla poskytnuta vůbec.

Úlohy k procvičení:

1. Jaké budou úrokové náklady na splacení úvěru 500 000 Kč, splácíme-li dluh stejnými konstantními anuitami po dobu 10 let koncem každého měsíce při úrokové míře 12,5% p.a.?
   (378 257 Kč)

2. Úvěr 50 000 Kč má být splacen vždy na konci roku splátkami ve výši 10 000 Kč při neměnné úrokové míře 5% p.a. Určete délku doby splácení úvěru, velikost poslední splátky a sestavte umořovací plán.
   (doba splácení: 5,896 let, poslední splátka v 6. roce činí 5 985,65 Kč)

3. Řešte předchozí úlohu pro případ, že ze zůstatku dluhu bude vždy umořeno 10 000 Kč, tj. jde o splácení dluhu s konstantním úmorem. Jaká bude celkově zaplacená částka?
   (doba splácení: 5 let; celkově zaplacená částka 57 500 Kč)

4. Dluh 500 000 Kč budeme splácet po dobu 7 let při neměnné úrokové míře 6,3% p.a. způsobem, že v prvním roce bude umořeno 50 000 Kč a v každém následujícím roce vždy o 10 000 Kč více, úmor aritmeticky roste. Sestavte umořovací plán.
   Návod: úlohu řešte stejně jako v případě, že dluh umořujete stejným úmorem.
   (doba splácení: 10 let; celkově zaplacená částka 711 050 Kč)

5. Vypočtěte měsíční splátku hypotéčního úvěru 1 000 000 Kč splatného za 20 let při fixní úrokové míře 4,8% p.a. pro případ, že státní podpora poskytnuta není, a pro případ, že je poskytnuta jednoprocentní podpora na celou výši úvěru.
(6 489,50 Kč; 5 954,90 Kč)

6. Chceme stavět dům s jedním bytem, jehož cena bude podle odhadů asi 3 370 000 Kč. V hypotéční bance nám půjčili pouze 70% odhadované ceny s tím, že půjčku budeme splácet 20 let měsíčními splátkami při úrokové míře 7,99% p.a. Vypočtěte výši splátky. Určete výši splátky také pro případ, že byla poskytnuta státní podpora 2%.
(19 716,90 Kč; 17 917,50 Kč)

7. Zakreslete do grafu, jak se měnila výše měsíční splátky (bez dotace) z hypotéčního úvěru 1 000 000 Kč v závislosti na vývoji úrokové míry za posledních 10 let.

9 Obligace

Studijní cíle: Po nastudování této kapitoly budete schopni definovat a popsat obligaci, klasifikovat ji podle různých hledisek, budete umět vypočítat cenu kupónové obligace, diskontované obligace a cenu konzoly. Dále poznáte, s jakými typy výnosností se můžete u obligací setkat, co znamená pojem durace a jaké je její využití.

Základní pojmy

- **Obligace (dluhopis)** je dlouhodobý cenný papír se stanovenou dobou splatnosti, který vyjadřuje závazek emitenta (dlužníka) vůči oprávněnému majiteli (věřiteli) splatit k určitému datu půjčku a proplatit úroky ve stanovených termínech. Z tohoto důvodu je obligace dlouhodobým cenným papírem s **fixním výnosem**. Na druhou stranu však existují také obligace s **pohyblivým výnosem**, u nichž je příslušná úroková míra vázána na jinou referenční sazbu.
- **Nominální hodnota** (NH) obligace je částka vytištěná na cenném papíru, která udává výši dluhu a je vyplacena na konci doby splatnosti. Cena obligace je skutečná tržní hodnota, za kterou je obchodována na kapitálových trzích. Přesně v den splatnosti je cena obligace rovna nominální hodnotě.
- **Kurz** obligace je cena vyjádřená v procentech z nominální hodnoty, např. je-li cena obligace 11 038 Kč a její nominální hodnota 10 000 Kč, bude hodnota kurzu činit 110,38 procent.
- **Kupónová platba** (C) je sjednaný úrok vyplácený v pravidelných intervalech.
- **Kupónová sazba** (c) je kupónová platba vyjádřená v procentech z nominální hodnoty, platí tedy $C = cF$.
- **Kupónové období** (nejčastěji roční nebo pololetní) je období, na jehož konci je vyplacena kupónová platba.

Klasifikace obligací:

1. **podle počtu kupónových plateb**
    - **kupónové obligace**, s nimiž je spojen konečný počet kupónových plateb,

- **bezkupónové, diskontované obligace (zero coupon bonds)**, které jsou obchodovány na diskontním principu bez výplat kupónů, obligace se tedy chová jako dlouhodobý depozitní certifikát,
- **konzoly, věčné obligace**, které poskytují nekonečně mnoho kupónových plateb;

2. **podle emitenta**

   - **státní obligace** - emitentem jsou státní orgány, obligace jsou vydávány při deficitu státního rozpočtu, např. povodňové dluhopisy v roce 1997,
   - **komunální obligace** - emitovány při potřebě peněz na straně městské správy,
   - **podnikové obligace** - emitentem je určitá firma;

3. **podle místa, kde je emitována**

   - **domácí obligace** - je emitována na domácím trhu domácím subjektem a v domácí měně,
   - **zahraniční obligace** - je emitována na zahraničním trhu zahraničním subjektem v odpovídající zahraniční měně,
   - **euroobligace** - je emitována způsobem: emitent z jedné země emituje obligaci do druhé země v měně třetí země.

Složení obligace
V případě, že obligace má listinnou podobu, bývá složena z pláště a kupónového archu s talónem. **Plášť obligace** obsahuje:

- jméno emitenta,
- výši celkové emise,
- datum emise,
- nominální hodnotu,
- kupónovou sazbu,
- datum výplaty kupónových plateb,
- podpisy oprávněných osob,
- je-li obligace na jméno, pak také jméno majitele.

Kupónový arch obsahuje jednotlivé kupóny, které jsou v době své výplaty odstřiženy a proplaceny. **Talón** je část kupónového archu, která po odstřižení všech proplacených kupónů zůstává, a majitel obligace dostane po jejím předložení nový kupónový arch.

9.1 Cena kupónové obligace

Cenou obligace rozumíme cenu, za kterou je obligace obchodována na kapitálovém trhu a jejíž výše především závisí na stavu nabídky a poptávky. Cenu obligace vypočteme jako cenu investice, u níž lze očekávat budoucí příjmy. Bude tedy obecně vyjádřena jako součet všech budoucích příjmů diskontovaných k současnému datu.

Pro výpočet ceny **kupónové obligace** je důležité, je-li cena počítána k datu, v němž dochází k výplatě kupónové platby, nebo k datu mezi dvěma výplatami. V případě, že je počítána přesně k datu výplaty kupónu, mluvíme o **teoretické ceně obligace**.

9.1.1 Cena kupónové obligace k datu výplaty kupónové platby

V tomto případě je cena obligace rovna součtu všech budoucích kupónových plateb diskontovaných k současnému datu a nominální hodnoty, také diskontované k dnešnímu datu. Výplata kupónů bývá zpravidla jednou ročně, v některých případech pololetně. Matematicky je cena obligace formulována v následujícím vztahu:

$$PV = \frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{C}{(1+r)^{n-1}} + \frac{C+NH}{(1+r)^n}, \tag{45}$$

kde r značí míru výnosnosti v rámci investic do obligací. Úpravou tohoto vztahu s využitím součtu pro geometrickou posloupnost dostaneme stručnější vyjádření pro cenu obligace:

$$PV = \frac{C[(1+r)^n - 1] + rNH}{(1+r)^n r}. \tag{46}$$

Příklad 9.1.1.1
Určete cenu obligace s nominální hodnotou 10 000 Kč, splatnou k 1.9.2008, k datu 1.9.2008. Kupónové platby jsou vypláceny jednou za rok, vždy k 1.9., kupónová sazba činí 6% p.a. a tržní úroková míra v rámci investic do obligací je 10% p.a.

Řešení:
Nejdříve vypočteme výši kupónových plateb, které jsou definovány jako kupónová sazba násobená nominální hodnotou obligace. V našem případě bude kupónová platba činit 600 Kč. Dobu od 1.9.2005 do 1.9.2008 představují právě tři roky, takže pro teoretickou cenu obligace bude podle (45) platit

$$PV = \frac{600}{1,1} + \frac{600}{1,1^2} + \frac{10600}{1,1^3} = 9005,30 \text{ (Kč)}.$$

Cena obligace je 9 005,30 Kč.

