

ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS

FACULTAS PAEDAGOGICA
MATHEMATICA VI

MATEMATIKA 3

Matematické vzdělávání
z pohledu žáka a učitele primární školy

Sborník příspěvků z konference s mezinárodní účastí

Mathematical Education from Pupil's
and Primary School Teacher's view

The Conference Proceedings



OLOMOUC 2008

Anotace

Sborník obsahuje příspěvky účastníků vědecké konference s mezinárodní účastí *Elementary Mathematics Education '08*, která se pod názvem „Matematické vzdělávání z pohledu žáka a učitele primární školy“ konala ve dnech 23. - 25. 4. 2008 na Pedagogické fakultě UP v Olomouci. Sborník obsahuje plné texty plenárních příspěvků zvaných přednášejících a příspěvky prezentované v sekcích (recenzovaná a nerecenzovaná část).

Cíl a zaměření konference

Prezentace původních výsledků vědecké a odborné práce v oblasti matematiky a didaktiky matematiky, zaměřené na využití v přípravě učitelů primárních škol a popularizaci matematiky jako školního předmětu. Výměna zkušeností z vědecké i pedagogické práce na pracovištích v ČR a zahraničí a učitelů z praxe. Seznámení s novými trendy a perspektivami matematického vyučování.

Hlavní témata

Cesty k rozvoji osobnosti žáka v matematice.

Současnost a perspektivy matematického vzdělávání učitelů primární školy.

Metody a formy popularizace a propagace matematiky.

Abstract

The International Conference on Elementary Mathematics Education was held in Olomouc, April 23 – 25, 2008. It was organized under the auspices of the Dean of the Faculty of Education, Palacký University. The topic of the meeting was "Mathematical Education from Pupil's and Primary School Teacher's view".

The proceedings consist of papers of plenary talks and contributed talks. Some papers passed through the referee's process (part of reviewed papers).

Aim of the conference

Aim of the conference is to present original results of research and professional work in the field of mathematics and didactics of mathematics focusing at primary school teacher education. The purpose of the conference is to bring together people interested in this topic from various workplaces in the Czech republic and abroad to share experience, discuss the latest trends and perspectives in teaching Mathematics at primary level and ways of popularization of Mathematics.

Programový výbor/ Program committee

Helena Siwek (Krakov, PL), Adam Plocki (Krakov, PL), George Malaty (Joensuu, SF), Ondrej Šedivý (Nitra, SR), Pavol Hanzel (Banská Bystrica, SR), Jana Coufalová (Plzeň, CZ), Bohumil Novák (Olomouc, CZ).

Organizační výbor/Organizing committee

Anna Stopenová, Bohumil Novák, Jindřiška Eberová, Jitka Laitochová, David Nocar, Dita Navrátilová, Martina Uhlířová.

Sborník byl vydán s podporou projektu Národního programu výzkumu II STM Morava, č. 2E06029.

Za původnost a správnost jednotlivých příspěvků odpovídají jejich autoři. Příspěvky neprošly redakční ani jazykovou úpravou.

Editor © Martina Uhlířová, 2008

ISBN 978-80-244-1963-3

OBSAH

Úvodem	7
Plenary	
Grecmanová Helena <i>Učitelé a žáci – významní činitelé klimatu školy</i>	10
Malaty George <i>The National and International Impact of Finland's PISA Results on Primary Teacher Education</i>	20
Vighi Paola <i>The Concept of Triangle from Primary School Pupil's view</i>	29
Recenzovaná část	
Beránek Jaroslav <i>Logické úlohy na 1. stupni základní školy</i>	38
Blažková Daniela <i>Výsledky matematických testů mezinárodního projektu pro studenty učitelství na PdF UP Olomouc</i>	43
Blažková Růžena <i>Přirozená čísla a posloupnosti jako prostředek rozvíjení exaktního myšlení žáků</i>	48
Brinckova Jaroslava <i>Tvorivá práce učitele matematiky 1. stupňa ZŠ so žiakmi zo sociálne znevýhodneného prostredia</i>	56
Cachová Jana <i>Jak ovlivňovat přesvědčení budoucích učitelů</i>	61
Cihlár Jiří, Eisenmann Petr, Krátká Magdalena, Vopěnka Petr <i>Kognitivní konflikt jako nástroj překonávání překážek v porozumění nekonečnu</i>	66
Coufalová Jana <i>Využívání didaktických her v hodinách matematiky na 1. stupni ZŠ</i>	73
Deringer Peter <i>Offene mathematikaufgaben im grundschulunterricht</i>	77
Dofková Radka <i>Heuristické principy při řešení problémových úloh na 1. stupni ZŠ</i>	81
Eberová Jindřiška, Stopenová Anna <i>Proč nás zajímají postoje populace k matematice</i>	85
Gerová Ľubica, Klenovčan Pavel <i>Možnosti rozvíjania matematickej gramotnosti študentov Predškolskej a elementárnej pedagogiky</i>	91
Hahn Christiane <i>Das Mathematikbuch auf neuen wegen</i>	96
Hanzel Pavol <i>Dynamické prvky vo vyučovaní geometrie</i>	101
Híc Pavel, Pokorný Milan <i>E-learning ako efektívny nástroj v matematickej príprave budúcich učiteľov na 1. stupni ZŠ</i>	109

Holubová Drahomíra	
<i>Analýza výsledků integrace enviromentální výchovy do vyučování matematiky na 1. stupni ZŠ</i>	114
Jančařík Antonín, Jančaříková Kateřina	
<i>SMASH aneb hledání mostů mezi školou a rodinou</i>	119
Kaslová Michaela	
<i>Vnímání a vyjadřování kvantity u 5 – 7 letých dětí</i>	124
Kopáček Alena	
<i>Matematická příprava učitelů pro 1. stupeň ZŠ očima učitele FP TUL</i>	130
Kopka Jan	
<i>Řešení problémů a zkoumání ve školské matematice</i>	135
Kováčik Štefan	
<i>Autokorektivní karty z pohledu žiaků a učitelův</i>	145
Kratochvílová Alena, Pěchoučková Šárka	
<i>Strategie řešení slovních úloh v 1. - 3. ročníku základní školy</i>	150
Krech Ireneusz	
<i>Stochastický graf jako hrací plátno k náhodné hře a jako prostředek matematické argumentace.....</i>	155
Krejčová Eva	
<i>Kooperativní učení a vyučování z pohledu žáka a učitele</i>	160
Maryšková Dita	
<i>Matematické domino</i>	165
Matějů Bohuna	
<i>Prekoncepty a vyvození dělení na 1. stupni ZŠ</i>	169
Melichar Jan	
<i>Konvergentní a divergentní myšlení v předmětu Didaktika matematiky</i>	174
Mokriš Marek	
<i>Matematická gramotnosť študentov na začiatku ich profesijnej učiteľskej prípravy</i>	178
Nawolska Barbara, Żądło Joanna	
<i>Ile kropek ma dalmatyńczyk? - czyli jak można rozwiązywać pewne zadanie</i>	184
Novák Bohumil	
<i>O úlohách ze soutěže matematický klokan</i>	191
Nowak Jolanta	
<i>Uczymy się przez zabawę czyli gry dydaktyczne w edukacji matematycznej małego dziecka</i>	197
Nowak Zbigniew	
<i>Dylematy kształtowania pojęć z zakresu tzw „władomości i umiejętności praktycznych”</i>	203
Partová Edita	
<i>Tradícia verzus inovácia vo vyučovacích materiáloch pre didaktiku elementárnej matematiky</i>	208
Perný Jaroslav	
<i>Zobrazování prostorových útvarů v primární škole.....</i>	213
Płocki Adam	
<i>Graf a digraf v matematice pro každého</i>	218
Přidavková Alena, Tomková Blanka	
<i>Determinanty dynamického testovania matematických schopností detí zo sociálne znevýhodneného prostredia</i>	226

Příhonská Jana	
<i>Hlavalamy a prostorová představivost</i>	230
Ruppeldtova Janka	
<i>Preferencia stavu v otázkách slovných úloh s operátory.....</i>	235
Rygał Grażyna	
<i>Rozwój logicznego myślenia dzieci we wczesnym okresie szkolnym</i>	241
Seidel Jolanta, Sobieszczyk Maria	
<i>Błędy (nie tylko uczniowskie) w rozwiązywaniu zadań tekstowych</i>	246
Seidel Jolanta, Sobieszczyk Maria	
<i>Podręcznik dla ucznia klas I–III szkoły podstawowej. Szansa czy zagrożenie edukacji?</i>	251
Scholtzová Iveta, Šimčíková Edita	
<i>Dynamické testovanie matematických schopností detí zo sociálne znevýhodneného prostredia – pohľad prvý</i>	255
Siwek Helena	
<i>Trudności studentów pedagogiki z matematyką</i>	259
Tichá Marie	
<i>Tvoření úloh jako jedna z cest rozvíjení profesní kompetence učitelů</i>	264
Tržilová Dana	
<i>Modelování v prostředí želví grafiky - program Obkreslovačka</i>	269
Uhlířová Martina	
<i>Sémantický prostor edukační implementace ICT</i>	274
Vaňurová Milena	
<i>Problematika matematicky nadaných dětí v přípravě učitelů na prvním stupni ZŠ</i>	280
Zdráhal Tomáš	
<i>Kuželosečky v Cabri</i>	286
Zel'ová Veronika	
<i>Projekt „Matematika pre život“ ako jedna z možností rozvíjania matematickej gramotnosti 10-ročných žiakov</i>	289
Žilková Katarína	
<i>Interpretačné paradoxy v internetovej žiackej knižke</i>	294
Nerecenzovaná část	
Havel Cyril, Kordek David, Šroll Petr	
<i>Počítač, motivační prostředek ve výuce matematiky.....</i>	300
Chmelová Miroslava	
<i>Rozvoj osobnosti žáka v matematice cestou montessori</i>	306
Melichar Jan	
<i>Stalo se před patnácti lety</i>	311
Roháček Michal, Tlustý Pavel	
<i>Interaktivní výuka vlastností dělitelnosti na víceletých gymnáziích a základních školách</i>	317
Postery	
Kaslová Michaela	
<i>Grafický záznam postupu řešení u nadprůměrných žáků</i>	324
Recenze.....	327

ÚVODEM

Tématem letošní olomoucké konference *Elementary Mathematics Education '08* je „Matematické vzdělávání z pohledu žáka a učitele primární školy“. V již tradičním čase začínajícího jara se stává místem pravidelného setkání učitelů vysokých i základních škol, jejichž vědecká, odborná i pedagogická práce je věnovaná aktuálním problémům matematiky v primárním vzdělávání a vysokoškolské přípravě učitelů matematiky primárních škol u nás i v zahraničí.

Záměrem konference bylo stejně jako v minulých letech poskytnout prostor pro prezentaci původních výsledků v oblasti matematiky a didaktiky matematiky, zaměřených na využití v přípravě učitelů nejmladších žáků, a seznámit se s novými trendy a perspektivami vyučování matematice.

Jsme přesvědčeni o tom, že matematika jako školní předmět může ještě výrazněji přispívat k celkovému intelektuálnímu i osobnostnímu rozvoji dítěte. Vyžaduje to využívat všech příležitostí k popularizaci matematiky, k prokazování jejího významu ve vzdělávání i v životě. Téma konference akcentuje postavení dvou klíčových aktérů vzdělávání - žáka a učitele. Vytvořit prostředí, v němž se realizuje tvořivá potencialita *žáka*, je hlavním posláním *učitele* matematiky. Využití podmínky, které moderní společnost k matematickému vzdělávání poskytuje, znamená hledat a objevovat cesty k poznávání v matematice.

Uvedená teze je vyjádřena ve dvou vzájemně souvisejících hlavních tématech konference: cesty k rozvoji osobnosti žáka v matematice jsou současně cestami k tvořivému hledání perspektiv matematického vzdělávání učitelů primární školy.

Na Pedagogické fakultě Univerzity Palackého můžeme přivítat více než 80 účastníků z vysokoškolských pracovišť připravujících učitele matematiky primární školy, především pedagogických fakult v České a Slovenské republice, ale také zahraničních hostů z Polska, Rakouska, Itálie a Finska. Mezinárodní účast považujeme za vhodnou příležitost vyměnit si nové poznatky a zkušenosti z vědecké i pedagogické práce na našich pracovištích.

Záštitu nad mezinárodní konferencí „Matematické vzdělávání z pohledu žáka a učitele primární školy“ přijala děkanka Pedagogické fakulty UP prof. PaedDr. Libuše Ludíková, CSc., jíž patří dík za podporu organizátorů z Katedry matematiky PdF UP v Olomouci i všech účastníků.

Spolupořadatelem je Společnost učitelů matematiky JČMF, která organizaci pověřila pracovní skupinu pro matematiku na 1. stupni ZŠ.

Organizátoři zpracovali pro účastníky konference a další zájemce recenzovaný sborník plných textů příspěvků v jazyce prezentace jako jeden z titulů řady Acta Universitatis Palackianae Olomucensis a sborník abstrakt příspěvků v anglickém jazyce. Oba sborníky jsou vydány Vydavatelstvím Univerzity Palackého.

Programový i organizační výbor konference věří, že výsledky konference přispějí k dalšímu rozvoji výzkumné práce v didaktice matematiky.

PLENÁRNÍ PŘEDNÁŠKY

UČITELÉ A ŽÁCI – VÝZNAMNÍ ČINITELÉ KLIMATU ŠKOLY

Helena GRECMANOVÁ

Abstrakt

Zásadní význam pro reformu školy má podle našich zkušeností klima školy. Ovlivňuje totiž spokojenost lidí a jejich jistotu a chuť pracovat. Je tedy důležité vědět, o jakou kvalitu jde, jak vzniká, co klima ovlivňuje, jaké jsou jeho účinky a charakteristiky ve školách, jaký je proces jeho změn? Z těchto důvodů se budeme věnovat vysvětlení pojmu klima školy a zaměříme se na některé vlivy učitelů a žáků. Klima školy však není závislé jen na těchto činitelích, nýbrž na celkové konstelaci různých faktorů, ve které každý z nich působí jednak sám za sebe, jednak ve vzájemných vztazích a ve spojení s jinými činiteli a složkami. Zkoumání různých vlivů na klima školy předpokládá jeho pozorování jako závisle proměnné.

TEACHERS AND PUPILS – IMPORTANT AGENTS OF SCHOOL CLIMATE

Abstract

Based on our experience, fundamental meaning for a school reform lies in a school climate as it influences people's satisfaction, certainty and willingness to work. Hence it is important to learn more about its quality, origin, effects and characteristic features in schools as well as in its dimension of changing process. For these reasons we will pay our attention to the explanation of the term „school climate“ and we will focus on particular factors that influence teachers and pupils. Nevertheless school climate is not dependent only on these factors but on whole setting of all factors. This setting aims at providing the possibility for each of the factors to work on its own as well as within mutual relationships with others agents and components. Investigation of different influential factors on school climate is based on its observation as a dependent variable.

Úvod

Aktuálním pedagogický tématem v České republice je v současnosti kurikulární reforma. Zasahuje výchovně-vzdělávací obsah, aktivity a činnosti, avšak týká se i oblasti skrytého kurikula: vztahů mezi učiteli, žáky a jejich rodiči, mezi učiteli navzájem, sociální struktury ve škole a ve třídách, klimatu školy. Posledně jmenovaný fenomén má zásadní význam pro život ve škole. Ovlivňuje spokojenost lidí a jejich jistotu a chuť pracovat. Zjišťuje se, že pro žáky mnohdy není důležité, co se ve škole naučí, ale jak se v ní cítí a jaké prožívají vztahy se spolužáky a s učiteli.

Badatelé nejčastěji definují klima sdílenými percepcemi různých prvků či jevů v prostředí školy (R. Pekrun, 1985). Klima je představováno jako konfigurace znaků prostředí, které jsou vnímány. Podle B. Langeho, H. Kuffnera a R. Schwarzera (1983)

jsou klimatem znaky školy ve vnímání žáků. Rovněž H. Dreesmann (1979, 1982 b) zdůrazňuje význam subjektivního prožívání a posuzování objektivního učebního prostředí a charakterizuje klima jako znaky vyučování, které prožívají žáci a které odpovídá určité psychologické situaci (H. Dreesmann, 1981). Vedle vnímání žáků vědce zajímá, jak je prostředí školy hodnoceno učiteli, vedením, rodiči atd.

Klima je psychosociální fenomén, který se vytváří odrazem objektivní reality (prostředí školy) v subjektivním vnímání, prožívání a hodnocení jeho posuzovatelů (žáků, učitelů, rodičů, ředitele). Jde o dlouhodobý jev. Klima školy může mít různé varianty: klima výuky a třídy, klima učitelského sboru, organizační klima atd.

Co můžeme považovat za činitele, které klima školy konstituují? Faktorů vlivu na klima je v prostředí mnoho, a to pozorovatelných i nepozorovatelných. Nelze však udělat jejich úplný výčet, protože je jich právě takové množství a jsou na různých úrovních obecnosti. Proto si všimneme pouze některých, jež byly předmětem výzkumů, zaměříme se na dílčí problémy, nebo jen na určitá specifika.

N. Janke (2006, s. 59) shrnula různé vlivy na klima školy. Všímal si jak vnějších, tak vnitřních aspektů. Zkoumala znaky kultury (epocha a společnost), školního systému a druhu školy, učitelů a žáků. H. Dreesmann et al. (1992) kromě toho ještě vyzvedli vnitřní organizaci školy (ročníky, velikost tříd a školy, obory, disciplíny, předměty), vlivy jejího objektivního prostředí (materiální prostředí a také znaky žáků a učitelů, interakce), vztahy k jiným prostředím (např. k rodině), procesy, obsahy, struktury. Podobně přistupovala i R. Seebauer (2005) a uvedla, že jako faktory klimatu školy připadají v úvahu: velikost školy a její organizační a kulturní danosti, rozsah požadavků kladených na výkon žáků a učitelů, trvání a intenzita mezilidských vztahů v rámci školy, realizace výuky, čas na aktivity mimo výuku, osobní vztahy, chápání rolí a chování učitelů, představitelů školy, žáků, rodičů, školníků, školní správy atd.

Za nejdůležitější činitele v prostředí školy a aktéry jejího klimatu však považujeme učitele a žáky. Z tohoto důvodu se budeme v dalším textu věnovat právě jim, i když si uvědomujeme, že klima školy není závislé jen na učitelích a žácích, nýbrž na vzájemných vztazích všech faktorů.

Osobnost učitele

„...těmto dětem nebyl nejprospěšnější jako tvůrce chytrých pomůcek, ale jako člověk, který ve svém životě dělal pár zajímavých věcí, který měl spoustu zájmů, měl rád knihy, čtení, psaní, sport a ze všeho nejvíce hudbu, který s nimi měl většinou trpělivost a byl laskavý, ale který se také občas uměl pořádně rozzlobit, který nepředstíral, že je něčím jiným, než čím byl, ale obvykle říkal, co si myslí a dával najevo, co cítí, a především je měl rád, těšil se z nich a respektoval je...“ (J. Holt, 1994, s. 118)

H. Schröder (1991, s. 138) představuje učitele jako pomocníka přírodě, společenského činitele, konstruktéra chování, reprezentanta skutečného lidství, osobnost. Učitel plánuje a organizuje výuku, vede žáky k osvojování poznatků ve formě vědomostí, řídí proces utváření dovedností, rozvíjí jejich schopnosti, potřeby, zájmy, plní výchovné úkoly. Žádná technika (audiovizuální, učební programy atd.) není schopná reagovat na množství variant konkrétních okolností a ani předvídat, k jakému novému poznatku přivede třídu společná myšlenková práce a jaká úloha se bude muset řešit. Učitel působí ovšem i jako vzor dospělého člověka - především svými postoji, vyspělostí, mravními zásadami atd. (H. Grecmanová, D. Holoušová, E. Urbanovská, 1997, s. 186). Celou svojí bytostí, tím, jaký je a co činí, se podstatně podílí

na vývojovém procesu dítěte. Je-li v jeho zájmu rozvinout osobnost žáka, musí sám touto osobností být.

Jak již bylo řečeno, učitel je významným činitelem klimatu školy. Jeho **věk, pohlaví, postoje k výuce atd.** však ovlivňují klima školy různou intenzitou.

Věk a délka praxe

Pro organizační klima školy se jeví jako málo významné objektivní znaky učitelů (např. věk, délka pedagogické praxe, pohlaví). To potvrdil také R. Bessoth (1989a) a zdůraznil, že se proto vůbec nesledují. Ojedinelé studie informovaly o tom, že školy s mladšími kolegy mají méně dobré klima než školy se staršími kolegy (A. R. Thomas, 1976). Tuto myšlenku potvrdila i K. Horváthová (2005), která zjistila, že nejhůře hodnotí klima školy učitelé věkové kategorie 31-35 roků. Nejpozitivněji vnímají klima věkově nejstarší učitelé. Zmíněné údaje však nebyly prokázány ve výzkumech G. J. Andersona, H. J. Walberga a W. W. Welcha (1969), kteří objevili, že ve třídách mladých učitelů je více demokratického chování a solidarity.

Při vstupu do praxe je učitelova dominantnost poměrně nízká, plynule však stoupá během prvních deseti let, potom se stabilizuje (J. Mareš, P. Gavora, 2004). U mladých učitelů se často neobjevuje tvorba „klik“, nedochází k přetěžování žáků, mezi jednotlivými žáky se méně vyskytují konflikty. U relativně nezkušených učitelů mají žáci pocit, že se učí společně s učitelem a že výuka je jejich společným úkolem. To vede většinou k pozitivnímu klimatu (G. J. Anderson, H. J. Walberg a W. W. Welch, 1969). Musíme však přiznat, že začínající učitelé mají také častěji problémy s disciplínou ve třídě, motivací žáků, přizpůsobením se jejich individuálním zvláštnostem, hodnocením žáků, rozvíjením vztahů s rodiči atd. Jejich vstřícnost vůči žákům je však již na začátku na relativně vysokých hodnotách a v průběhu let se příliš nemění, jen mírně klesá (J. Mareš, P. Gavora, 2004). Zkušení učitelé pracují zřejmě zase více rutinně. V jejich práci se někdy objevuje sklon k perfekcionismu. To blokuje aktivní účast žáků na výuce. Čím jsou učitelé zkušenější, tím větší odpovědnost si přisuzují za úspěchy žáků a zároveň menší odpovědnost za jejich neúspěchy. Můžeme také říci, že vidí situaci realističtěji. Objektivněji rozpoznávají omezenost svého působení a výrazný vliv různých jiných činitelů v průběhu výuky. Problém je, že s přibývajícím věkem klesá u učitelů pocit uspokojení z práce s dětmi a mládeží a narůstá pocit fyzické únavy a psychického stresu (H. Dreesmann, 1982 b, s. 137, srovnej J. Průcha, 1997, s. 212). Špatný zdravotní stav učitele může vést k všeobecně podrážděnému klimatu s tak malým stupněm tolerance a trpělivosti, že i nepatrné podněty vedou ke konfrontaci a k problémům (H. Fend, 1977).

Přestože R. H. Moos (1979) nemohl nalézt žádné souvislosti mezi zkušenostmi učitelů a klimatem, K. Horváthová (2005) je zjistila a vyjádřila se, že čím déle jsou učitelé v pedagogických službách, tím častěji vnímají klima školy jako lepší, jak již bylo řečeno. Tento vztah by bylo ale vhodné ještě dále sledovat, protože ze zkušeností víme, že služebně starší učitelé si vybavují v souvislosti se školou také hodně negativních pocitů.

Pohlaví

Souvislost mezi pohlavím učitelů a klimatem výuky byla středem pozornosti ještě častěji. Závěry některých starších výzkumných šetření ovšem nepřikládaly účinku pohlaví učitele na klima žádný zvláštní význam, protože mezi působením učitele a učitelky se neodhalily žádné rozdíly. Rozdílnost pohlaví neměla vliv ani na vnímání

pracovní zátěže (E. Urbanovská, P. Kusák, 2005). Další a novější výzkumy však potvrdily, že ovlivňování klimatu učitelem nebo učitelkou není zanedbatelné. Podle F. Masendorfa a K. Tschernera (1973) byly jako přísnější vnímány učitelky. K podobným závěrům dospěli také G. J. Anderson (1971), B. S. Randhawa a J. O. Michayluk, (1975), M. N. Olson (1971). Kromě toho, že jsou učitelky přísnější, ještě zjistili, že vedou výuku formálněji a více se zaměřují na cíl. Lépe než učitele - muže vnímají žáci ženy ve výuce přírodních věd. S učitelkami pocítují výuku jako méně obtížnou. Výsledky R. H. Moose (1979) potvrdily spíše obvyklé mínění, že učitelky vytvářejí klima orientující se na vztahy a inovace. Také J. Průcha (1997) uvedl, že učitelky se podílejí na klimatu, kde je více „tepla“, připravenosti ke změnám a hravého soupeření. F. Eder (1996) zjistil, že ve třídách, v nichž vyučuje více učitelek, roste vnímání orientace na žáky (jsou ve středu pozornosti), disciplíny a tlaku na výkon. Rovněž se objevil jistý náznak lepších výsledků učitelů než učitelek, který může být vysvětlen zaneprázdněností učitelek ve vlastní rodině. Z toho vyplývá menší množství času na vlastní pedagogickou přípravu (J. Průcha, 1997).

Ve prospěch učitelek vyplynuly výsledky výzkumného šetření uskutečněného na slovenských gymnáziích. Ženy byly hodnoceny jako lepší organizátorky než muži a současně měly nižší skóre v proměnné nejistota ve srovnání s muži (J. Mareš, P. Gavora, 2004). Mladší učitelky posuzují žáci pozitivněji než jejich starší kolegyně. Vliv pohlaví učitelů se přitom zjistil ve větších třídách, v nichž je více dívek. Podle K. Horváthové (2005) vnímají učitelé muži v porovnání se svými kolegyněmi klima školy příznivěji.

Postoje

Významnější než demografické znaky se jeví postoje učitelů ve vztahu k jejich profesi. Ke zvláště významným patří učitelova senzibilita, schopnost empatie, akceptování žáků a respekt k nim, svobodné jednání. V této souvislosti se psychologové I. Plevová a P. Kusák (2006) zmiňují o čtyřech požadavcích na postoje učitele k žákům: kongruence (soulad mezi prožíváním a chováním, přístup bez přetvářky), empatie, bezpodmínečné pozitivní přijetí, konzistence (stálost v těchto charakteristikách). V. Spousta (2003) ještě požaduje angažovanost, prosociálnost a toleranci.

Postupujeme-li třídu od třídy, dá se zjistit, zda učitel projevuje neformální zájem o výuku a žáky, či nikoli, zda chápe své vyučování jako izolované interní dění, nebo jako světu otevřené a životu blízké poznávání (F. Oswald et al., 1989). Učitel, který klade do popředí sociální a osobní vývoj žáků, více stimuluje jejich aktivitu, hovoří s nimi o průběhu učení a o učebních úspěších a vyhýbá se rutině. Učitel, jenž vysoce hodnotí kontrolu a vedení, diskutuje se žáky o obsahových otázkách, má větší sklon k rutině a k menší aktivizaci žáků. Učitel, který se zajímá o přírodní vědy, řídí vyučovací aktivity tak, že se zde uplatňuje více interakce mezi žáky a učivem, avšak vzniká méně afektivních situací (např. pochvaly a povzbuzování žáků). Rozhodující vliv na utváření postojů učitele k výuce mají jeho všeobecné, odborné a profesionální znalosti.