Mezi tržní cenou obligace a nominální hodnotou mohou nastat situace:

$PV = NH$ právě tehdy, když $r = c$ *prodej za nominální hodnotu*;
$PV > NH$ právě tehdy, když $r < c$ *prodej s prémií*;
$PV < NH$ právě tehdy, když $r > c$ *prodej s diskontem*.

9.1.2 Cena kupónové obligace k datu mezi dvěma výplatami kupónových plateb

Cena obligace určovaná k datu, které leží v období mezi dvěma kupónovými platbami, se vypočte jako součet **tržní ceny obligace** a poměrné části kupónové platby naběhlé od poslední výplaty kupónu. Tržní cena se získá lineární interpolací cen k datu poslední a nejbližší budoucí výplaty kupónové platby. Obvykle se počítá k **datu vypořádání obchodu**. Toto datum získáme přičtením asi 3-5 dnů, nutných k vyřízení administrativy, k **datu uzavření obchodu**. Není-li datum vypořádání známo, určujeme cenu obligace k datu uzavření obchodu. Interpolovanou cenu získáme následujícím postupem:

1. Vypočteme podle vztahu (46) cenu obligace PV_1 k datu poslední výplaty kupónové platby a cenu PV_2 k datu nejbližší budoucí výplaty:

$$PV_1 = \frac{C[(1+r)^n - 1] + rNH}{(1+r)^n r},$$

$$PV_2 = \frac{C[(1+r)^{n-1} - 1] + rNH}{(1+r)^{n-1} r}.$$

2. Provedeme lineární interpolaci cen PV_1 a PV_2 k datu vypořádání obchodu. Představme si, že hodnoty PV_1 a PV_2 leží na grafu lineární funkce (na přímce). Každá z hodnot PV_1, PV_2 odpovídá datu, v němž nastane výplata kupónu. Předpokládejme, že vzdálenost mezi oběma daty je právě jeden rok. Interpolovaná cena obligace (bude označena jako $PV\prime$) je pak taková cena, která odpovídá datu vypořádání obchodu, které leží mezi dvěma daty výplaty kupónů. Na grafu ho najdeme mezi hodnotami PV_1 a PV_2. Pro určení počtu dní se obvykle používá standard $30E/360$.

Matematicky je výpočet interpolované ceny formulován pomocí přímé úměrnosti:

$$PV\prime = PV_1 + \frac{360(R_2 - R_1) + 30(M_2 - M_1) + D_2 - D_1}{360}(PV_2 - PV_1),$$

kde $R_1M_1D_1$ je datum poslední výplaty kupónu a $R_2M_2D_2$ je datum vypořádání obchodu, k němuž počítáme cenu obligace.

Část kupónové platby, která naběhne od data předchozí výplaty kupónu k datu vypořádání obchodu, se nazývá **alikvotní úrokový výnos (AUV)**. Abychom jej mohli přesně spočítat, musíme mít jednoznačně vymezené tzv. **výnosové období**. Toto období začíná dnem výplaty kupónové platby nebo přímo dnem emise obligace (jestliže ještě nebyl žádný kupón vyplacen) a končí dnem vypořádání obchodu.

Někdy bývá u obligace stanoveno **datum ex-kupon**. To je den, jímž počínaje až do nejbližšího budoucího data výplaty kupónu (tzv. ex-období) je obligace obchodována již bez něj, a tato kupónová platba připadne tomu, kdo obligaci vlastnil před datem ex-kupon. Nový majitel už tedy nemá na tuto kupónovou platbu nárok. Místo toho zaplatí za obligaci cenu sníženou o poměrnou část kupónu za dobu od daného data do data výplaty nejbližšího budoucího kupónu jako kompenzaci za ušlou kupónovou platbu.

Je-li obchod s obligací vypořádán až po datu ex-kupon, začíná výnosové období označované jako **záporné výnosové období** dnem výplaty nejbližšího budoucího kupónu a končí dnem vypořádání obchodu.

Výpočet ceny kupónové obligace před datem ex-kupon

- Vypočteme interpolovanou cenu obligace podle výše uvedeného postupu.
- Vypočteme alikvotní úrokový výnos za příslušné výnosové období a přičteme jej k interpolované ceně $PV\prime$ získané v kroku 2:

$$AUV = C\frac{360(R_2 - R_1) + 30(M_2 - M_1) + D_2 - D_1}{360},$$
$$PV = PV\prime + AUV$$

kde $R_1M_1D_1$ je datum poslední výplaty kupónu a $R_2M_2D_2$ je datum vypořádání obchodu, k němuž počítáme cenu obligace.

Výpočet ceny kupónové obligace po datu ex-kupon

- Stejným způsobem jako v předchozím případě vypočteme interpolovanou cenu.
- Vypočteme výši kupónové platby za příslušné záporné výnosové období podle vztahu

$$AUV = C\frac{360(R_3 - R_2) + 30(M_3 - M_2) + D_3 - D_2}{360},$$

  kde $R_3M_3D_3$ je datum nejbližší budoucí výplaty kupónu. Získaný záporný alikvotní úrokový výnos odečteme od interpolované ceny.

Na závěr shrneme celý postup výpočtu do následujícího algoritmu:

Algoritmus pro výpočet ceny obligace:

1. Vypočteme cenu obligace PV_1 k datu poslední výplaty kupónové platby a cenu PV_2 k datu nejbližší budoucí výplaty.
2. Provedeme lineární interpolaci cen PV_1 a PV_2 k datu vypořádání obchodu.
3. Vypočteme alikvotní úrokový výnos za příslušné výnosové období.
4. Přičteme (odečteme) alikvotní úrokový výnos k interpolované ceně obligace.

Příklad 9.1.2.1
Určete cenu obligace s nominální hodnotou 10 000 Kč k datu 7.8.2006, je-li splatná k 1.9.2008 a kupónové platby jsou vypláceny dvakrát do roka, vždy k 1.3. a k 1.9. Roční kupónová sazba činí 6% p.a. a tržní úroková míra v rámci investic do obligací je 10% p.a. Počítejte tři dny na vypořádání obchodu. Určete cenu zmíněné obligace také v případě, že je stanoveno datum-ex kupon na 1.8.2006 (30 dní před datem výplaty kupónu).

Řešení:
Nejdříve vypočteme kupónovou platbu. Protože je pololetní, musíme kupónovou sazbu vydělit dvěma. Hodnota kupónové platby tedy bude činit

$$10000 \cdot 0,06/2 = 300(\text{Kč}).$$

Podle algoritmu výše teď spočítáme cenu obligace s tím, že požadovanou výnosnost r budeme též dělit dvěma.

1. Určíme podle (46) cenu PV_1 k datu poslední výplaty kupónu, tedy k 1.3.2006, a cenu PV_2 k datu nejbližší budoucí výplaty kupónu, tj. k 1.9.2006.:

$$PV_1 = \frac{300}{1,05} + \frac{300}{1,05^2} + \cdots + \frac{10300}{1,05^5} = 9134,10 \text{ (Kč)},$$
$$PV_2 = \frac{300}{1,05} + \frac{300}{1,05^2} + \cdots + \frac{10300}{1,05^4} = 9290,80 \text{ (Kč)}.$$

2. Vypočteme interpolovanou tržní cenu dané obligace. Zde je potřeba si uvědomit, že tuto cenu budeme počítat k datu vypořádání obchodu (a ne k datu uzavření obchodu), tj. k 10.8.2006. Mezi dnem poslední výplaty kupónu (1.3.2006) a dnem vypořádání obchodu (10.8.2006) je 159 dní podle standardu $30E/360$. Tržní cena bude mít hodnotu

$$PV\prime = 9134,10 + \frac{159}{180}(9290,80 - 9134,10) = 9272,50 \text{ (Kč)}.$$

3. Alikvotní úrokový výnos dané obligace bude činit

$$AUV = 300\frac{159}{180} = 265 \text{ (Kč)}.$$

4. Výslednou cenu obligace dostaneme sečtením interpolované ceny a alikvotního úrokového výnosu:

$$9272,50 + 265 = 9537,50 \text{ (Kč)}.$$

Výsledná cena dané obligace je 9 537,50 Kč.

V případě, že je stanoveno datum ex-kupon na 1.8.2006, následuje datum vypořádání obchodu 10.8.2006 po ex-datu. V tomto případě vypočteme alikvotní úrokový výnos za záporné výnosové období a odečteme jej od interpolované tržní ceny.

$$AUV = 300\frac{21}{180} = 35 \text{ (Kč)},$$
$$9272,50 - 35 = 9237,50 \text{ (Kč)}.$$

Výsledná cena obligace by byla 9 237,50 Kč. Poskytnutá *sleva* v podobě záporného alikvotního úrokového výnosu je kompenzací za to, že kupónová platba připadne poslednímu majiteli, který držel obligaci v době těsně před ex-datem.

9.2 Cena diskontované obligace

Diskontovaná obligace se vyznačuje tím, že neposkytuje žádné kupónové platby. Její cenu tedy vypočteme pouze jako diskontovanou nominální hodnotu. Z tohoto hlediska lze diskontovanou obligaci pokládat za dlouhodobý depozitní certifikát. Dlouhodobý proto, že doba splatnosti takové obligace zpravidla překračuje jeden rok.

Vztah pro výpočet ceny diskontované obligace:

$$PV = \frac{NH}{(1+r)^n}, \tag{47}$$

kde r je tržní úroková míra v rámci investic do diskontovaných obligací a n doba splatnosti v letech.

Diskontovanou obligaci můžene rovněž považovat za speciální případ kupónové obligace s tím, že hodnota kupónové platby je rovna nule. Vzorec (45) se zúží na (47).

Příklad 9.2.1
Určete cenu diskontované obligace k datu 1.9.2005, jejíž nominální hodnota je 10 000 Kč a splatnost k 1.9.2008. Tržní úroková míra v rámci srovnatelných investic je 10% p.a.

Řešení:
Podle (47) bude cena dané obligace

$$PV = \frac{10000}{1,1^3} = 7513,10 \text{ (Kč)}.$$

Cena diskontované obligace je 7 513,10 Kč, což je o 1 492,20 Kč méně než v případě kupónové obligace z Příkladu 9.1.1.1. Důvodem tohoto snížení je skutečnost, že z diskontované obligace neplynou žádné kupónové platby.

9.3 Cena konzoly

Konzola neboli věčná obligace je na rozdíl od diskontované obligace charakteristická tím, že z ní plynou určité platby pořád, proto věčná obligace. Nominální hodnota konzoly nikdy vyplacena není. Konzoly byly emitovány v době napoleonských válek v Anglii, kupónové platby jsou vypláceny dodnes. Tento typ obligací už není znovu emitován.

Cenu konzoly vypočteme pouze jako součet všech diskontovaných budoucích plateb.

Vztah pro výpočet ceny konzoly:

$$PV = \frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \cdots = \frac{C}{r}, \tag{48}$$

kde r je tržní úroková míra v rámci srovnatelných investic. Jednotlivé diskontované platby tvoří členy nekonečné geometrické řady, jejíž součet je $\frac{C}{r}$. Podmínka pro existenci součtu zmíněné řady

$$\frac{1}{1+r} < 1$$

je splněna, neboť zlomek je vždy menší než jedna. Vzhledem k tomu, že počet plateb je nekonečný, lze konzolu považovat za obecnější případ kupónové obligace.

Příklad 9.3.1
Určete cenu konzoly k datu 1.9.2005, jestliže kupónová platba činí 50 000 Kč a je vyplácena vždy k 1.9. Tržní úroková míra v rámci srovnatelných investic je 10% p.a.

Řešení:
Podle (48) bude cena konzoly

$$PV = \frac{50000}{0,1} = 500000 \text{ (Kč)}.$$

Cena konzoly je 500 000 Kč.

9.4 Výnosnost obligace

U obligací se můžeme setkat s výnosnostmi, které souvisí pouze s kupónovými platbami, nebo které se týkají jak kupónových plateb, tak nákupních a prodejních cen. Pokud jde o první typ výnosnosti, rozlišujeme

1. **kupónovou výnosnost** r_K

$$r_K = \frac{C}{NH}, \tag{49}$$

2. **běžnou výnosnost** r_B

$$r_B = \frac{C}{PV}. \tag{50}$$

V případě druhého typu výnosnosti lze použít

1. **výnosnost do splatnosti** r,

$$PV = \frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{C}{(1+r)^{n-1}} + \frac{C+NH}{(1+r)^n}, \tag{51}$$

kterou lze odhadnout pomocí finančního kalkulátoru nebo pomocí vhodného softwaru nebo můžeme použít přibližný vztah

$$r \doteq \frac{C + \frac{NH-TC}{n}}{0,5NH + 0,5TC}, \tag{52}$$

kde TC značí tržní cenu obligace a n je počet let do její splatnosti.

2. **výnosnost za dobu držby** r_R **(renditu)**

$$r_R = \frac{C}{PV_0} + \frac{PV_k - PV_0}{k \cdot PV_0}, \tag{53}$$

kde PV_0 je nákupní cena obligace a PV_k její prodejní cena v čase k.

Vztah (51) lze použít též v případě, že obligace je prodána ještě před svou splatností. Matematicky jej zapíšeme ve formě

$$PV = \frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{C}{(1+r)^{k-1}} + \frac{PV_k}{(1+r)^k},$$

kde PV_k značí prodejní cenu obligace v čase k.

Poznámka:
Výnos z kupónových plateb je daněn 25-procentní sazbou. Potom tedy kupónová výnosnost očištěná od daně bude vyjádřena vztahem

$$r_K = \frac{0,75C}{NH}. \tag{54}$$

Příklad 9.4.1
Obligace s nominální hodnotou 10 000 Kč, se splatností k 1.9.2008 a ročními kupónovými platbami 600 Kč byla k 1.9.2005 nabízena za cenu 10 272,30 Kč. Vypočtěte její kupónovou výnosnost, běžnou výnosnost a odhadněte její výnosnost do splatnosti.

Řešení:
Kupónovou výnosnost určíme podle vztahu (54), tj.

$$r_K = \frac{600}{10000} = 0,06, \text{ tj. } 6\%,$$

běžnou výnosnost určíme podle vztahu (50), tj.

$$r_B = \frac{600}{10272,30} = 0,0584, \text{ tj. } 5,84\%,$$

a výnosnost do splatnosti odhadneme z rovnice

$$10272,30 = \frac{600}{1+r} + \frac{600}{(1+r)^2} + \frac{10600}{(1+r)^3}.$$

Pomocí softwaru MS Excel zjistíme, že hodnota výnosnosti je 5%. Podle přibližného vzorce (52) je hodnota výnosnosti do splatnosti 5,02%. Kupónová výnosnost dané obligace činí 6%, běžná výnosnost 5,84% a výnosnost do splatnosti 5% (5,02%).

9.5 Durace

Durace D je definována jako střední (průměrná) doba života obligace (střední doba splatnosti) a vypočítá se jako vážený průměr všech období, v nichž došlo k výplatě kupónových plateb. Váhami jsou současné hodnoty všech kupónových plateb a v posledním období současná hodnota součtu kupónové platby a nominální hodnoty v poměru k teoretické ceně obligace. Duraci tedy vypočteme ze vztahu

$$D = \frac{\frac{C}{1+r} + \frac{2C}{(1+r)^2)} + \cdots + \frac{n(C+NH)}{(1+r)^n}}{\frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{C+NH}{(1+r)^n}}.$$

Úpravou vztahu pro duraci dostaneme jeho stručnější vyjádření

$$D = \frac{\sum_{j=1}^{n} j \frac{C}{(1+r)^j} + \frac{nNH}{(1+r)^n}}{\sum_{j=1}^{n} \frac{C}{(1+r)^j} + \frac{NH}{(1+r)^n}}. \tag{55}$$

Pro duraci bezkupónové obligace platí $D = n$ a pro konzolu je durace rovna zlomku $\frac{1+r}{r}$, který dostaneme limitním přechodem pro n jdoucí k nekonečnu,

$$D^{konzoly} = \lim_{n\to\infty} D_n,$$

kde D_n je durace klasické obligace.