H. Fend (1977) hovořil o příznivějším klimatu u progresivních učitelů, kteří jsou nakloněni reformě. Progresivní učitelé se vyznačují optimistickým pohledem na člověka, doporučují sounáležitost se skupinou, vysoce hodnotí samostatnost, méně často požadují konformitu a kriticky se staví proti tlaku na výkon. Tak to vnímají žáci (srovnej H. Fend, 1986, s. 184). Konzervativní učitelé sázejí spíše na konformitu a na ctnosti jako poslušnost, disciplína a pořádek. K podobným výsledkům došli i D. J. McIntyre et al. (1982).

Také R. H. Moos (1979) informoval o souvislostech mezi postoji učitelů a klimatem v jejich třídě (N. Janke 2006, s. 60, 61). C. S. Anderson (1982) shrnula studie, podle nichž koreluje pracovní morálka s klimatem, jež pedagogové vnímají: Učitelé, kteří jsou spokojenější s prostředím školy, popisují klima pozitivněji. Jiné studie upozornily na to, že spokojenost učitelů působí jak na klima, tak na jejich výkony.

H. Fend (1986) chápal individuální chování učitelů jako jeden ze zásadních faktorů vlivu na charakteristiku klimatu. Potvrdil to při výzkumných šetřeních, která prováděl na různých školách. Také M. Jerusalem a M. Schwarzer (1991, s. 126) zjistili, že chování učitele, které žáci vnímají, je důležitým aspektem klimatu výuky. E. Petlák (2006, s. 38, 39) uvádí klasifikaci tzv. „neklidných“ učitelů od R. Winkela, protože je rovněž přesvědčen o specifickém vlivu jejich různých typů na klima podle toho, jak se před žáky projevují. Analyzuje učitele hypermotorického, vnitřně napjatého, úzkostlivého, bojácného a nejistého, agresivního, šířícího strach, vnitřně nepřítomného, nepřipraveného, nepozorného, upřednostňujícího výkon, „ženoucího“ se od jednoho výukového cíle k druhému, přetíženého a přetěžujícího se. Stejný autor se ještě dále zmiňuje (E. Petlák, 2006, s. 40-42) o učitelích: úředníkoví, dozorcí, tyranovi, předstírajícím práci, „falešném příteli“, „starém chytrákovi“, „mistrovi“ – odborníkoví, průvodci, rodiči, „dobré tetě (strýci)“.

Jako příklad můžeme uvést zajímavá zjištění, která plynou z chování učitele jako autority. Učitelé, kteří jsou náchylní k prosazování moci, vytvářejí formální a hierarchické klima. Žáci jsou v roli poddaných. U autoritativních učitelů se objevuje distance mezi učitelem a žáky, izolace jednotlivých žáků od spolužáků, ctižádostivé soutěžení mezi jednotlivci nebo opoziční postoje. J. Mareš a P. Gavora (2004) k tomu ještě dodávají, že u učitelů, kteří jsou přísní a často kárají, mají žáci raději práci ve skupinách, častěji se dostávají do sporů s učitelem, preferují učení nápodobou. Dále tito badatelé představují učitele chápající, jejichž žáci častěji vyjadřují své názory, a upozorňují, že u pomáhajících a přátelských pedagogů mají žáci pocit spravedlnosti, rádi spolupracují, pociťují soulad mezi učením ve škole a doma, dávají přednost učení před nápodobou. Učitel se silnou potřebou sociální interakce má častěji třídu, ve které se setkáme s kontrolou a orientací na cíl. Žáci zde pociťují nepatrnou vzájemnou blízkost zřejmě proto, že učitel poutá afektivní interakci ve třídě na sebe. J. Holt (1995, s. 134) hovoří v tomto smyslu o učitelích, kteří mají v každém okamžiku všechno pod kontrolou a rádi se považují za jediný zdroj všeho poznání. Někteří jsou vedeni touhou po moci, jiní zase zoufalou potřebou cítit se užitečnými a nenahraditelnými pro své žáky. U učitelů, kteří se orientují především na sebe a méně na žáky, může být vyučování méně organizované a disciplinované. Takové výuky si žáci všeobecně méně cení.

Ve výzkumné sondě z roku 1994, realizované na 2. stupni jedné základní školy v Olomouci jsme se setkali s tímto názorem žáků: „...*přísnost učitelů je nutná, jinak je hodina neukázněná. Žáci, kteří jsou zkoušeni před tabulí, musí okřikovat své spolužáky, kteří ruší, protože učitel na jejich nevhodné chování nereaguje a potom neslyší odpovědi zkoušených...*“ (V. Vladařová, nepublikované texty)

Jaké může být v tomto případě klima ve výuce? Domníváme se, že odpověď ani nemusí být formulována. Pedagogové si dokáží popisovanou situaci představit. V každém případě je klima ovlivněno specifickou pedagogickou interakcí, kterou tvoří učitel a žáci. Proto se také dále budeme více věnovat osobnosti žáka. Zaměříme se na znaky: pohlaví, sociální původ, kognitivní schopnosti, sebekoncepci, motivaci, zájmy a postoje.

Osobnost žáka

Žáci jsou na jedné straně pramenem k pochopení klimatu školy, na druhé straně jsou jako členové třídy nebo školy jeho spolutvůrci, a mají tak na klima dvojí vliv. Osobní znaky žáků můžeme sledovat jako jejich individuální znaky nebo znaky (vlastnosti) třídy. Účinky individuálních a kolektivních znaků žáků na klima však přímo souvisejí. Proto je představujeme v tomto textu společně (N. Janke, 2006, s. 63, 64, 65).

Pohlaví

V průběhu zjišťování souvislostí mezi pohlavím žáků a vnímáním klimatu zveřejnil M. Saldern (1987) výsledky, že je výjimkou, když chlapci hodnotí klima pozitivněji. Potvrdil to rovněž F. Eder (1996), když sdělil, že žákyně oceňují klima o něco příznivěji než jejich spolužáci téměř ve všech dimenzích. Došel k závěru, že ve třídách, v nichž jsou pouze děvčata, se pociťuje zřetelně méně tlaku v sociální oblasti, na výkon a disciplínu. Třídy s převládajícím počtem dívek vykazují v dimenzi sociálního tlaku, tlaku na výkon a soudržnosti pozitivnější hodnoty než třídy, ve kterých je více chlapců. Čím více dívek je ve třídě, tím jsou lepší vzájemné vztahy mezi žáky, tím méně je hádek a tím větší je všeobecná angažovanost a spokojenost ve výuce (srovnej H. J. Walberg, A. Ahlgren, 1970). Také A. Helmke a F. E. Weinert (1997) poukázali na signifikantně pozitivní korelace mezi podílem dívek ve třídě a hodnocením klimatu třídy. Ve výuce matematiky se však objevují rozdíly. Dívky vnímají méně naděje na úspěch, méně prožívají kamarádské vztahy a posuzují vyučování jako méně srozumitelné. Tyto výsledky jsou podle mínění vědců specifické jen pro matematiku a neplatí pro jiné předměty. Podle R. H. Moose (1979) je ve třídě s vyšším podílem chlapců patrné klima silněji orientované na strukturu a kontrolu. H. Fend (1977) ale nenašel žádné systematické souvislosti mezi znaky klimatu a pohlavím. Totéž potvrdila i B. Fischer (2003, s. 169), která uvedla, že u faktoru pohlaví nezjistili badatelé žádné rozdíly. To znamená, že chlapci i děvčata posuzovali klimatické dimenze stejně.

Sociální původ

Výstupy z výzkumů zaměřených na sociální původ nejsou konzistentní. F. Eder (1996) sdělil, že děti z vyšších sociálních vrstev prožívají méně koheze a disciplíny. Žáci z „horní vrstvy“ (otcové jsou vysokoškolsky vzděláni) pociťují, že jejich učitelé se málo angažují, vystupují restriktivně a nespravedlivě, vztahy ke spolužákům hodnotí jako více nepříznivé a vnímají méně pohotovosti k učení a disciplíny ve třídě. Žáci ze „spodní vrstvy“ (otcové mají pouze základní vzdělání, popřípadě jsou vyučení) popisují klima celkově a především v oblasti vztahů mezi žáky jako příznivější. Ve srovnání s tím S. B. Khan a J. Weiss (1973) informovali o zřetelně negativnějších postojích vůči škole a učitelům u žáků s nižším socioekonomickým statutem. H. J. Walberg s kolektivem (1972) potvrdili, že čím je větší počet žáků s vysokým socioekonomickým statutem, tím méně prožívají žáci ve výuce konkurenci, avšak žáci s nízkým socioekonomickým statutem ve třídě prožívají více konkurence. S ohledem na větší počet dětí z vyšších sociálních vrstev roste patrně tlak na děti z chudších poměrů spolupracovat s druhými a vnímat své šance.

Kognitivní schopnosti

Význam kognitivních schopností na klima sledovalo také několik výzkumníků. Přestože H. Dreesmann (1979) a T. H. Kahl et al. (1977) nenašli žádné vztahy mezi inteligencí a vnímáním klimatu, podle M. Salderna (1987) prožívají školní prostředí

pozitivněji žáci se středními kognitivními schopnostmi. V individuálních případech však můžeme konstatovat, že inteligentnější žáci mohou lépe sledovat výuku. Vnímají větší šanci na úspěch svého úsilí spolu s větší mírou disciplíny. F. Eder (1996) informoval o tom, že dobří žáci pocítují méně tlaku na výkon. Žáci s výkonnostními problémy, můžeme rovněž říci slabší žáci, se vyjadřovali k dimenzím klimatu méně pozitivně (B. Fischer, 2003, s. 169). Příčinou může být to, že tito žáci prožívají svoji sociální pozici jako vyloučení z kolektivu třídy a cítí se méně spjatí se sociálním kontextem třídy. Děti s nižší inteligencí nemají tolik příležitosti zažít úspěch. To může podlamovat jejich sebedůvěru. Nepochopení učiva a zjevná snížená úroveň myšlení mohou vyvolávat u učitele podrážděnost a rozčilování, které situaci jen zhoršují a ústí ve frustraci a pocit prohry. Frustrace bývá příčinou mnoha problémů chování, které žáci s nižším IQ často vykazují (Fontana, 1997). H. Fend (1977) označil počet žáků, kteří opakují třídu, jako indikátor výkonu třídy. Ve třídách s velkým počtem žáků, kteří opakovali, byl podle jeho studie větší tlak na přizpůsobení. Můžeme konstatovat, že žáci s horšími výkony vnímají učební prostředí a sociální klima zpravidla méně příznivě. Ukázalo se však, že výkonnostní možnosti žáků ovlivňují klima ve výuce pouze v dimenzi „těžkosti“. Avšak ve třídách, v nichž dosáhli lepších výkonů při testu z matematiky, se žákům výuka jevila lehčí.

Sebekoncepce

Žák s pozitivní sebekoncepcí vstupuje do výuky s představou úspěchu, považuje ji za méně obtížnou a srozumitelnější. Totéž platí pro žáky, kteří mají lepší známky. Můžeme předpokládat, že tito žáci se budou ve větší míře zapojovat do výuky, budou spolupracovat s učitelem a se spolužáky, budou ochotněji respektovat učitelovy pokyny. Vytvoří-li jim učitel prostor, budou participovat na tvorbě a průběhu vyučování. Výuka má pro takové žáky smysl. Vnímají ji nejen jako možnost získat nové informace, ale rovněž jako příležitost být oceněni za určitou práci a námahu, což je dále posiluje. J. Holt (1995, s. 36) konstatuje: *„Když cítíme, že jsme silní a kompetentní, vrhneme se na složitější úkoly. Obtížnost nás neodradí, řekneme si: Dříve, nebo později to zvládnou. Jindy si pouze pomyslíme: To nikdy nezvládnou, je to na mne moc, tohle mi nikdy nijak zvlášt' nešlo. Kus dobrého učení je ve schopnosti rozpoznat, co si žáci v danou chvíli zrovna o dané úloze myslí... Když jsou lidé v krizi, je zbytečné na ně tlačit nebo naléhat, to je jenom poděsí a ještě více odradí. Musíme se vrátit, odstranit napětí, uklidnit je, utěšit, dát jim čas, aby znovu získali ztracenou energii, a dodat jim odvalu k novému pokusu.“*

Motivace, zájmy a postoje

Souvislosti existují podle F. Edera (1996) také mezi motivací ke škole, zájmy žáků a vnímáním klimatu. Čím více se žáci zajímají o školu, tím příznivěji prožívají znaky klimatu, které se vztahují k pohotovosti učení a k interakci, např. podněty, orientaci na žáka, disciplínu a restriktivitu ve třídě, vřelost. Žáci, kteří nebývají častěji ve škole (také záškoláci), vnímají prostředí školy negativněji, především v oblasti vztahů k učitelům a spolužákům (M. Saldern, 1987). R. H. Moos (1979) zjistil, že ve třídách, kde je vyšší nepřítomnost žáků, pocítují přítomní žáci více soutěživosti a kontroly od učitelů.