Pomocí durace měříme citlivost změny ceny obligace v závislosti na změně ve výnosnosti do splatnosti. Pro vyšetřování citlivosti se používá přibližný vztah

$$\frac{\Delta PV(r)}{PV(r)} \doteq -D\frac{\Delta r}{1+r}, \tag{56}$$

jehož odvození vychází z Taylorova rozvoje funkce $PV(r)$:

$$PV(r+\Delta r) \doteq PV(r) + \frac{1}{1!}\frac{dPV(r)}{dr}\Delta r \tag{57}$$

$$\frac{dPV(r)}{dr} = \frac{-C}{(1+r)^2} + \frac{-2C}{(1+r)^3} + \cdots + \frac{-n(C+NH)}{(1+r)^{n+1}}$$

$$\frac{dPV(r)}{dr}(-1)(1+r) = \frac{C}{1+r} + \frac{2C}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{n(C+NH)}{(1+r)^n}$$

$$-\frac{dPV(r)}{dr}\frac{1+r}{PV(r)} = \frac{\frac{C}{1+r} + \frac{2C}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{n(C+NH)}{(1+r)^n}}{PV(r)} = D$$

$$\frac{dPV(r)}{dr} = -D\frac{PV(r)}{1+r}$$

Dosadíme do vztahu (57)

$$PV(r+\Delta r) \doteq PV(r) + \frac{1}{1!}(-D)\frac{PV(r)}{1+r}\Delta r$$

$$PV(r+\Delta r) - PV(r) \doteq -D\frac{PV(r)}{1+r}\Delta r$$

$$\frac{\Delta PV(r)}{PV(r)} \doteq -D\frac{\Delta r}{1+r}.$$

Příklad 9.5.1
Určete střední dobu životnosti obligace s nominální hodnotou 10 000 Kč, dobou splatnosti 3 roky a ročními kupónovými platbami 600 Kč. Požadovaná výnosnost je 10% p.a. Dále nechť se u této obligace změní výnosnost na 11%. Jak se změní její cena?

Řešení:
Využijeme vztah (55).

$$D = \frac{\sum_{j=1}^{3} j\,\frac{600}{1{,}1^j} + \frac{30000}{1{,}1^3}}{\sum_{j=1}^{3} \frac{600}{1{,}1^j} + \frac{10000}{1{,}1^3}} = 2,814 \text{ (roku)}.$$

Střední doba životnosti obligace je 2,814 roku, tj. dva roky a necelých deset měsíců. Změnu ceny přibližně zjistíme ze vztahu (56):

$$\frac{\Delta PV}{PV} \doteq -2,814 \cdot \frac{0,01}{1,1} \doteq -0,0256,$$

tj. cena obligace bude asi o 2,56% nižší.

Úlohy k procvičení:

1. Určete cenu obligace k datu 4.5.2006, jestliže je splatná k 1.9.2008, její nominální hodnota činí 10 000 Kč, kupónové platby jsou vypláceny pololetně vždy k 1.3. a 1.9. při roční kupónové sazbě 6%. Tržní úroková míra v rámci investic do obligací je 10% p.a., počítejte tři dny na vypořádání obchodu.
   (9 301,70 Kč)

2. Vypočtěte cenu obligace k datu 7.8.2006, s nominální hodnotou 10 000 Kč a splatností k 1.9.2008, jestliže její kupónové platby jsou vypláceny jedenkrát ročně k 1.9. v hodnotě 600 Kč. Tržní úroková míra v rámci investic do obligací činí 10% p.a. Úlohu řešte také pro případ, že je dáno datum ex-kupon připadající na 1.8.2006. Počítejte tři dny na vypořádání obchodu.
   (9 853,30 Kč; 9 253,30 Kč)

3. Jaká je cena diskontované obligace (zero-bondu) s nominální hodnotou 100 000 Kč a se splatností 3 roky, je-li požadovaná výnosnost 10% p.a.?
   (75 131,50 Kč)

4. Vypočtěte, za kolik by se měla prodávat konzola s kupónovou platbou 20 000 Kč při tržní úrokové míře 10% p.a.
   (200 000 Kč)

5. Uvažujte obligaci s nominální hodnotou 1 000 Kč splatnou za deset roků a s ročními kupónovými platbami 120 Kč. V současné době je obligace obchodována za cenu 1 078,20 Kč. Určete její kupónovou a běžnou výnosnost a dále odhadněte výnos do splatnosti pomocí softwaru i pomocí přibližného vztahu.
(12%; 11,13%; 10,69%; 10,79%)

6. Vyberte ze dvou čtyřletých obligací tu, která má nižší citlivost na změnu výnosnosti do splatnosti. První obligace má nominální hodnotu 1 000 Kč, roční kupónovou platbu 55 Kč a její míra výnosnosti do splatnosti je 12% p.a. Druhá z obligací má nominální hodnotu 1 100 Kč, roční kupónovou platbu 45 Kč, její míra výnosnosti do splatnosti činí 10%p.a. (první)

7. Odvoďte vztah pro výpočet durace diskontované obligace a konzoly.

10 Akcie

Studijní cíle:
V této kapitole představíme jeden z nejvýznamnějších dlouhodobých cenných papírů kapitálového trhu - akcie. Poznáte, jakými způsoby lze odhadnout vnitřní hodnotu akcie a jaké druhy výnosností akcie poskytuje. Naučíte se zacházet s pojmem předkupní právo a určovat jeho cenu.

Základní pojmy

- **Akcie** je dlouhodobý cenný papír obchodovatelný na kapitálovém trhu, s nímž jsou spojena **práva** majitele
  - podílet se na řízení akciové společnosti (účast a hlasování na valné hromadě, právo kontroly),
  - na zisk společnosti (rozdělený do dividend),
  - na podíl likvidačního zůstatku při zániku společnosti,
  - přednosti na nákup nových (mladých) akcií (předkupní nebo odběrní právo).

  Majitel akcie (akcionář) není věřitelem tak jako v případě majitele obligace, nýbrž spoluvlastníkem celé akciové společnosti.

- **Nominální hodnota** akcie je podíl na majetku akciové společnosti vyjádřený vlastnictvím akcie. S nominální hodnotou souvisí pojem **základní jmění (základní kapitál)**, které je dáno součtem nominálních hodnot všech prodaných (upsaných) akcií.

- Nadřazenějším pojmem je **vlastní jmění**, v němž je zahrnuto základní jmění, emisní ažio (kladný rozdíl mezi tržní cenou a nominální hodnotou akcie při její emisi), fondy ze zisku a nerozdělený zisk (nepoužitý na fondy nebo dividendy), který bývá obvykle převeden do dalšího období. Potřebné finanční zdroje (úvěry) akciové společnosti tvoří **cizí jmění (kapitál)**.

- **Dividenda** je podíl na zisku akciové společnosti, na který má právo každý akcionář a který je odhlasován na valné hromadě akcionářů. Výplata dividend závisí především na hospodaření společnosti a nemusí být zaručena, na rozdíl od obligací s fixní kupónovou sazbou. Z tohoto hlediska řadíme akcie mezi dlouhodobé cenné papíry s **nezaručeným výnosem**.

- **Emise akcií** je jejich umístění na kapitálovém trhu, a to buď formou veřejné nabídky prodeje akcií nebo neveřejného prodeje (pro omezený počet investorů). Pokud jde o veřejnou nabídku prodeje, pak existují možnosti prodeje **aukcí** (dražbou) nebo **tendrem** (veřejná soutěž s nastavenou minimální cenou, která je investory zvyšována, ale k prodeji dojde jen tehdy, sejde-li se nabídka s poptávkou).

- **Štěpení akcií** znamená zvýšení počtu akcií při stejné hodnotě základního jmění, nové akcie pak budou mít nižší nominální hodnotu. Tento krok může vyvolat investiční pobídku, protože ceny akcie se mohou stát dostupnějšími.

Druhy akcií

- **obyčejná (kmenová) akcie** - klasická, s výše uvedenými právy;
- **prioritní akcie** - může být bez hlasovacího práva, ale se stanovenou výší dividendy (v případě, že společnost vykazuje zisk); výplata takové dividendy stojí hned za splácením úvěru a výplatou kupónových plateb z obligací emitovaných společností;
- **zaměstnanecká akcie** - musí znít na konkrétní jméno majitele a může být předávána pouze mezi zaměstnanci společnosti.

Složení obyčejné akcie
Obyčejná akcie, pokud má listinnou podobu, obsahuje **plášť**, **kupónový arch** s kupóny na výplatu dividend a **talón**, který má stejný význam jako talón u obligací. Na **plášti** akcie bývá uvedeno:

- obchodní jméno a sídlo akciové společnosti,
- nominální hodnota akcie,
- výše základního jmění,
- počet emitovaných akcií,
- datum emise a podpisy,
- jméno akcionáře, pokud je akcie na jméno.

10.1 Cena akcie

Cena akcie je tržní hodnota, za kterou je obchodována na kapitálovém trhu podle aktuálního stavu nabídky a poptávky. V praxi se často používá termínu **kurz akcie**, jehož hodnota je, na rozdíl od obligací, rovna přímo ceně. Cenu akcie ovlivňují různé faktory, především prosperita akciové společnosti, kvalita jejího řízení, perspektiva daného oboru do budoucna, ekonomické parametry daného státu i celého světa atd. Kromě těchto faktorů hraje důležitou roli také psychologie investorů.

Stanovením ceny akcie se zabývají metody fundamentální analýzy, technické analýzy a psychologické analýzy.

Fundamentální analýza vychází z předpokladu, že na kapitálovém trhu jsou dostupné všechny informace důležité pro odhad kurzů a chování akcií. Výsledkem této analýzy je výpočet **vnitřní hodnoty** akcie, jakožto její správné ceny.

Technická analýza zase vychází z výzkumu vývoje kurzů a objemu obchodů na kapitálovém trhu, technici (chartisté) se snaží v těchto záznamech identifikovat určité trendy a speciální formace a pomocí nich pak předpovídat vývoj cen akcií v krátkém období.

Psychologická analýza je založena na analýze chování investorů. Níže uvedené modely pro stanovení ceny akcie budou z oblasti fundamentální analýzy.

10.1.1 Dividendový diskontní model

V tomto modelu je vnitřní hodnota akcie odhadována jako součet všech diskontovaných budoucích plateb, tj. dividend a výnosu z prodeje akcie. Obecně předpokládáme, že výše dividendy vyplacená na konci jednotlivých roků není stejná. Vnitřní hodnota (VH) akcie, u níž byly dividendy vypláceny po dobu n let a na konci n-tého roku byla akcie prodána, vypadá

$$VH = \frac{D_1}{1+r} + \frac{D_2}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{D_n + P_n}{(1+r)^n},$$

$$VH = \sum_{j=1}^{n} \frac{D_j}{(1+r)^j} + \frac{P_n}{(1+r)^n},$$

kde $D_1, \ldots, D_n$ jsou vyplacené dividendy za jednotlivé roky a r je úroková míra v rámci investic se srovnatelnými parametry. Budeme-li uvažovat nekonečné vyplácení dividend, dostaneme pro vnitřní hodnotu akcie vztah

$$VH = \frac{D_1}{1+r} + \frac{D_2}{(1+r)^2} + \cdots = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{D_j}{(1+r)^j}.$$

Je-li výše dividendy neměnná, tj. $D_1 = D_2 = \cdots = D$, platí

$$VH = \frac{D}{1+r} + \frac{D}{(1+r)^2} + \cdots = \frac{D}{r}. \tag{58}$$

Budeme-li předpokládat, že dividendy vykazují konstantní tempo růstu, tj.

$$D_j = D_{j-1}(1+g), \quad j = 1, \ldots n, \ldots,$$

kde g je míra růstu, dostaneme **modely růstu**.
Vnitřní hodnota akcie pak bude mít tvar

$$VH = \frac{D_0(1+g)}{1+r} + \frac{D_0(1+g)^2}{(1+r)^2} + \cdots = \frac{D_0(1+g)}{r-g} = \frac{D_1}{r-g}. \tag{59}$$

Ve výpočtu výše byl hledán součet nekonečné geometrické řady, pro jehož existenci je nutné udat podmínku, a to $r > g$. Při splnění této podmínky existuje též vnitřní hodnota akcie.

Příklad 10.1.1.1
Určete vnitřní hodnotu akcie, očekáváte-li, že hodnota dividendy se v příštích letech nebude měnit a bude činit 30 Kč na jednu akcii. Roční tržní úroková míra v rámci investic do akcií je 12%.

Řešení:
Pro výpočet vnitřní hodnoty použijeme vztah (58):

$$VH = \frac{30}{0,12} = 250 \text{ (Kč)}.$$

Vnitřní hodnota dané akcie je 250 Kč.

Příklad 10.1.1.2
Vypočtěte vnitřní hodnotu akcie, jestliže lze očekávat, že v příštím roce bude vyplacena dividenda ve výši 35 Kč na jednu akcii a každý další rok se bude zvyšovat o 4%. Počítejte s roční mírou výnosnosti 12%.

Řešení:
V tomto zadání uvažujeme konstantní růst dividendy, použijeme proto vzorec (59):

$$VH = \frac{35}{0,12 - 0,04} = 437,50 \text{ (Kč)}.$$

Vnitřní hodnota akcie je 437,50 Kč.

Obecnějším růstovým modelem je dvoustupňový dividendový diskontní model. Zde předpokládáme, že tempo růstu dividend je g_1 v prvních n letech, poté se změní na g_2. Odvození vnitřní hodnoty je provedeno přes vyjádření ceny akcie na konci n-tého roku P_n jakožto současné hodnoty vyplácených dividend na konci roku $n+1$, $n+2$,...

$$VH = \frac{D_0(1+g_1)}{1+r} + \frac{D_0(1+g_1)^2}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{D_0(1+g_1)^n}{(1+r)^n} + \frac{P_n}{(1+r)^n}$$

$$VH = \frac{D_1}{r-g_1}\left[1 - \left(\frac{1+g_1}{1+r}\right)^n\right] + \frac{P_n}{(1+r)^n}. \tag{60}$$

Tady zatím skončíme. Vyjádříme cenu akcie P_n jako součet diskontovaných dividend vyplácených v budoucích letech. Jejich tempo růstu bude g_2.

$$P_n = \frac{D_n(1+g_2)}{1+r} + \frac{D_n(1+g_2)^2}{(1+r)^2} + \cdots = \frac{D_n(1+g_2)}{r-g_2} = \frac{D_0(1+g_1)^n(1+g_2)}{r-g_2}$$

$$P_n = \frac{D_1(1+g_1)^{n-1}(1+g_2)}{r-g_2}.$$

Získaný výsledek platí za podmínky $r > g_2$ ze stejných důvodů jako v předchozím modelu. Tento výsledek dosadíme do vztahu (60) do P_n a dostaneme.

$$VH = D_1\left[\frac{1-\left(\frac{1+g_1}{1+r}\right)^n}{r-g_1} + \frac{(1+g_1)^{n-1}(1+g_2)}{(r-g_2)(1+r)^n}\right].$$

10.1.2 Ziskový model

V tomto modelu hraje důležitou úlohu **P/E poměr (price/earnings ratio)**, poměr ceny akcie k čistému zisku na jednu akcii. Je to jeden z ukazatelů souvisejících s akciovými kurzy, který můžeme interpretovat jako dobu, za kterou se akcie zaplatí.

Základem pro tento model je tzv. **normální poměr P/E**, ozn. $(P/E)_{norm}$, což je odhad průměrné hodnoty poměru. Pro odhad vnitřní hodnoty pak platí

$$VH = (P/E)_{norm} \cdot E_1,$$

kde E_1 je odhad očekávaného zisku v příštím roce. Základní metodou odhadu normálního poměru je dividendový diskontní model s konstatním růstem. Pro hodnotu poměru platí

$$(P/E)_{norm} = \frac{d_1}{r-g},$$

kde d_1 je tzv. **výplatní poměr** (poměr výše dividendy na jednu akcii a jednotkového zisku po zdanění), v tomto případě odhadnutý pro příští rok, tj. $d_1 = \frac{D_1}{E_1}$. Normální poměr se také odhaduje pomocí metod matematické statistiky nebo srovnáním s tržním P/E poměrem.

Příklad 10.1.2.1
Dividenda pro příští rok je odhadnuta na 9 Kč na jednu akcii, čistý zisk by v příštím roce měl být 23,50 Kč na jednu akcii. Předpokládáme, že dividendy rostou konstantní roční měrou 12,5%, roční míra výnosnosti je 15%. Vypočtěte vnitřní hodnotu dané akcie.

Řešení:
Nejdříve vypočteme výplatní poměr d_1:

$$d_1 = \frac{9}{23,50} = 0,383.$$

Dále vypočteme hodnotu normálního P/E poměru:

$$(P/E)_{norm} = \frac{0,383}{0,15-0,125} = 15,32.$$

Vnitřní hodnota akcie pak bude

$$VH = 15,32 \cdot 23,50 = 360 \text{ (Kč)}.$$

Vnitřní hodnota akcie činí 360 Kč.