K. E. Littig a M. Saldern (1986) sdělili, že vnímání klimatu ovlivňují postoje žáků ke spolužákům. Žáci, kteří jsou velmi kooperativní, posuzují všechny znaky klimatu výuky (vzájemné vztahy mezi žáky, vztahy mezi učitelem a žáky a znaky

výuky) spíše pozitivně, kompetitivně zaměřeni žáci proti tomu spíše negativně. E. Petlák (2006, s. 44–48) připomíná rozdílné projevy chování u žáků nepoddajných a zlých, obětí, třídních „šašků“, „lídrů“ a „outsiderů“, třídní elity, žákovských párů atd. v tom smyslu, že všichni se nechovají stejně a různým způsobem mohou ovlivňovat vztahy ke spolužákům a narušovat klima třídy. Zjistilo se totiž, že žáci považují vztahy mezi spolužáky za velmi významný faktor podílející se na charakteristice klimatu. M. Rosolová a S. Střelec (2003) dokonce došli k závěru, že je nejvýznamnější ve srovnání s „klimatotvornými“ činnostmi učitelů a nebo např. vlivem materiálního prostředí.

Závěr

Podle H. Fenda (1977) je klima školy dáno tím, co učitel a žáci každodenně dělají a do jaké míry je jejich činnost ovlivněna institucionálními podmínkami. **Klima školy** chápe tento badatel jako **druh a způsob, kterým se v organizované formě provádějí socializační procesy a prožívají institucionální vztahy**. Z definice klimatu vyplývá, že jeho kvalitu určuje kvalita sociálních vztahů mezi učiteli a žáky a žáky navzájem. Proto by učitelé neměli být vnímáni jako osoby, které jsou žákům vzdáleny, nebo které veškeré dění jen pozorují a potom rozhodují. Jde také o to, jak učitel dokáže zachovat rovnováhu mezi rolí nepopulární, kdy dává známky a dělá pro žáky nepříjemná rozhodnutí, a kladnou, kdy je představitelem velmi blízkého člověka, který se před žáky „otevívá“ a přibližuje jim svoje soukromí. Rozhodně by neměl žáky stále jen kritizovat, ale vnímat jejich postoje, motivy a životní podmínky. Žáci potřebují čas, než získají důvěru ke svým učitelům a k sobě navzájem (E. Petlák, 2006). Ze vztahů mezi žáky ve třídě by se proto mělo odstraňovat egoistické chování zaměřené na výkon a soutěžení bez ohledu na potřeby spolužáků. Postupně by se měla posilovat soudržnost a solidarita, vzájemná pomoc, pochopení a schopnost řešit problémy. Těmito způsoby lze přispět k vytvoření příznivého klimatu.

Literatura

1. Anderson, C.S. (1982). The search for school climate: A review of the research. *Review of Educational Research*, 52 (3), 368-420.
2. Anderson, G. J. (1971). Effects of course content and teacher sex on the social climate of learning. *American Educational Research Journal*, 8, 649-663.
3. Anderson, G. J., Walberg, H. J., Welch, W. H. (1969). Curriculum effect on the social climate of learning: A new representation of discriminant functions. *American Educational Research Journal*, 6, 315-328.
4. Bessoth, R. (1989 a). *Organisationsklima an Schulen*. Neuwied: Luchterhand.
5. Dreesmann, H. (1979). *Das Unterrichtsklima als situative Bedingung für kognitive Prozesse und Leistungsverhalten von Schüler*. Heidelberg: Wirtschafts- und Sozialwissenschaftlichen Fakultät der Universität.
6. Dreesmann, H. (1982 a). Neuere Entwicklungen zur Erforschung des Unterrichtsklimas. In Treiber, B., Weinert, F. E. (ed.), *Lehr-Lern-Forschung. Ein Überblick in Einzeldarstellungen*. (177-179). München: Urban und Schwarzenberg.
7. Dreesmann, H. (1982 b). *Unterrichtsklima*. Weinheim: Beltz.
8. Dreesmann, H. (1981). Zur Beziehung zwischen Rechenleistung, kognitiven Variablen und Unterrichtsklima. *Zeitschrift für Empirische Pädagogik*, 5, 83-96.

9. Dreesmann, H., Eder, F. Fend, H., Pekrun, R., Saldern, M., Wolf, B. (1992). Schulklima. Eine Bestandaufnahme der Forschung in der Bundesrepublik Deutschland. In Ingekamp, K. Jäger, R. S., Petilon, H., Wolf, B. (ed.), *Empirische Pädagogik 1970–1990* (655-682). Weinheim: Deutscher Studien Verlag.
10. Eder, F. (1996). *Schul- und Klassenklima. Ausprägung, Determinanten und Wirkungen des klimas an höheren Schulen*. Innsbruck: Studien Verlag.
11. Fend, H. (1986). „Gute Schulen – schlechte Schulen“. Die einzelne Schule als pädagogische Handlungseinheit. *Die deutsche Schule*, 78, 175-193.
12. Fend, H. (1977). *Schulklima: Soziale Einflussprozesse in der Schule*. Weinheim: Beltz.
13. Fischer, B. (2003). *Soziales Lernen an einer Reformschule. Evaluationsstudie über Unterschiede von Sozialisationsprozessen in Reform- und Regelschulen*. Weinheim, München: Juventa.
14. Fontana, D. (1997). *Psychologie ve školní praxi*. Praha: Portál.
15. Grecmanová, H. et al. (1997 a). *Obecná pedagogika I*. Olomouc: HANEX.
16. Grecmanová, H. et al. (1998 b). *Obecná pedagogika II*. Olomouc: HANEX.
17. Helmke, A., Weinert, F. E. (1997). Unterrichtsqualität und Leistungsentwicklung: Ergebnisse aus dem SCHOLASTIK-Projekt. In Weinert F. E., Helmke, A. (ed.), *Entwicklung im Grundschulalter* (241-251). Weinheim: Beltz.
18. Holt, J. (1995). *Jak se děti učí*. Praha: Agentura Strom.
19. Holt, J. (1994). *Proč děti nepropívají?* Praha: Agentura Strom.
20. Horváthová, K. (2005). Klíma školy. *Pedagogická orientace*, 1, 37-45.
21. Janke, N. (2006). *Soziales Klima an Schulen aus Lehrer-, Schulleiter- und Schülerperspektive. Eine Sekundäranalyse der Studie „Kompetenzen und Einstellungen von Schülerinnen und Schülern – Jahrgangsstufe 4 (KESS 4)“*. Münster: Waxmann.
22. Jerusalem, M., Schwarzer, R. (1991). Entwicklung des Selbstkompetenz in verschiedenen Lernumwelten. In Pekrun, R., Fend, H. (ed.), (115-128).
23. Kahl, T. N., Buchmann, M., Witte, E. H. (1977). Ein Fragebogen zur Schülerwahrnehmung unterrichtlicher Lernsituationen. *Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie*, 9 (4), 277-285.
24. Khan, S. B., Weiss, J. (1973). The teaching of affective response. In Travers, R. M. W. (ed.), *Second Handbook of research on teaching*. (759-804). Chicago: McNally.
25. Lange, B., Kuffner, H., Schwarzer, R. (1983). *Schulangst und Schulverdrossenheit. Eine Längsschnittanalyse von schulischen Sozialisationsseffekten*. Opladen: Westdeutscher Verlag.
26. Littig, K. E., Saldern, M. (1986). Das Sozialklima in Schulklassen aus der Sicht von kooperativ bzw. kompetitiv orientierten Schülern. *Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie*, 18 (3), 262-273.
27. Mareš, J., Gavora, P. (2004). Interpersonální styl učitelů: teorie, diagnostika a výsledky výzkumů. *Pedagogika, LIV* (2), 101-121.
28. Masendorf, F., Tscherner, K. (1973). Aspekte des Interaktions- und Unterrichtsstils von Lehrern aus der Sicht der Schüler. *Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie*, 5 (2), 73-90.
29. McIntyre, D. J., Copenhaver, R. W., Jacko, A. M. et al. (1982). Pupils perceptions of the influence of preservice teachers on classroom environment. *The Teacher Educator*, 1, 2-7.

30. Moos, R. H. (1979). *Evaluating educational environments. Procedures, measures, findings and policy implications*. San Francisco: Jossey Bass.
31. Olson, M. N. (1971). Ways to achieve quality in school classrooms: Some definitive answers. *Phi Delta Kappan*, 53, 63-65.
32. Oswald, F., Pfeifer, B., Ritter-Berlach, G., Tanzer, N. (1989). *Schulklima. Die Wirkungen der persönlichen Beziehungen in der Schule*. Wien: Universitätverlag.
33. Pekrun, R. (1985). Schulklima. In Twelmann, W. (ed.), *Handbuch Schule und Unterricht. Bd. 7.1.* (524-547). Düsseldorf: Schwann.
34. Petlák, E. (2006). *Klíma školy a klíma triedy*. Bratislava: IRIS.
35. Plevová, I., Kusák, P. (2006). Etika ve vztahu učitele k žákovi: teorie a skutečnost. *e-Pedagogium*, 3, 53-62.
36. Průcha, J. (1997). *Moderní pedagogika*. Praha: Portál.
37. Randhawa, B. S., Michayluk, J. O. (1975). Learning environment in rural and urban classrooms. *American Educational Research Journal*, 12, 265-285.
38. Rosolová, M., Střelec, S. (2003). Klíma na střední škole v retrospektivním pohledu studentů učitelství. In Chráska, M., Tomanová, D., Holoušová, D. (ed.), *Klíma současné české školy. Sborník příspěvků z 11. konference ČpdS.* (328-335). Brno: KONVOJ.
39. Saldern, M. (1987). *Sozialklima von Schulkassen. Überlegungen und mehrbenenanalytische Untersuchungen zur subjektiven Wahrnehmung von Lernumwelten*. Frankfurt/M.: Lang.
40. Seebauer, R. (2005). Školská a triedna klíma: rakúsky pohľad. *Pedagogická revue*, 57 (4), 349-361.
41. Schröder, H. (1991). *Eriehtungsziel: Persönlichkeit*. München: Michael Arndt.
42. Spousta, V. (2003). Osobnost učitele – spolutvůrce školního klimatu. In Chráska, M., Tomanová, D., Holoušová, D. (ed.), *Klíma současné české školy. Sborník příspěvků z 11. konference ČpdS.* (350-357). Brno: KONVOJ.
43. Thomas, A. R. (1976). The organizational climate of schools. *International Review of Education*, 22, 441-456.
44. Urbanovská, E., Kusák, P. (2005). Syndrom vyhoření ve vztahu k vnímání pracovní zátěže. In Kusák, P. (ed.), *Psychologické otázky výchovy, vzdělávání a poradenství. Sborník příspěvků.* (101-115). Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci.
45. Vladařová, V. Nepublikované texty.
46. Walberg, H. J., Thomas, S. C. (1972). Open education: an operational definition and validation in Great Britain and the United States. *American Educational Research Journal*, 9, 197-208.
47. Walberg, H. J., Ahlgren, A. (1970). Predictors of the social environment of learning. *American Educational Research Journal*, 7, 153-167.

Kontaktní adresa

Doc. PhDr. Helena Grecmanová, Ph.D.
 Katedra pedagogiky
 Pedagogická fakulta Univerzity Palackého
 Žižkovo nám. 5
 Olomouc 771 40
 Telefon: +420 585 63 51 55
 E-mail grecman@pdfnw.upol.cz

THE NATIONAL AND INTERNATIONAL IMPACT OF FINLAND'S PISA RESULTS ON PRIMARY TEACHER EDUCATION

George MALATY

Abstract

Primary Teacher Education in Finland looks ideal for most educationalists. But, mathematics and mathematics education have only 2% of the study program. This takes about two weeks out of the Five years of study. For years, mathematics educators have tried to improve this situation. PISA results give justification to a harder opposition of educationalists to such attempts. Thousands of educationalists and education policy makers have visited Finland to get a model for improving education in their countries, including Teacher Education. The success in PISA is not related to strengths we have in Teacher Education Programs. PISA does not measure mathematics understanding.

1. Finland Successes in PISA and Teacher Education

Finland is a country of only about 5.277 millions inhabitants (Finland Statistics 2006), which gives a density of 17.43 people per square kilometer of land. Through history, old and new, Finnish people have faced different challenges to survival and success. In responding to recent time challenges, from time to time we got to hear about a Finnish success, some of which has been surprising. The success in PISA in 2000 was one of such type of successes. The success in mathematics has surprised not only common people, but it as well surprised mathematicians and mathematics educators outside and inside Finland. In 2003, the situation was quite different. Finland's success, then, has been confirmed by gaining the First place among the OECD countries.

The results of 2003 brought to us self-confidence on our Finnish Education. Few months after the announcement of the results, on December 6, 2004 the Finnish National Board of Education (**FNBE**) organized in March 14-16, 2005 an International Conference on "**Finland in PISA-studies – Reasons behind the Results**". This conference was attended by hundreds of Educationalists and Educational authorities, from around the world. The FNBE organized in the same year two International Seminars related to the success of Finland in PISA. Teacher Education in Finland was one of the themes of these three events.

<http://www.oph.fi/english/txtpageLast.asp?path=447,2783,55151,39043,39046>

<http://www.oph.fi/info/pisahelsinki/>

<http://www.oph.fi/info/pisahelsinki2/>

In every country, educationalists and educational authorities; in particular education policy makers, have to do all there best to develop the education of their children. Finland success in PISA has made such people interested of exploring the reasons behind this success. At the mentioned above events, and others later, **Finnish Teacher Education** was stressed as a major factor behind the success in PISA. This

includes not only mathematics teacher education, but as well Primary Teacher Education and Special Teacher Education.