10.2 Předkupní právo a jeho cena

V úvodu kapitoly o akciích bylo uvedeno, že s vlastnictvím akcií je spojeno, mimo jiné, **předkupní (odběrní) právo** na nové akcie. Toto právo bývá uplatněno v době, kdy dochází ke zvyšování základního jmění (kapitálu) akciové společnosti. Navýšení základního jmění se nejčastěji řeší emisí nových (mladých) akcií, na jejichž nákup mají stávající akcionáři přednostní právo. S jednou drženou akcií je spojeno obvykle jedno právo. Na nákup jedné mladé akcie však jedno předkupní právo nestačí, počet práv je dán **upisovacím poměrem** (N), což je poměr základního jmění (ZJ) a navýšení základního jmění (ΔZJ).

$$N = \frac{ZJ}{\Delta ZJ} \tag{61}$$

S takovým počtem práv pak akcionář obdrží jednu mladou akcii za **upisovací cenu**, která bývá nižší než tržní cena. S mladou akcií je současně prodáváno jedno předkupní právo, ale pouze určitou dobu, kterou uzavírá **datum ex-předkupní právo**, zkráceně **ex-datum**. Tímto dnem počínaje se akcie prodávají již bez předkupního práva, to se obchoduje samostatně. Z toho však plyne, že i předkupní právo má svoji cenu v závislosti na tom, jestli už ex-datum nastalo či ne.

Cena práva v době před ex-datem
Odvození ceny vychází z úvahy, kdy investor má dvě možnosti:

- buď koupí jednu mladou akcii za tržní cenu $PV_{p\check{r}ed}$,
- nebo koupí potřebný počet práv a jednu mladou akcii za upisovací cenu. V době před ex-datem se mladé akcie prodávají včetně jednoho budoucího předkupního práva.

Aby obě investiční možnosti měly stejnou cenu, musí platit rovnost

$$PV_{p\check{r}ed} = NR + S + R, \tag{62}$$

kde N je upisovací poměr, S upisovací cena a R cena předkupního práva. Cenu práva získáme vyjádřením R z rovnice výše:

$$R = \frac{PV_{p\check{r}ed} - S}{N + 1}. \tag{63}$$

Cena práva v době po ex-datu
V této době se mladé akcie již neprodávají s nárokem na předkupní právo, proto se rovnice (62) zjednoduší na tvar

$$PV_{po} = NR + S. \tag{64}$$

Vyjádřením R z rovnice dostaneme opět cenu práva

$$R = \frac{PV_{po} - S}{N}. \tag{65}$$

V rámci akciové společnosti je možné stanovit, že v roce, v němž došlo k navýšení základního jmění, již nebudou vyplaceny dividendy (D). Tento fakt může být zohledněn i v rovnicích (62), (64) způsobem

$$PV_{před} = NR + S + R + D,$$
$$PV_{po} = NR + S + D,$$

takže pro cenu práva v době před a po ex-datu bude platit

$$R = \frac{PV_{před} - S - D}{N + 1},$$
$$R = \frac{PV_{po} - S - D}{N}.$$

Příklad 10.2.1
Základní jmění určité akciové společnosti činí 15 miliard Kč, upsaných do akcií s nominální hodnotou 500 Kč. Akcionáři této společnosti na valné hromadě odhlasovali zvýšení základního jmění o 7,5 miliard Kč. Tato částka bude získána prostřednictvím emise mladých akcií se stejnou nominální hodnotou. Upisovací cena mladé akcie je 500 Kč. Vypočtěte cenu předkupního práva v době před ex-datem a po něm, jestliže před ex-datem se akcie prodávala za 606 Kč a po ex-datu cena akcie klesla na 562,60 Kč.

Řešení:
Zjistíme, jaký počet práv je nutný k nákupu jedné mladé akcie. Počet práv je dán upisovacím poměrem (61):

$$N = \frac{15000000000}{7500000000} = 2,$$

to znamená, že k nákupu jedné mladé akcie potřebujeme 2 práva. Cenu předkupního práva v době před ex-datem vypočteme podle (63)

$$R = \frac{606 - 500}{3} = 35,30 \text{ (Kč)}$$

a cena předkupního práva v době po ex-datu je, viz (65),

$$R = \frac{562,60 - 500}{2} = 31,30 \text{ (Kč)}.$$

Cena jednoho předkupního práva v době před ex-datem činila 35,30 Kč a po ex-datu klesla na 31,30 Kč.

10.3 Výnosnost akcií

Rozlišujeme dvojí výnosnost akcií:

1. **dividendovou (běžnou) výnosnost**

$$r_B = \frac{D}{P_0}, \tag{66}$$

kde D je výše dividendy a P_0 tržní cena, za niž byla akcie koupena;

2. **akciovou (celkovou) výnosnost**

$$r_C = \frac{P_1 - P_0 + D}{P_0}, \tag{67}$$

nebo v případě, že je uplatněno předkupní právo

$$r_C = \frac{P_1 - P_0 + D + R}{P_0},$$

kde P_0 tržní cena, za niž byla akcie koupena, a P_1 tržní cena, za niž byla akcie prodána. Celková výnosnost popisuje výnosnost za dobu držení akcie omezenou datem nákupu akcie a datem jejího prodeje. Pro lepší orientaci se však tato výnosnost přepočítává na roční bázi, a to pomocí jednoduchého úročení a pomocí složeného úročení. První možnost vychází z přepokladu, že počáteční kapitál P_0 můžeme po celý rok opakovaně investovat s tím, že získané výnosy již znovu neinvestujeme. Přepočet pomocí složeného úročení, naopak, předpokládá opakované investování nejen počátečního kapitálu, ale i výnosů. Oba vztahy pro celkový výnos na roční bázi jsou uvedeny níže:

$$r^j_{Cp.a.} = \frac{P_1 - P_0 + D}{P_0 n}, \tag{68}$$

$$r^s_{Cp.a.} = \left(\frac{P_1 + D}{P_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1, \tag{69}$$

kde n je doba držby akcie v letech.

Příklad 10.3.1
Určete běžnou a celkovou výnosnost akcie, která byla koupena za cenu 64 Kč a za jedenáct měsíců prodána za cenu 81,88 Kč. Během této doby byla vyplacena dividenda ve výši 8,67 Kč.

Řešení:
Běžnou výnosnost zjistíme podle (66), tj.

$$r_B = \frac{8,67}{64} = 0,135, \quad \text{neboli } 13,5\%,$$

druhou z výnosností podle (67), tj.

$$r_C = \frac{81,88 - 64 + 8,67}{64} = 0,415, \quad \text{neboli } 41,5\%.$$

Celková výnosnost přepočtená na roční bázi v případě jednoduchého úročení činí

$$r^j_{Cp.a.} = \frac{81,88 - 64 + 8,67}{64 \cdot \frac{11}{12}} = 0,453, \quad \text{neboli } 45,3\%,$$

a v případě složeného úročení činí

$$r^s_{Cp.a.} = \left(\frac{81,88 + 8,67}{64}\right)^{\frac{12}{11}} - 1 = 0,4602, \quad \text{neboli } 46,02\%.$$

Běžná výnosnost dané akcie je 13,5%, celková výnosnost 41,5%. Celková výnosnost akcie přepočtená na roční bázi je 45,3% při jednoduchém úročení a 46,02% při složeném úročení. Poslední dvě hodnoty jsou si hodně blízké. Důvodem proto je zřejmě doba držby akcie, která je téměř jeden rok.