1.1. Teacher Education Strengths, Primary teacher Education Weaknesses and PISA Impact

In 2005, the FNBE invited me to the Conference of March 14-16, to speak on behalf of Finnish mathematics educators, about the reasons behind the success of Finland in PISA. Among others I spoke about 3 reasons related to teacher education and teacher profession. The mentioned 3 reasons were: 1) *the success of pre-service teacher education*, 2) *the culture of the teaching profession* and 3) *the success of in-service teacher education* (Malaty 2006, 59-61).

Regards Primary Teacher education, beside two aspects of our strengths in Primary Teacher Education, I discussed the weaknesses we have in Primary Teacher education. The problem here is that nobody else at this conference, or at any other related international event, has mentioned to any weakness we have. Here to notice that **the main speakers** at such events are Educationalists or Educational authorities, those who have no relation with mathematics or mathematics education.

The strengths in Primary Teacher Education, which were mentioned by me at the FNBE Conference, were: a) *keeping the level of teacher education qualification high*, and b) *being able to recruit motivated students*.

Regarding *the high teacher education qualification* of Primary Teachers, I mentioned to the fact that every Primary Teacher must achieve a Master degree in Education (M.Ed.). But, as I mentioned above, I also discussed the weaknesses we have in Primary Teacher Education. The main weakness is related to the program of our Primary Teacher Education. The problem here is that, where this weakness is evident to every mathematics educator, Finnish Educationalists have find in PISA results a reason to make stress on the efficiency of Primary Teacher Education.

Primary Teacher Education is mainly a study of education, and this brings to us great weaknesses. At the FNBE conference, I mentioned to the fact that the part of Educational Studies is remarkably high, of not less than 52%, and it could reach 74% of Primary Teacher Education Program. This brings great weakness in Mathematics and Mathematics Education of Primary Teachers. At the FNBE conference, I mentioned to the fact that the majority of students got a very modest study in mathematics and mathematics education. This part of study is of about only **2%** of the Primary Teacher Education Program. In terms of time, it takes about **two weeks** out of the five years of study for the M.Ed. This modest part of mathematics and mathematics education study has to be enough not only for teaching mathematics in the first 6 years of comprehensive schools, but also for writing detailed mathematical curricula and mathematical textbooks for these 6 years. In addition, I mentioned to the fact that, this modest study would be as well enough to even write a Ph.D. thesis in education with a topic related to mathematics education (Malaty 2004, 93-94). **Details** and other Primary Teacher Education problems are presented on the paper of 2004 (Malaty 2004, 93-100). An electronic version of this paper is available on the site of the FNBE Conference: <http://www.opf.fi/english/txtpageLast.asp?path=447,2783,55151,39043,39046>

From the above discussion, we can see that despite keeping the Primary Teacher Education qualification high, Primary Teacher Education in mathematics and mathematics education is a poor one. Here to mention that, the place of mathematics and mathematics education in Primary Teacher Education today is still the same and even worth. Surprisingly this has been affected by PISA results.

At the beginning of the 1970s, Primary Teacher Education has started to be the study of mainly education (Malaty 2004, 86-87). Today, this situation is more strengthened. The Staff of the Faculties of Education is mainly of Educationalists, and they have the needed authority to decide on the program of Primary Teacher Education. The results of PISA have allowed them to go further in neglecting the need to improve mathematics and mathematics education place in Primary Teacher Education. But; why our Educationalists neglect such evident need? The deep reason, behind, is related to the fact that, most of our Educationalists have been graduated as Primary School Teachers, where mathematics for most of them wasn't one of their interests. The next discussion explains this fact.

1.2. Primary Teacher Education Students Interests and the Reasons Behind

The strength of *being able to recruit motivated students* to apply for Primary Teacher Education is another fact of Finnish Primary Teacher Education. The problem is that, this does not mean that these applicants are motivated to teach mathematics. They are motivated to work with Primary Students aged children, and the youngest, of Grades 1-2, in particular. About school subjects, the most closed to their interest are Physical Education and Art, especially Music. Mathematics is not of interest to most of students. This also, I have discussed at the FNBE Conference of 2005. Among others, I mentioned to some facts related to the matriculation examinations. Only about 25% of the applicants for Primary Teacher Education attend matriculation examinations on what is known as 'long course' examination, 55% attend the 'short course' examination, and **20%** do not attend any matriculation examination on mathematics (Malaty 2004, 89). This situation is still unchanged.

The interest of applicants on Art and Physical Education, and not mathematics, is a logic outcome of our traditions. The last National Curriculum of Comprehensive School of 2004 gives an example of these traditions. Where three Art subjects and Physical education have **56** teaching hours per week, Mathematics and other 5 subjects of Natural Sciences; Environmental Studies, Physics, Chemistry, Biology and Geography, have together only **60** hours (FNBE 2004, 302). In addition, we do provide strong special education to gifted students in Physical Education and Arts. Among others, since the Third Grade we do have ***Musical Classes*** around the country. Mathematically gifted students get nothing similar to that in our schools. In addition, the number of teaching hours in mathematics in Finland is below the average inside and outside Europe.

1.3. Teaching Mathematics in Comprehensive Schools and Mathematics Teacher Education

PISA results are related to teaching mathematics in the whole Comprehensive School (Grades 1-9). In the first 6 grades Primary teachers are qualified to teach mathematics and other subjects to one class. Therefore, we call Primary teacher as *Class teacher*. **Details** of class teacher's education are available in my paper of 2004 (Malaty 2004, 89-92).

In Junior Secondary School, i.e. Grades 7-9 of the Comprehensive School, Subject teacher is the one, who is qualified to teach mathematics. This teacher has to obtain a M.Sc. with mathematics as a major or minor. In Junior Secondary schools, those who are teaching mathematics are also teaching Physics and Chemistry. Thus, the teacher is able to teach **fewer** groups than the case if he has to teach only one subject in his school. From international experiences, we do know that teaching one subject gives the teacher the chance to concentrate in his subject teaching and *take care of its nature*.

In addition, teaching large number of groups offers the teacher the chance to *develop his teaching approaches*. In Finland, teaching only one subject in Junior Secondary School is not an acceptable idea. In the past, when we had small schools in outlying district, it was possible to understand; why it was difficult to get teacher for each subject. But, why for large sized Junior Secondary Schools, in the past and for today's Junior Schools, the idea of teaching only one subject by subject teacher cannot be accepted? Today, we have only enough large sized school, but even schoolteachers themselves still find the teaching of only one subject is unacceptable idea.

In Finland, we are still able to recruit enough students to study mathematics, physics and chemistry at the Faculties of Sciences of our universities. We also are still able to keep the qualification of teaching mathematics in all of the secondary School high. But, we have to mention that, *we are not able to get students with high abilities to study mathematics, physics or chemistry at our Faculties of Sciences*. Mathematics, physics and chemistry are not popular fields of study in our universities. This is also affected by the fact that, mathematics, physics and chemistry haven't any special place in our schools. The number of teaching hours for these subjects is below the average inside and outside Europe. One of the main weaknesses we have in Subject Teacher Education is related to the Teaching Practice. Today, this part in Subject Teacher Education is not well done to the level we have in the Teaching Practice of Primary School Teachers. Indeed, both are not strong enough as before, but in the case of Primary Teacher Education, in mathematics Teaching Practice students get supervision by mathematics educators, where in the case of Secondary Teacher Education supervision is left to only/mainly Practice School Teachers. More **details** about Secondary School Mathematics Teacher Education are available in my paper of 2004 (Malaty 2004, 92).

1.4. Special Teacher Education and Special Education in Comprehensive School

Special Teacher Education in Mathematics and Mathematics Education is quite the same like that of Primary Teacher Education. Therefore, Special Teacher Education students take part in the obligatory part of Primary Teacher Education in mathematics and Mathematics Education. This poor Education forms the main part of Special Teacher Education in Mathematics and Mathematics Education. Surprisingly, this poor education gives the qualification to be a special teacher for all of the **9 Grades** of the Comprehensive Schools. This means that, a Special teacher, who may not attended any matriculation examination in mathematics and with such described above poor education in mathematics and mathematics education, can be of help to mathematics teacher of M.Sc. with even major in mathematics.

Here to notice that, in our traditions, special education of students with learning difficulties in mathematics got special care from their own teachers and as well from special teachers, but we do not have similar interests in gifted students education, especially in mathematics. The only strong Special Education of gifted students we have is related to Physical Education and Art, especially Music (Malaty 2008a, Malaty 2008b).

2. PISA, IMO and Comprehensive School

In the year 2000, the success of Finland in PISA surprised many inside and outside Finland as we mentioned before.

One of the reasons of surprising outside Finland is related to the results of Finland in the International Mathematical Olympiads (IMO). Within more than 40

years, since the first time of participation in 1965, Finland has got only modest success, especially in the years 1981, 1982 and 1983. The best result was that of **1982**, when Finland got the **8th** place among **23** countries. In our discussion, we shall find that there is a common reason of this success and the success in PISA.

In the year 2000, the main reason of surprising in Finland was the wide agreement about the level of school mathematics and the level of students, where both were regarding as weak. Today, no body criticizes school mathematics in Finland like mathematicians (Astela, et. al 2006, Kivelä 2006).

2.1. Between success and problems

From one hand we do deserve the success we have got in PISA, and from the other hand we do have serious problems in school mathematics and mathematics education in general, including Teacher Education and Primary Teacher Education in particular.

2.2. How this could be explained?

PISA tests are measuring *mathematics literacy*. PISA test items are measuring the achievements of everyday life mathematics and simple problems of no need to learn mathematics as a structure. We do know in Finland that we wouldn't get any success in PISA, if the test items were related to the understanding of mathematical concepts or relations. The most difficult to our students is to ask them to give a **proof**, where even the word is unknown to them. This is understandable since school mathematics does not deal with mathematics as a structure. The mentioned above paper of Astela, et al. 2006 is signed by **207** Finnish mathematicians. In this paper, the authors demonstrate facts of Universities and Polytechnics students' mathematical knowledge decline (Astela, et al. 2006).

2.3. Curriculum changes, PISA and IMO

Before 1967, Finnish school curriculum was a traditional one, where among others students learn at secondary level Algebra and Geometry every week. Algebra had its own textbook and as well geometry. Each textbook study allowed to build-up its area as a structured knowledge. This was the case for about 100 years.

Since 1967 school curriculum in Finland had seen different changes. These changes are mainly four: the New Math, started in 1967 to spread in all schools from 1970 to 1980, the Back-to-Basics (1980-1985), Problem Solving (1985-1990), and Everyday Life Mathematics (1990-1995). These trends are still effect on school mathematics in Finland, especially '*Problem Solving*' and '*Everyday Life Mathematics*' and this effect has given a chance for success in **PISA**.

The common reason of our success in PISA, and the exceptional good results of IMO in the years 1981, **1982** and 1983, is related to our mentality of being '*trendy*'. '*Back-to-Basics*', '*Problem Solving*', and '*Everyday Life Mathematics*' have been International trends, but in Finland we can see from Finnish textbooks that the implement of these trends have taken remarkable place. Here to notice that the ICMI Study "*School Mathematics in the 1990s*" of 1986 was translated into Finnish in 1990 (Howson & Wilson 1990). This has a special meaning, since we make very rarely translations of publications in mathematics education. In ICMI Study of 1986, '*Problem Solving*', and '*Everyday Life Mathematics*' (***Ethnomathematics***) were seen as the major content of school mathematics in the 1990s. It is also remarkable to notice that, the previous time in which translations were made on mathematics education, was in the 1960s when Finland took part in the '*New Math*' *Nordic Project*.

When we go to IMO results we can see that in 1982 Finland got the best ever achieved results. In **1982**, students of Grade 12, those took part in IMO, have started their schooling in the year **1970**. This is the year, in which the spread of '**New Math**' reached all the schools of the country. 'New Math' slogan was enough reason to bring teachers, mathematics educators and educational authorities to work together and do all their best to implement the new trend in our schools.

2.3. Why today PISA is relevant and IMO is not?

To get a success in IMO there is a need of taking care of mathematically gifted students, and this is not the case in Finland. For about 100 of years, education has been provided for everybody in Finland upon some type of equality's principle. This has been strengthening in 1970 by the establishing of the Comprehensive School (Grades 1-9) as a compulsory education. This school forms what is called 'Basic Education'. In **contradiction** to this philosophy, and through the 1970s, where the 'Basic Education' was born, mathematics was treated differently. To achieve the success in implementation the 'New Math', in the 1970s the number of mathematics teaching hours increased, especially to above average students. This was a *special case*, which gave us to achieve our best results, ever, in **IMO**.

In 1998, the Basic Education act of 1998 made clear that Basic Education has to provide each child with such knowledge and skills, which are necessary in everyday life. Also it puts emphases on the principle of equality between children's in education. In **Finnish society**, 'equality' has gained special meaning, which has effected on school mathematics, and consequently on both PISA and IMO results. Since the beginning of the 1980s, mathematical curricula and mathematics textbooks of Comprehensive School have been built to be adequate to average students at maximum. Traditionally, our teachers are active in recognizing each student's weaknesses, in time, and offering soon **remedial education**. Beside class teacher, since the **1970s** we do have special teachers, and they take active part in remedial education. In addition, making the number of students in a class relatively low has supported the remedial education. The majority of classes are of 15 to 25 students.

The **combination** of school mathematics changes; since the Back-to-Basics and the principles of the Basic Education act related to the content and students' equality has given a relevant ground for the success in PISA, but not for the success in IMO.

Since the 1980s, it become clear that the time devoted to mathematics teaching in Finland is one of the lowest worldwide (UNESCO 1986). Today we are offering only 31 teaching hours per week, each of 45 minutes, to the teaching of mathematics in the 9 Grades of comprehensive school. This gives a mean of 2.6 hours per week for each grade, where an hour here is of 60 minutes. This low number of hours meets well with the objectives of the Basic Education act of 1998, where education is mainly for everyday life and equality is also between all school subjects. With this low number of hours it is difficult to success in IMO, but it is still possible in PISA with the limited objectives of 'Mathematics Literacy'.

Below is a quotation from the Basic Education act 628, 1998:

*"Supporting pupils' growth towards humanity and ethically responsible membership of society, and to provide them with the knowledge and skills necessary in life... The instruction has to promote **equality in society and pupils' abilities** to participate in education and to otherwise develop themselves during their lives..."*

3. The Finnish Success and its Impact Worldwide

The success of Finland in PISA has brought international interest in Finnish education. In some countries there is readiness to copy anything they can get from the Finnish education. But, there are two questions we need here to discuss. The first: Is it good to copy every thing of Finnish Education? And the second: Is it possible to copy everything of Finnish Education?

3.1. Is it good to copy every thing of Finnish Education?

For instance, in Primary Teacher Education mathematics and mathematics education have a modest part of the study program. As we mentioned above, it is of about only 2% of the study program and takes about two weeks out of the five years of study. Is it good to copy this element of Finnish education? Can we say that studying less mathematics and mathematics education brings better results in PISA and mathematics education in general? If it is so, then it may be even better, for some country, to decrease the study of mathematics and mathematics education of Primary Teacher Education to be of only 1% of the Study program and takes one week instead of two. Regarding Secondary School Teacher Education, today Secondary School Teacher Education students do not get supervision of university mathematics educators in their Teaching Practice as before. Is that an element to be copied? Both elements mentioned here represent some of the weaknesses we have in Finnish education, and *every country has to be careful to not copy any of our weaknesses*.

In teacher education, we do not have only strengths but also weaknesses. Some of these weaknesses have been discussed in this paper above. More **details** and other problems are discussed in an earlier paper (Malaty 2004, 93-100).

Regarding School mathematics, the number of teaching hours is less than the case in other countries, mathematics in our schools is not a systematic study, which aims to build-up mathematics as a structure, and we do not take care enough of mathematically gifted students. Is there a need to copy such elements of Finnish education?

3.2. Is it possible to copy everything of Finnish Education?

In Finland we do have strengths, which among others gave us the chance to success in PISA, but is it possible to copy these strengths?

Regarding Teacher Education and the culture of the teaching profession, we do have different strengths. One of these strengths is related to the care of students' weaknesses. Without this strength we wouldn't get the success we got in PISA. This is from one hand an outcome of the success in the recruitment of well-motivated students to Primary Teacher Education, and from the other hand is a part of the ***culture of teaching profession*** in Finland. Is it possible to copy the care of students' weaknesses and the recruitment of well-motivated students to Primary Teacher Education?

This is a difficult question. Visiting our schools and observing our schools can show how it is difficult to copy the type of work our teachers do in helping their students in facing their learning difficulties. Among others, our teachers' intimate approach is a special one. It is common to see the teacher sitting on his knees in front of a student's desk in order to have a face to face quiet discussion.

The recruitment of well-motivated students to Primary Teacher Education is not an easy to copy. For instance it is not the salary which behind the interest of our students in the teaching profession. The salary of teachers in Finland is just an average one.

This salary is also not enough to keep teachers in their profession. But, in Finland the dropout of teachers is notably rare. In addition, teachers rarely change their place of work. It is common to find a teacher, who has worked all the time in the same school and till his retirement.

All the mentioned strengths here and others (Malaty 2006, 59-64) are related to cultural elements. The culture we speak here about is the **Finnish School Culture**, but this is as well a part of the entire Finnish culture. About the Finnish School Culture we can mention to four important elements: 1) *the welfare of schools*, b) *the pleasant work environment in schools*, c) *the daily traditions of school life* and d) *the school principles of care, comfort and equality*. **Details** discussion of these elements is available in my paper of 2006 (Malaty 2006, 64-66).

4. What is Possible to get from Finnish Teacher Education?

From the above discussion we came to find that, from one hand it is not good to copy every thing of Finnish education, and from the other hand it is not possible to copy everything of Finnish Education. But, is there anything positive of Finnish Education that can be of value to some other country? The answer is yes. Here I shall limit my answer to Teacher Education.

First to mention is the existing of University Teaching Practice Schools. Each Teacher Education Department in Finland has its own Teaching Practice School. Teaching Practice schools are normally inside the university campus and closed to Teacher Education Departments. Providing teaching practice at University Practice Schools offers an ideal environment, where from one hand each trainee has the chance to get closed supervision as much as he likes, from his *university subject educator*, and from the other hand all *university facilities*, including University Library are closed.

Establishing Practice Schools needs resources. But, it is still one of the elements of Teacher Education strengths of Finland, which can be of value to other countries.

The second strength of Finnish Teacher Education, which can be of value to other countries, is the in-service education of teachers.

The in-service education of teachers is well organized in Finland, with different organizations providing different types of courses. For example, the National Board of Education provides different types of in-service education in mathematics teaching and local education authorities provide in-service courses for primary and secondary school teachers. Teachers' associations also provide in-service education on mathematics teaching both locally and nationally. The main associations are Mathematical Subjects Teachers Association, Class Teachers Association, Teachers of Early School Grades Association (Grades 1 and 2) and Special Teachers Association. Each university has a center for continuing education and each province has a Summer University. Both provide different types of education, including in-service education for teachers. Also, 'Free Institutes' and 'Civil Institutes' can provide in-service education for teachers.

In-service education is sometimes provided free, otherwise teachers have to obtain funding from their schools. In some cases teachers can have an influence on the content of in-service courses, increasing teachers' motivation to attend such programs.

References

1. ASTELA, et Al. *The PISA survey tells only a partial truth of Finnish Children's Mathematical Skills*. Matilde. 2006, Vol. 29, p.9. The Danish Mathematical Society. On line [17.3.1.2008] <http://www.matilde.mathematics.dk/arkiv/Matilde29.html>
2. FNBE. *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet* [Basic Education Curriculum Basics]. 2004. ISBN 952-13-1878-3.
3. Howson, G. & Wilson, B. *Koulumatematiikka 1990-luvulla* [School Mathematics in the 1990s]. Helsinki: MFKA-publisher.
4. Kivelä 2006, Severe Shortcomings in Finnish Mathematics Skills, *Matilde*, 29, p.10. On line [17.3.1.2008] <http://www.matilde.mathematics.dk/arkiv/Matilde29.html>
5. MALATY, G. Mathematics Teacher Training in Finland. *Series of International Monographs on Mathematics Teaching Worldwide*. 2004, Monograph 2, pp.83-105. ISBN 9631629945.
6. MALATY, G. What are the reasons behind the success of Finland in PISA? *Gazette des Mathématiciens*. 2006, n°108, Avril, pp.59-66. ISSN 0224-8999.
7. MALATY, G. Matemaattisesti lahjakkaat ja kulttuuri: Osa 1. [Mathematically Gifted and Culture: Part 1]. *Dimensio*. 2008a, Vol.72, 1, pp.50-53. ISSN 0782-6648.
8. MALATY, G. Matemaattisesti lahjakkaat ja kulttuuri: Osa 2. [Mathematically Gifted and Culture: Part 2]. *Dimensio*. 2008b, Vol.72, 2, pp.18-21. ISSN 0782-6648.
9. UNESCO. *The Place of Science and Technology in School Curricula: A Global Survey*. 1986. Paris: UNESCO.

Contact address

Prof. Dr. George Malaty
Mathematics Education, University of Joensuu
P.O.Box 111, 80101 Joensuu, Finland
Tel.: 358-13- 251 2303
E-mail: george.malaty@joensuu.fi

THE CONCEPT OF TRIANGLE FROM PRIMARY SCHOOL PUPIL'S VIEW

Paola VIGHI*

Abstract

This work constitutes the first part of a research into the institutionalisation of the concept of the triangle in primary school. We first report on experiments into the personal meaning of the word 'triangle' and the gap between the personal and geometrical meanings. The cultural background revealed by this leads to an epistemological reflection on the nature of the mathematical object. On the basis of the experimental results and theoretical reflection, we put forward an activity for classification of shapes which aims to emphasise children's conceptions and help them to bring the concept progressively into focus. Results with implications for teaching are discussed and areas for future research are indicated.

Introduction

The triangle is one of the first geometrical shapes presented to children, who very early learn to recognise it; they distinguish triangles from circles and squares, and so on. In Italian primary schools, progress traditionally was as follows: the teacher started with polygons, named according to the number of sides; a three-sided shape was named "triangle"; subsequently the traditional classification regarding sides or angles is presented. Teachers do not normally find that children have difficulty with this. The terminology is taken for granted, the word "triangle" is used for acting and for recognising; sometimes a definition is also given, but frequently no check is made on whether the concept has been interiorised. Moreover, questions are not asked about the personal meaning of the concept, not even whether it differs (and if so, how far) from the institutional meaning (Godino, Batanero, 1994).

The previous considerations led us to investigate the empirical-perceptual, figural (Fischbein, 1993) and lexical aspects. This was to understand how it would be possible to impart an understanding of the theoretical aspects in such a way as to construct a process of transition from pre-conceptions to the institutionalisation of the concept itself.

Theoretical Framework

What is a triangle? Is a triangle an abstraction of a concrete objects?

In nature there are very few examples of triangles. If we try to find, in the manner of Galilean philosophy, correspondence between objects in nature and mathematical shapes, it is difficult to place the triangle. According to Plato, the triangle is an idea which exists independently of human thought, and according to Aristotle

* This work was carried out in the Local Research Unit in Mathematics Education, University of Parma, Italy.

a triangle is an immanent shape upon real objects. “In Aristotle’s view, in order to speak scientifically about a concept, one needs to have a “universal understanding” of it, that is to know its true nature.” (Speranza, 1996). Euclid defines the rectilinear figures (Definition XIX) those bound by straight lines, trilateral shapes are bound by three straight lines. He classifies them according to sides or angles (Definitions XX and XXI).

Since “every mathematical concept is bound to function as a representation, given that there are no “objects, real things” to show in their stead or as their evocation” (D’Amore, 2000), it may be useful to refer to a variety of different “registers of semiotic representation” to approach a mathematical concept, or, as is said these days, a “mathematical object”: “The coordination of many registers of semiotic representation appears fundamental for a conceptual learning of objects: we must not confuse the object with its representations and that it must be recognised in each of its possible representations” (Duval, 1993). So we decided that pupils should work on drawings, words and definitions. But, “... we must be able to deal with products of some process without bothering about the processes themselves” (Sfard, 1987). The questions on links between processes and objects are well known: concept formation take place by means of a hierarchy which starts from action and leads through concrete processes, by encapsulating (Dubinsky in Tall, 1991), to objects onto which prime new processes (Sfard, 1991).

Methodology

In order to investigate what the word “triangle” evokes in the mind of the pupils, three different preliminary activities were prepared. The first concerned drawing, the second was based on a brainstorming experiment and the third was based on “definitions” given by the children. In this way these prepared the ground for the concluding activity on the classification of objects. The table on the next page shows the activities and their links with the registers of semiotic representation. The activities were carried out by pupils between 7 and 11 years old. A large number of classes participated in the initial activities (20 classes, from 7 to 11 years old), and a smaller number of sample-classes were involved in the final activity (6 classes, from 9 to 10 years old). Four classes in particular were involved in the project over three years. We thus had the opportunity to follow and to study the progressive development of the concept in the minds of these children.

Activity 1: Drawing

Pupils working individually, using a sheet of blank paper and free hand were asked to carry out the following tasks:

- Draw a triangle
- Draw a different triangle
- Draw another different triangle.

The children were also asked to explain the choices they made in their drawing, and to explain the ‘differences’. It is important to clarify the use of the word ‘different’ in the task. In an early experiment the instructions were given as follows: Draw a triangle; draw another triangle; draw another triangle again. Almost all children (70 %) drew three congruent triangles, equilateral or isosceles, and thus carried out the task correctly. They confirmed our starting hypothesis that a ‘triangle’ for a child is equilateral, or sometime isosceles for simplicity of drawing, and has one side horizontal. Using the word ‘different’ in the instructions resolved this problem, although at the same time it raised new ones, such as what the word ‘different’ means for a child. The

word led the children to draw ‘other’ triangles, making them look for real differentiation in their drawings.

The most significant result was that the triangle is essentially the same, equilateral and with one side horizontal. It is “the” triangle, some children call it the “normal triangle”. As a consequence, the second and third can only be the same as the first even with regard to dimensions: the pupils draw three triangles which are substantially congruent. But the need to respect the task made the children think about how they could make them different. They chose various interesting possibilities:

- a) giving each triangle a different colour;
- b) posing “the” triangle in different positions, “pointing downwards”, “with the point on the right”, or “rotated” or “crooked”;
- c) changing dimensions – drawing first one triangle, then one smaller and one bigger or alternatively three scaled triangles, (“one big, one medium-sized and one small”), or using both the previous criteria;
- d) changing the shape, above all in the older classes, where classification on the basis of sides has not yet been dealt with in school. “The” triangle can become “wider” (“it has been lowered or widened”), “higher” (isosceles), “longer on one side and shorter on the other” (scalene), or with a different “stature”. The idea is thus to alter the shape as a whole, which can be done by changing its height. The children did not think of the traditional classifications of changing the lengths of the sides or the width of the angles to make the diversification. In conclusion, an examination of the protocols strongly reinforced the idea that there is a wide gap between the geometrical and “lived” triangle and that there is much work to be done in helping the transition from the personal to the institutional meaning. But how is it possible to build a bridge between the two?

Activity 2: Brainstorming

In order to further investigate the linguistic and figural aspects of the question, we carried out a brainstorming experiment. Each child was given a piece of paper with the word “Triangle” written in the middle, with the task: draw everything that the word suggested.