Výnos z dividend stejně jako kapitálový výnos (výnos z prodeje akcií) bývá zdaněný příslušnou daňovou sazbou. Pro dividendy je stanovena daňová sazba 25%. Je-li d_D daňová sazba pro dividendy a d_K sazba pro kapitálový výnos, dostaneme pro čistý akciový (celkový) výnos vztah

$$r_C = \frac{(P_1 - P_0)(1 - d_K) + D(1 - d_D)}{P_0}.$$

Úlohy k procvičení:

1. Investor odhaduje, že dividenda na konci tohoto roku bude 1,1 Kč na jednu akcii. Kolik zaplatí za jednu akcii počátkem příštího roku, předpokládá-li, že dividendy se budou vyplácet trvale s konstantním růstem 5% ročně, a požaduje přitom 10-procentní výnos? (22 Kč)

2. Investor odhaduje výši dividendy k 31.12. na 1 Kč. Nepředpokládá růst dividend, proto požaduje také nižší roční výnos 4,5%. Kolik zaplatí za jednu akcii 1.1. následujícího roku? (22,20 Kč)

3. Vypočtěte vnitřní hodnotu akcie firmy Nokia na konci roku 1999, jestliže akcie byla prodána na konci roku 2003 za 17,02 dolarů. V letech 2000 - 2003 byly vyplaceny dividendy, viz níže. Míra výnosnosti v rámci investic do akcií je 5% p.a. (17,065 dolarů)

Rok	2000	2001	2002	2003
Div.	2,61	0,21	0,20	0,26

4. Akcie A je nyní prodávána za 117,44 Kč. Dividenda, která je vyplácená v současnosti, činí 1,13 Kč, výše dividendy za 4 roky je odhadována na 6,15 Kč. Předpokládáme, že dividendy v příštích letech kontinuálně porostou. Určete požadovanou míru výnosnosti. (0,542)

5. Akcionáři jisté akciové společnosti vlastní dohromady 400 000 akcií. Nominální hodnota jedné akcie je 1 000 Kč. Letos došlo k navýšení vlastního jmění o 100 000 000 Kč, bylo tedy emitováno 100 000 akcií se stejnou nominální hodnotou. Upisovací cena akcie je 1 000 Kč. Určete cenu předkupního práva v době před ex-datem, stojí-li jedna akcie za 1 110 Kč a po ex-datu, kdy se jedna akcie prodávala za cenu 950 Kč. (20 Kč; 10 Kč)

6. Určete cenu akcie, jestliže její normální P/E poměr činí 31,64 a v příštím roce se očekává, že čistý zisk na jednu akcii bude 47,40 Kč. (1 499,70 Kč)

7. Vypočtěte běžnou a celkovou výnosnost akcie, která byla zakoupena za 15,86 dolarů a za dva roky prodána za 17,02 dolarů. V této době byly vyplaceny dividendy v celkové výši 0,46 dolarů. Celkovou výnosnost přepočtěte též na roční bázi podle obou typů úročení.
(2,9%; 10,2%; 5,1%; 4,98%)

11 Měnové kurzy

Studijní cíle:
Po nastudování poslední kapitoly budete umět počítat křížové kurzy dvou různých zahraničních měn a určit také termínové měnové kurzy.

Měnový kurz je poměr, v němž se směňují dvě různé měny, obvykle cizí a domácí, a který tedy vyjadřuje cenu jedné měny pomocí druhé měny. Měnový kurz bývá rozlišován pro **devizy** (bezhotovostní cizí měnu v podobě zůstatku na účtu, v podobě směnky či šeku) a pro **valuty** (bankovky a mince v cizí měně). Rozlišujeme tedy **devizový** a **valutový kurz**. Stanovení (kotace) kurzů může být dvojí:

- **přímá kotace**, kdy kurz udává, kolik stojí jednotka cizí měny v měně domácí, např. 31,030 CZK/EUR,
- **nepřímá kotace**, kdy kurz udává, kolik stojí jednotka domácí měny v měně cizí, např. 1/31,030 EUR/CZK = 0,032 EUR/CZK.

U kurzů bývá často označeno, zda se vztahují na nákup cizí měny bankou nebo na její prodej bankou. Potom rozlišujeme **kurz nákup (bid)** nebo **kurz prodej (ask, offer)**. Někdy se používá **kurz střed**, který je roven aritmetickému průměru kurzu pro nákup a prodej. Rozdíl mezi kurzem pro nákup a prodej bývá označován jako **rozpětí (spread)**.

11.1 Křížové kurzy

Křížovými kurzy budeme rozumět kurzy cizích měn vypočtené z kurzů domácí měny vůči těmto cizím měnám. Např. křížový kurz $AK_{EUR/USD}$ říká, kolik euro zaplatíme za jeden dolar.

Odvození křížového kurzu $AK_{EUR/USD}$

$$1 \text{ dolar} = AK_{CZK/USD} \text{ Kč},$$

$$1 \text{ Kč} = \frac{1}{AK_{CZK/EUR}} \text{ euro},$$

$$1 \text{ dolar} = \frac{AK_{CZK/USD}}{AK_{CZK/EUR}} \text{ euro}.$$

Vztah pro křížový kurz $AK_{EUR/USD}$ tedy je:

$$AK_{EUR/USD} = \frac{AK_{CZK/USD}}{AK_{CZK/EUR}}.$$

Křížový kurz v obecné podobě:

$$AK_{A/B} = \frac{C/B}{C/A},$$

kde C označuje domácí měnu a A, B jsou dvě cizí různé měny.

Příklad 11.1.1
Určete křížový kurz $AK_{EUR/USD}$, znáte-li aktuální kurzy $AK_{CZK/EUR} = 29,53$ a $AK_{CZK/USD} = 24,47$.

Řešení:
Budeme postupovat podle schematu odvození výše:

$$\begin{aligned} 1 \text{ dolar} &= 24,47 \text{ Kč}, \\ 1 \text{ Kč} &= \frac{1}{29,53} \text{ euro}, \\ 1 \text{ dolar} &= \frac{24,47}{29,53} = 0,83 \text{ euro}. \end{aligned}$$

Křížový kurz $AK_{EUR/USD}$ je 0,83, neboli jeden americký dolar dostaneme koupit za 0,83 euro.

Jestliže banka směňuje jednu cizí měnu za druhou, opět cizí měnu, pak by je měla směňovat právě podle křížového kurzu. Ten představuje jedinou spravedlivou cenu jedné měny vyjádřenou v druhé měně v tom smyslu, že banka a její obchodní protějšek jsou vzájemně vyrovnány. Kdyby se jedna cizí měna prodávala dráže nebo levněji, než určuje křížový kurz, pak by vždy jedna strana mohla realizovat bezrizikový zisk.

Ukážeme nyní na příkladu, jak lze takového zisku dosáhnout. Vraťme se k příkladu 11.1.1. a předpokládejme, že jeden dolar bude stát 0,85 euro, neboli bude platit $AK_{EUR/USD}$ je 0,85. Předpokládejme dále, že $AK_{CZK/EUR} = 29,53$ a $AK_{CZK/USD} = 24,47$. Potom

$$\begin{aligned} 1 \text{ Kč} &= \frac{1}{24,47} \text{ USD} = \frac{0,85}{24,47} \text{ euro} = \\ &= \frac{24,47}{29,53} \cdot 29,53 \text{ Kč} = 1,026 \text{ Kč}. \end{aligned}$$

Je-li kurz dvou cizích měn různý od jejich křížového kurzu, lze na výše uvedené trojí postupné směně pozorovat, že na konci transakce dostaneme vyšší částku, než je jedna koruna. Získaný rozdíl představuje bezrizikový zisk. Situaci, kdy je možné dosahovat zisku plynoucího z cenových rozdílů stejných produktů na trhu, označujeme jako **arbitráž**.

Poznámka:
Křížové kurzy dvou různých měn lze zjistit např. pomocí převodníku na internetové adrese www.fio.cz.

Křížové **kurzy**, mohou být specifikovány pro **nákup** nebo **prodej**. Chybí-li tato specifikace, pracujeme s **kurzy střed**. Pro kurz nákup - $AK^N_{EUR/USD}$ platí

$$AK^N_{EUR/USD} = \frac{AK^N_{CZK/USD}}{AK^P_{CZK/EUR}}.$$

Odvození tohoto křížového kurzu pro nákup dolarů za eura vychází z následující úvahy:
banka A, která odvozuje křížový kurz $AK^N_{EUR/USD}$, neboli chce vědět, kolik euro vyplatí za dolar, prodá jeden dolar bance B v kurzu $AK^N_{CZK/USD}$. Banka B dolary nakupuje, proto kurz nákup. Banka A tedy dostane za prodaný dolar $AK^N_{CZK/USD}$ korun. Následně je prodá bance C za eura v kurzu $AK^P_{CZK/EUR}$, banka C prodává eura, proto kurz prodej, a dostane za prodané koruny $\frac{AK^N_{CZK/USD}}{AK^P_{CZK/EUR}}$ euro.

Křížový kurz prodej - $AK^P_{EUR/USD}$ vypovídá o tom, kolik euro banka dostane za každý prodaný dolar, neboli kolik euro banka nakoupí za jeden dolar. Odvození vzorce pro výpočet křížového kurzu $AK^P_{EUR/USD}$ tedy bude provedeno pomocí odvození křížového kurzu nákup $AK^N_{USD/EUR}$. Dále pak platí:

$$AK^N_{USD/EUR} = \frac{AK^N_{CZK/EUR}}{AK^P_{CZK/USD}} = \frac{1}{\frac{AK^P_{CZK/USD}}{AK^N_{CZK/EUR}}}.$$

Odtud lze vyčíst vzorec pro křížový kurz prodej:

$$AK^P_{USD/EUR} = \frac{AK^P_{CZK/EUR}}{AK^N_{CZK/USD}}$$

a současně přitom platí

$$AK^N_{USD/EUR} = \frac{1}{AK^P_{EUR/USD}}.$$

Na závěr uvedeme oba křížové kurzy v obecné podobě pro dvě různé měny A, B:

Křížový kurz nákup

$$AK^N_{A/B} = \frac{AK^N_{C/B}}{AK^P_{C/A}}$$

Křížový kurz prodej

$$AK^P_{A/B} = \frac{AK^P_{C/B}}{AK^N_{C/A}}$$

11.2 Termínové měnové kurzy

Zatímco **aktuální měnové kurzy** byly platné k současnému datu, **termínový měnový kurz** je měnový kurz platný k budoucímu datu, které je předem sjednáno. Termínový měnový kurz bývá odvozen z hodnot aktuálního měnového kurzu a z hodnot úrokových měr pro domácí a cizí měnu.

Termínový měnový kurz nákup:

$$TK^N_{CZK/EUR} = AK^N_{CZK/EUR} \frac{1 + i_{CZK}t}{1 + i_{EUR}t}, \tag{70}$$

kde $AK^N_{CZK/EUR}$ je aktuální měnový kurz, i_{CZK} je úroková míra pro korunový vklad, i_{EUR} je úroková míra pro účet v eurech a t je doba mezi uzavřením a vypořádáním obchodu v letech.

Odvození vztahu spočívá v porovnání dvou možných investičních příležitostí:

- Máme tolik korun, kolik je jich potřeba na nákup jednoho eura podle aktuálního kurzu $AK^N_{CZK/EUR}$. Tuto částku ponecháme na účtu úročeném úrokovou mírou i_{CZK} po dobu t. Na konci této doby pak bude hodnota částky činit $AK^N_{CZK/EUR}(1 + i_{CZK}t)$ Kč.

- Prodáme koruny za eura podle kurzu $AK^N_{CZK/EUR}$, tj. máme nyní jedno euro, které uložíme na účet s úrokovou mírou i_{EUR} a držíme na tomto účtu po dobu t. Na konci této doby činí hodnota jednoho eura $1 + i_{EUR}t$, což je $(1 + i_{EUR}t)TK^N_{CZK/EUR}$ korun.

Aby nemohlo dojít k arbitráži, musí být obě varianty z hlediska výnosu stejně výhodné, neboli musí platit

$$AK^N_{CZK/EUR}(1 + i_{CZK}t) = (1 + i_{EUR}t)TK^N_{CZK/EUR}.$$

Po úpravě dostaneme vztah (70).

Termínový měnový kurz pro prodej se odvodí tak, že nejdříve odvodíme vztah pro $TK^N_{EUR/CZK}$ a pak využijeme rovnosti

$$TK^P_{CZK/EUR} = \frac{1}{TK^N_{EUR/CZK}}.$$

Termínový měnový kurz prodej:

$$TK^P_{CZK/EUR} = AK^P_{CZK/EUR}\frac{1 + i_{CZK}t}{1 + i_{EUR}t}. \tag{71}$$

Příklad 11.2.1 Vypočtěte termínový kurz $TK^N_{EUR/USD}$ a $TK^P_{EUR/USD}$ k datu za půl roku ode dneška, jestliže $AK^N_{EUR/USD} = 1,14$, $AK^P_{EUR/USD} = 0,87$, $i_{USD} = 2,57\%$ p.a. a $i_{EUR} = 1,08\%$ p.a.

Řešení: Podle vztahů (70) a (71) je

$$TK^N_{EUR/USD} = 1,14\frac{1 + 0,0108 \cdot 0,5}{1 + 0,0257 \cdot 0,5} = 1,13,$$
$$TK^P_{EUR/USD} = 0,87\frac{1 + 0,0108 \cdot 0,5}{1 + 0,0257 \cdot 0,5} = 0,86.$$

Termínový kurz pro nákup dolarů za euro ke sjednanému datu činí 1,13, termínový kurz pro prodej dolarů za euro 0,86.

Na závěr uvedeme oba termínové měnové kurzy v obecné podobě pro dvě různé měny A, B.

Termínový měnový kurz nákup:

$$TK^N_{A/B} = AK^N_{A/B}\frac{1+i_At}{1+i_Bt}$$

Termínový měnový kurz prodej:

$$TK^P_{A/B} = AK^P_{A/B}\frac{1+i_At}{1+i_Bt}$$

Poznámka:
Termínové měnové kurzy jsou předmětem tzv. *termínových obchodů*, které jsou uzavřeny v současné době okamžitě, ale k jejich vyřízení dochází až za předem dohodnutou dobu (obvykle ne delší než jeden rok). Rozlišujeme ještě *spotové, promptní obchody*, které jsou uzavřeny hned a k jejichž vypořádání stačí 3-5 dní. V rámci termínového obchodu, který je též známý pod pojmem *forwardový kontrakt*, je sjednáno přesné budoucí datum vypořádání obchodu, dále předmět obchodu (měnové kurzy, úrokové míry, cenné papíry, komodity), jeho množství a budoucí cena (*termínová cena*).

Úlohy k procvičení:

1. Určete křížový kurz $AK_{USD/EUR}$, znáte-li aktuální kurzy $AK_{CZK/EUR} = 29,53$ a $AK_{CZK/USD} = 24,47$.
(1,21)

2. Kolik norských korun (NOK) bude stát jedna švédská koruna (SEK)? Kolik švédských korun bude stát jedna norská koruna?
Víte, že $AK_{CZK/NOK} = 3,796$ a $AK_{CZK/SEK} = 3,062$.
($AK_{NOK/SEK} = 0,807; AK_{SEK/NOK} = 1,240$)

3. Lze při kurzu a) $AK_{NOK/SEK} = 0,807$, b) $AK_{SEK/NOK} = 1,238$ dosahovat bezrizikového zisku?
(a) ne; b) ano)

4. Zvolte si dvě různé zahraniční měny. Najděte v kurzovním lístku jejich aktuální kurzy vzhledem k českým korunám. Pak vypočtěte oba křížové kurzy.

5. Vypočtěte termínové měnové kurzy $TK^N_{USD/EUR}$ a $TK^P_{USD/EUR}$ k datu za tři měsíce ode dneška, máte-li k dispozici aktuální kurzy $AK^N_{CZK/EUR} = 28,85$, $AK^N_{CZK/USD} = 23,91$, $AK^P_{CZK/EUR} = 21$, $AK^P_{CZK/USD} = 25,03$, $i_{EUR} = 1,08\% p.a.$, $i_{USD} = 2,57\% p.a.$
($TK^N_{USD/EUR} = 1,16$; $TK^P_{USD/EUR} = 0,88$)

Doporučená literatura:

1. Radová, J., Dvořák, P.: *Finanční matematika pro každého.* Grada, Praha, 1997.

2. Tepper, T., Kápl, M.: *Peníze a vy.* Prospektrum, Praha, 1994.

3. Cipra, T.: *Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou.* HZ, Praha, 1998.

4. Cipra, T.: *Matematika cenných papírů.* HZ, Praha, 2000.

5. Čámský, F.: *Finanční matematika: distanční studijní opora.* Masarykova Univerzita, Ekonomicko-správní fakulta, Brno, 2004.

6. Ptáček, R., Borkovec, P., Toman, P.: *Finanční trhy - cvičení.* Skriptum, Provozně-ekonomická fakulta, Mendelova zemědělská a lesnická fakulta, Brno, 2004.

Mgr. Eva Bohanesová

Finanční matematika I

Publikace je určena pro studenty neekonomických fakult VŠ a veřejnost
v rámci celoživotního vzdělávání

Výkonný redaktor prof. PhDr. Ladislav Daniel, Ph.D.
Odpovědná redaktorka Jarmila Kopečková
Technické zpracování autorka
Grafický návrh a úprava obálky Ivana Perůtková

Text neprošel redakční jazykovou úpravou

Vydala a vytiskla Univerzita Palackého v Olomouci,
Křížkovského 8, 771 47 Olomouc
www.upol.cz/vup
e-mail: vup@upol.cz

Olomouc 2006

1. vydání

Ediční řada – Skripta

ISBN 80-244-1294-2

Neprodejné