The activity was carried out in 6 classes, with children from 8 to 10 years old.

The following is a summary of the various types of drawings obtained in this way, running from the more to the less common. The drawings are related to:

1. triangles (equilateral or isosceles);
2. objects with triangular form (roof, beak, road signs, road-side triangle carried in a car, pyramid, pencil point, ice cream cone etc.) In fact, both in children’s colouring albums and in pre-school teaching aids, the triangle is presented by showing three-dimensional figures where the two-dimensional representation is triangular in form. In this way a stereotype is created (Marchini, Rinaldi, 2002) which always appears in the various activities proposed and is clearly a well rooted idea even in pupils in the higher classes;
3. angles and “objects with angles” understood as “edges” (< and > symbols, angle of a table, etc.);
4. the word “three” or the number “3”;
5. three points or objects with points (peak, nail, heart tooth, leaf with pointed edges, fir, etc.).

Activity 3: Children's "definitions".

Is it appropriate to give a definition of a triangle at primary school?

Some teachers opt for the shape aspect only and, from a collection of plane geometrical shapes, merely indicate all the triangles saying: "This, this and this are triangles". They are only concerned that their pupils are able to recognise triangles. Others give an over-detailed explanation such as: "A triangle is a two-dimensional shape (a polygon) with three sides and three angles". They thus introduce a mathematical object via a definition. It is however well known that the process of acquisition of new knowledge occurs in parallel with other mental processes. And up to what point is the definition interiorised by the pupils? To seek an answer to this question we gave the children the following task: write an explanation of what a triangle is, without drawings, for UFOMAT, who comes from another planet. The Children were in the third and fourth year of primary school (approximately 8 or 9 years old) and worked in groups.

The analysis of the answers shows that children tend to first give a definition (either the teacher's or one of their own, for example "It is a shape with three peaks"), then a linguistic explanation (three angles) and finally they refer to resemblance with objects in triangular form. When pressed by their teacher, emphasizing that UFOMAT must be able to understand on the basis of their explanation, they give operational explanations, such as: "Take three straight sticks lying flat and arrange them so that each pair of ends touches" or "Draw one horizontal line and two diagonal ones, all three joined together". Here another aspect emerges: the distinction between triangle understood as boundary and portion of a plane.

Final Activity: From the manipulation of shapes to the concept of a triangle

The three starting activities described above had the sole exploratory aim of establishing the ways in which a child conceives a triangle. Each activity could form the basis of further research. In my work they were used mainly to identify the features of the shapes to be used in the final activity. On the basis of these results, 19 geometrical shapes with particular features were identified and were to be classified¹.

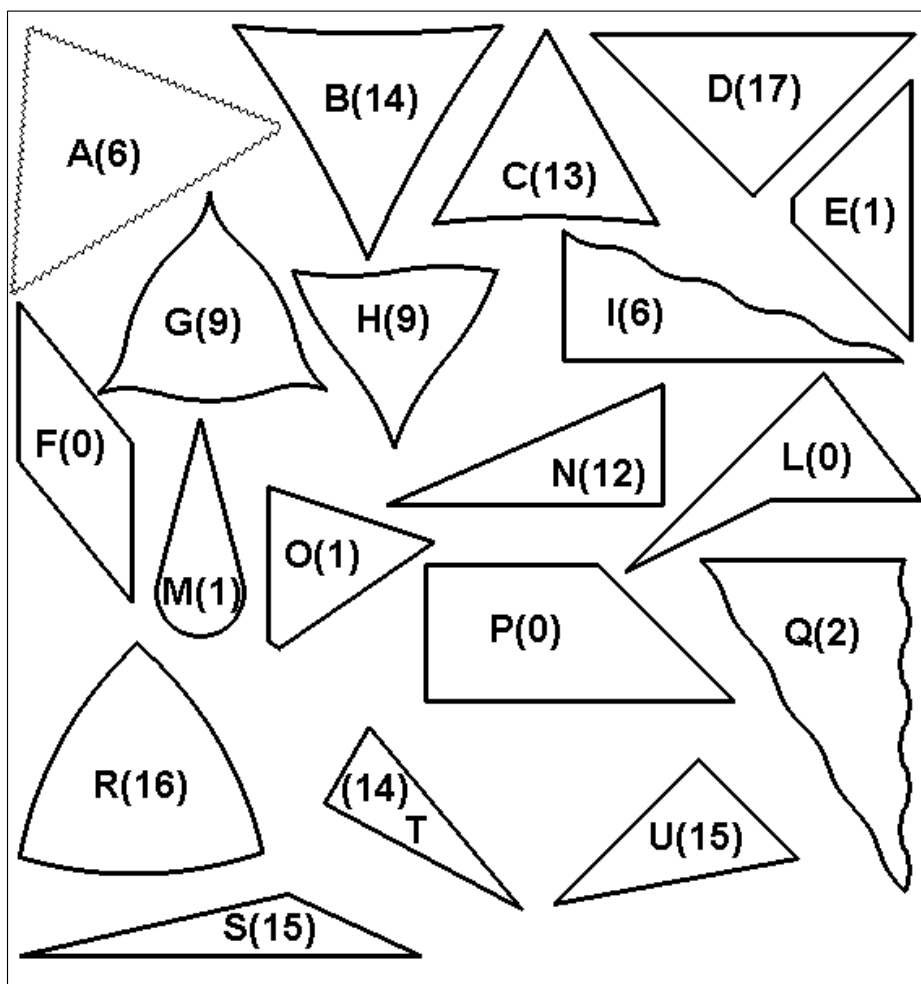
We make several observations on the figures. There are:

- a) triangles (D, N, S, T, U)
- b) figures with shape of equilateral triangle (A, B, C, G, H, R)
- c) regular shapes (A, B, R)
- d) with an axis of symmetry (A, B, C, D, E, M, R)
- e) with triangular shape, but without a point (E, O)
- f) with swallow sides (A, Q)
- g) with wavy sides (G, H, I)
- h) with curved sides (B, C, M, R)
- i) others

Obviously some figures satisfy different criteria, e. g. the shape B is included in b), c), d), h).

Children were asked to look at the 19 shapes and their features, identify their main characteristics and decide whether they corresponded to the explicit or implicit definition of a triangle. They were also asked to justify their choices in writing.

¹ The nineteen shapes are illustrated on the next page. I am grateful to Ph.D. Igino Aschieri for the computer elaborations of the shapes.



Note: The number each shape (A-U) represents the number of groups which identified it as a triangle out of a total of 17 groups.

Conclusions

An analysis of the posters shows that, apart from those made without a real classification criterion or with incoherent application of the chosen criterion, most groups carried out classifications “incorrect” in Euclidean sense, but nonetheless based on well defined criteria. Often recourse was made to natural language and analogies “It is a triangle because it has the shape of a roof, a beak ...” or “It is not a triangle because it is the shape of a drop”, etc. The most frequently used criterion was ‘points’, expressed in phrases such as ‘it’s a triangle because it has three points’. We would note that from a theoretical point of view we are not in Euclidean context, but rather in differential geometry for the children: the “points” of a triangle are not only its vertices, but can also be the *singular points* along the boundary. In fact as Piaget shows (Piaget, Inhelder, 1947) the child in recognising geometric shapes from four years upwards will often use touch and thus discover angles or corners as ‘something that pricks’. We saw

that the children in our experiments also used this rather ‘primitive’ criterion, although they are somewhat older than those described by Piaget. We were working with children having more experience of spatial awareness and greater familiarity with geometrical shapes. They are in fact the same children who correctly drew and described triangles in the three starting activities described above. However in this context, although they used the classical definition, “it is a triangle because it has three sides”, they revealed pre-conceptions with regard to the word “side”. This did not refer to a segment, but to something joining two consecutive vertices in whatever way. Sides are sides even when they are “curved” or “wavy”. So one of our conclusions is that children see a side only in its topological aspect. In a lesson after discussion of the group posters, the teacher suggested that a class poster should be drawn up as result of joint agreement on the objects to be considered triangles or not. The previous discussions had led to the elimination of some classification criteria proposed by the individual groups, so it was necessary to reach agreement on a single criterion which could be shared by all. In the majority of cases the older primary classes eventually reached the result of classifying as triangles only those shapes which would be considered as Euclidean triangles. The children used expressions such as “It is a triangle because it has three straight sides and three sharp points”. The classification of the 19 shapes was also carried out by younger children. Here we saw a wider variety of criteria; for example isosceles or not, or the choice of the figural aspect which the teacher accepted provisionally making the reservation that they would go back to the subject at a later date.

Further research into this field could usefully look at our last activity and use the Euclidean word “trilateral” which unlike the word triangle is probably not used by the children in everyday life. It could also be interesting to carry out the same experiment with older pupils and perhaps even with adults!

References

1. BARTOLINI BUSSI, M.: 1989, La discussione collettiva nell’apprendimento della matematica. Parte I, *L’Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 12, 1, 5-49.
2. BARTOLINI BUSSI, M.: 1989, La discussione collettiva nell’apprendimento della matematica. Parte II, *L’Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 12, 5, 615-654.
3. GODINO, J.D. and BATANERO, C.: 1994, Significado institucional y personal de los objetos matematicos, *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 3, 325-355.
4. D’AMORE, B.: 2000, Che cosa vuol dire apprendere un concetto matematico, *Bollettino dei Docenti di Matematica*, Repubblica e Cantone Ticino, Dipartimento dell’Istruzione e della Cultura, Svizzera, 41, 87-92.
5. DUVAL, R.: 1993, Registres de représentation sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitive*, ULP, IREM, Strasbourg, 5, 37-65.
6. DUVAL, R.: 1998, Signe et objet. Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet, *Annales de Didactiques et de Science Cognitives*, 6, 139-163.

7. MARCHINI, C. and RINALDI M. G.: 2002, Tetti e bandiere, (Malara, Marchini, Tortora e Navarra Ed.), in *Processi didattici innovativi per la matematica nella scuola dell'obbligo*, Pitagora, Bologna.
8. MEDICI, D., SPERANZA, F., VIGHI, P.: 1986, Sobre la formacion de los conceptos geométricos y sobre el lexico geometrico, *Ensenanza de las Ciencias*, 1, 16-22.
9. PIAGET, J., INHELDER, B.: 1947, La représentation de l'espace chez l'enfant, Presses Universitaire de France, Paris.
10. FISCHBEIN, E.: 1993, The theory of figural concepts, *Educational Studies in Mathematics*, 24, 139-162.
11. SFARD, A.: 1987, Two conceptions of mathematical notions: operational and structural, in *Proceedings of PME-XI*, vol. III, Montréal, Canada, 162-169.
12. SFARD, A.: 1991, On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflection on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 22, 1-36.
13. SPERANZA, F.: 1996, "Il triangolo qualunque" è un qualunque triangolo?, *L'Educazione Matematica*, Anno XVII, Vol. 1, n. 1, 13-27.
14. SPERANZA, F.: 1998, Intervista a Beatrice: forme e loro nomi, *L'Educazione Matematica*, Anno XIX, Vol. 3, n. 2, 67-80.
15. TALL, D.O. Ed.: 1991, *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, NL.

Kontaktní adresa

Prof. Paola Vighi
 Mathematics Departement
 University of Parma,
 Viale G.P.Usberti, 53/A
 43100 Parma, Italy
 E-mail: paola.vighi@unipr.it

RECENZOVANÁ ČÁST

LOGICKÉ ÚLOHY NA 1. STUPNI ZÁKLADNÍ ŠKOLY

Jaroslav BERÁNEK

Abstrakt

Příspěvek obsahuje soubor deseti úloh z korespondenčního matematického semináře pro žáky 4. – 6. ročníku ZŠ, jejichž řešení vyžaduje logickou úvahu. Cílem je poukázat na to, že tyto úlohy lze zadat i žákům 1. stupně základní školy. Tím si žáci na podobný typ úloh zvykají, neboť logické úlohy se vyskytují jak v matematických soutěžích, tak i v přijímacích zkouškách nejen na střední, ale i na vysoké školy.

LOGICS PROBLEMS IN ELEMENTARY MATHEMATIC EDUCATION

Abstract

The article contains a set of 10 problems from the mathematical seminar Malynár for pupils of the 4th to 6th grades of the primary school, the solving of which needs logical thinking. These problems develop pupils' thinking and practise their abilities of logical conclusions. Pupils are getting used to such types of tasks because logical problems appear both in mathematical competitions and entrance exams for not only secondary schools but also universities.

1. Úvod

Jedním z důležitých aspektů současného vyučování matematice v dnešní době, kdy je matematika vyučována na základě rámcového vzdělávacího programu „Matematika a její aplikace“, je neustále překonávat formalismus ve výuce, tj. neorientovat se pouze na memorování naučených početních spojů, vzorců a algoritmů, ale též rozvíjet myšlení žáků a studentů a současně procvičovat jejich logické uvažování, a to už na 1. stupni ZŠ. Při snaze o procvičování logického myšlení žáků však učitelé naráží na nedostatek vhodných úloh. V tomto příspěvku je obsaženo deset úloh z korespondenčního semináře „Malynár“ ze Slovenské republiky. Tyto úlohy, v jejichž zadání se objevují různé, dětem blízké, pohádkové či dobrodružné motivy, slouží nejen k rozvíjení logického myšlení žáků, ale vedou je též k poznání, že podobné úlohy a problémy jsou nedílnou součástí matematiky; nepřekvapí je potom, je-li podobná úloha zařazena v matematické olympiádě, Klokánovi nebo v písemné přijímací zkoušce na střední školu. A nejen tam; logické úsudky a analytické myšlení jsou důležitou součástí např. testu všeobecných studijních předpokladů v rámci přijímacího řízení na MU v Brně. Zbývá dodat několik slov o korespondenčním semináři Malynár. Malynár je korespondenční matematický seminář pro žáky 4. - 6. ročníku ZŠ. Je organizován sdružením Strom ve spolupráci s gymnáziem Poštová 9 v Košicích. Občanské sdružení Strom vzniklo v roce 1995 z řad organizátorů dřívějšího korespondenčního matematického semináře Strom, organizovaného při Přírodovědecké

fakultě UPJŠ v Košicích od roku 1975. V roce 1998 převzalo organizaci korespondenčního semináře Matik a v roce 2000 převzalo též organizaci semináře Malynár (webová adresa tohoto semináře je <http://malynar.strom.sk>). Poznamenejme ještě, že s ohledem na účel příspěvku byla zadání úloh upravena. Zadání všech úloh korespondenčního semináře v jednom ročníku obsahují většinou motivy (jména osob, reálie, apod.) jednoho pohádkového příběhu, aby byly úlohy dětem přístupnější. Při vytržení z kontextu by přesná citace zadání působila nepřehledně. Vzhledem k omezenému rozsahu příspěvku rovněž nelze uvádět úplná řešení úloh (nejedná se o jejich metodický a didaktický rozbor).

2. Soubor úloh

Úloha 1: [2] Na rodinné oslavě se sešlo několik členů rodiny: otec, matka, syn, dcera, bratr, sestra, bratranec, sestřenice, synovec, neteř, strýc, teta (každý má k někomu z přítomných některý z uvedených příbuzenských vztahů). Jaký nejmenší počet osob byl na oslavě, jestliže víme, že se v této rodině neuzavřel žádný příbuzenský svazek?

Řešení: Nejmenší možný počet osob, vyhovujících zadání, jsou čtyři, a to dva muži a dvě ženy v příbuzenském vztahu buďto otec se synem a matka s dcerou nebo otec s dcerou a matka se synem. Otec a matka jsou sourozenci (bratr a sestra), tzn. jejich děti jsou bratranec a sestřenice, atd. Největším problémem pro žáky je uvědomit si fakt, že otec a matka podle zadání úlohy nejsou manželé.

Úloha 2: [2] Čtyři děti, Katka, Petr, Honza a David byli u prodejního automatu. Katka povídá Davidovi: „Viděla jsem, jak Petr stisknul první a druhý knoflík a automat mu vydal čokoládu a žvýkačky. Já jsem stisknula čtvrtý a pátý knoflík a dostala jsem piškoty a zmrzlinu. Když potom Honza stisknul první, třetí a čtvrtý knoflík, dostal od automatu bonbóny, žvýkačky a piškoty. To už by Ti mělo stačit k tomu, abys věděl, které knoflíky stisknout, když máš chuť na zmrzlinu a bonbóny.“ Víte i vy, které knoflíky to jsou?

Řešení: Nejvýhodnější je využít tabulku:

	Čokoláda	Žvýkačky	Bonbóny	Zmrzlina	Piškoty
Petr	1, 2	1, 2			
Katka				4, 5	4, 5
Honza		1, 3, 4	1, 3, 4		1, 3, 4

Nyní snadno úsudkem určíme, že tlačítko 1 znamená žvýkačky, 2 znamená čokoládu, tlačítko 3 znamená bonbóny, 4 znamená piškoty a 5 znamená zmrzlinu. David tedy musí stisknout třetí a páté tlačítko.

Úloha 3: [3] Zlý kouzelník věznil ve svém sídle princeznu. Udatný Bivoj, který přišel princeznu vysvobodit, dostal od kouzelníka tento úkol: „Mám zde tři čepice, dvě černé a jednu bílou. Nasadím Tobě i princezně ve tmě čepici na hlavu tak, abyste neviděli, jakou barvu vaše čepice má. Po rozsvícení každý z Vás řekne, jakou čepici má na hlavě. Pokud alespoň jeden z vás odpoví správně, je princezna volná.“ Po osvětlení komnaty nejprve řekl smutně Bivoj: „Já nevím, jaké barvy je moje čepice“. Vzápětí na to princezna vykřikla: „Já už vím, jaké barvy je moje čepice“. Její odpověď byla správná. Víte to také Vy, jakou barvu měla čepice princezny?

Řešení: Oba měli černou čepici. Bivoj viděl na hlavě princezny černou čepici, proto odpověděl, že neví. Kdyby viděl u princezny bílou, mohl by odpovědět, že jeho je černá. Princezna uviděla na Bivojově hlavě černou čepici, proto ani ona hned nemohla

rozhodnout. Z jeho odpovědi však správně usoudila, že i ona má na hlavě čepici černou (v zadání si povšimněme formulace princezny „Já už vím,...“ po odpovědi Bivoje).

Úloha 4: [2] Víme, že jeden ze sourozenců Zita a Jirka vždy mluví pravdu, zatímco druhý vždy lže. Jirka vyslovil tvrzení: „Alespoň jeden z nás je lhář“. Lze na základě této věty určit, kdo ze sourozenců je lhář a kdo poctivec?

Řešení: Předpokládejme, že Jirka lhal. To by ale znamenalo, že jeho tvrzení je nepravdivé a tedy oba jsou pravdomluvní, což je spor. Jirka tedy mluvil pravdu, a proto s ohledem na pravdivost jeho tvrzení (a jeho pravdomluvnost) musí být Zita lhářem. Upozorňujeme v této souvislosti na nutnost seznámení žáků s negacemi výroků s kvantifikátory.

Úloha 5: [3] V jeskyni bylo pět kouzelných mluvících kamenů. Některé mluví vždy pravdu, jiné zase vždy lžou. Princezna Aryl potřebovala zjistit, které kameny jsou pravdomluvné. Proto se všech zeptala: „Kolik z Vás mluví pravdu?“ Dostala těchto pět odpovědí: první kámen tvrdil, že žádný, druhý odpověděl, že právě jeden, třetí, že dva, čtvrtý odpověděl tři a pátý odpověděl čtyři. Kolik kamenů je pravdomluvných a které to jsou?

Řešení: Pravdomluvné jsou ty kameny, které řeknou totéž číslo. Protože řekl každý kámen jiný počet, existují dvě možnosti: Buďto lžou všechny nebo je pravdomluvný právě jeden. Z vyjádření prvního kamene („Žádný není pravdomluvný“) však plyne, že nastane druhá z možností. Kdyby totiž první z kamenů mluvil pravdu, bylo by jeho tvrzení sporné. Jeho tvrzení je tedy nepravdivé. Protože pravdomluvným může být pouze jediný kámen, je zřejmé, že je to ten, který řekl číslo jedna. To je druhý kámen, který odpověděl, že pravdomluvný je jeden kámen (tzn. on sám).

Úloha 6: [3] Král položil vedle sebe do řady pět stejných krabiček a řekl: „V každé z těchto krabiček je jedna kulička, každá je jiné barvy. Tyrkysová není ani v prostřední ani v krajní krabičce, žlutá je napravo od ní. Na kraji je indigová. Druhá je barva, jejíž počáteční písmeno je první v abecedě. Ani jedna kulička není oranžová nebo červená, ale alespoň jedna je fialová. Ve které krabičce je modrá kulička?“

Řešení: Nejprve určíme barvy všech kuliček. Jsou to tyrkysová, žlutá, indigová, fialová a modrá. První v abecedě je fialová, je tedy ve druhé krabičce. Proto tyrkysová kulička musí být ve čtvrté (není ani v prostřední ani v krajní). Napravo od ní, v páté krabičce je žlutá kulička, indigová je tedy v první krabičce. Modrá kulička je proto ve třetí, prostřední krabičce.

Úloha 7: [4] Ze tří kačerů Hui, Dui a Lui vždy dva lžou a jeden mluví pravdu. Na otázku, který z nich je nejvyšší, odpověděli takto:

Kačer Hui: „Já to nejsem.“

Kačer Dui: „Já jsem nejvyšší.“

Kačer Lui: „Dui to není“.

Který z nich je nejvyšší?

Řešení: Tato úloha je již obtížnější. Protože vždy jeden z kačerů mluví pravdu, budeme hledat řešení analýzou všech tří možností. Pokud by Hui mluvil pravdu, jsou další dvě tvrzení ve sporu (z tvrzení Dui plyne, že není nejvyšší, což kontrastuje s tvrzením Lui, podle jehož tvrzení je nejvyšším právě Dui). Nechť tedy Dui mluví pravdu. Ani tato možnost není reálná, neboť tvrzení kačera Dui je ve sporu s tvrzením Hui. Zbývá ověřit třetí možnost, že pravdomluvný je Lui. Podle něj tedy je nejvyšší Hui nebo Lui. Nepravdivá odpověď kačera Hui ale nyní znamená, že nejvyšší je on sám a odpověď Dui tuto možnost připouští. Nejvyšší je tedy Hui.

Úloha 8: [5] Na oslavě byly tři manželské páry, jména osob jsou Adam, Boris, Cyril, Dana, Eva a Františka. Při první skladbě tancovala každá žena se svým manželem, při druhé skladbě netancovala naopak žádná žena se svým manželem, ale víme, že při druhé skladbě tancoval Adam s Evou, Boris s Františkou a manžel Evy s Danou. Dovedete správně přiřadit k sobě manželské dvojice?

Řešení: Klíčem k řešení úlohy je to, že ve druhé sérii tancoval manžel Evy s Danou. Manželem Evy je tedy Cyril (jediný není v zadání při druhém tanci uveden jménem). Zůstávají dámy Dana a Františka a pánové Adam a Boris. Z tanečních dvojic druhé série skladeb víme, že Adam není manžel Evy a Boris není manželem Františky. Manželské páry jsou tedy Boris a Dana, Adam a Františka, Cyril a Eva. Tato úloha není obtížná, při jejím řešení lze využít i grafické znázornění.

Úloha 9: [6] Kouzelník přinesl tři stejné krabice. Na jedné bylo víko s nápisem JABLKO-HRUŠKA, na druhé JABLKO-JABLKO, na třetí HRUŠKA-HRUŠKA. Potom řekl: „V krabicích jsou jablka a hrušky tak, jak to vidíte na nápisích na víkách, tedy v jedné jsou dvě jablka, ve druhé dvě hrušky a ve třetí jablko a hruška. Víka jsem vyměnil tak, že ani jedno není na správné krabici. Můžete vytáhnout jeden kus ovoce ze kterékoliv krabice (ale jen z jedné). Do krabice se přitom nesmíte podívat. Potom mi musíte říct, ve které krabici je jaké ovoce.“ Ze které krabice mají děti vytáhnout ovoce, aby správně určily obsah krabic?

Řešení: Protože ani jedno víko není na správné krabici (a z teorie permutací víme, že existují pouze dvě permutace tříprvkové množiny, které neobsahují pevný bod), měl kouzelník pouze dvě možnosti, jak víka vyměnit. Ukážeme je na obrázku (v horním řádku jsou nápisy na víkách, ve spodním obsah krabic (uvádíme pouze zkratky):

(1)

J J	H H	J H
H H	J H	J J

(2)

J H	J J	H H
H H	J H	J J

Pokud vytáhneme jakýkoliv druh ovoce z krabice s víkem J J nebo H H, zjistíme po chvíli přemýšlení nad obrázky (podrobnosti neuvádíme), že existuje více možností, tj. nelze jednoznačně odpovědět. Zajímavý je případ, kdy vytáhneme ovoce z krabice označené J H. V této krabici jsou buďto jen dvě jablka (možnost 1) nebo jen dvě hrušky (možnost 2). Vytáhneme-li tedy jablko, lze jednoznačně usoudit na případ 1, při vytažení hrušky jde o možnost 2. Na této úloze je důležitá úvaha o permutacích, zjištění dvou uvedených možností a nakreslení obrázku. Děti musí vytáhnout ovoce z krabice s víkem J H.

Úloha 10: [7] Král zavřel princeznu do jedné ze tří komnat hradní věže, ve druhých dvou byli umístěni lvi. Honza přišel princeznu vysvobodit. Na dveřích první komnaty našel nápis: „Tady princezna není.“ Na druhých dveřích stálo: „V této komnatě je lev.“ Na třetích dveřích byl nápis: „Princezna je ve druhé komnatě.“ Jen jediný z těchto nápisů byl pravdivý, ostatní dva byly nepravdivé. Když Honza princeznu najde, dostane ji za manželku. Otevře-li však dveře nesprávné, sežere ho lev. Pomozte Honzovi určit, ve které komnatě je princezna.

Řešení: Podobně jako v úloze 7 budeme zkoumat tři možnosti podle toho, který z nápisů budeme považovat za pravdivý. Nechť je pravdivý první nápis, princezna je tedy ve 2. nebo 3. komnatě. Podle třetího nápisu ale princezna není ani ve druhé, což je

ve sporu s nepravdivostí tvrzení na druhých dveřích, za nimiž je skutečně lev. Předpokládejme, že druhý nápis je pravdivý, první a třetí nepravdivé; z nepravdivého prvního nápisu pak plyne, že je princezna v první komnatě. Další nápisy tuto skutečnost jen potvrdí (ve druhé je opravdu lev a princezna není ve druhé komnatě). Musíme ale zkoumat i třetí možnost, zda nemá problém více řešení (častá chyba studentů, kteří na toto často zapomínají; najdou-li jedno řešení, nezkoumají již další možnosti). Je-li ale pravdivý třetí nápis, musí být princezna ve druhé komnatě. Podle nepravdivého prvního nápisu musí ale být i v první, což je spor. Bezesporná je tedy pouze druhá z možností; pravdivý byl druhý nápis a princezna je v první komnatě.

3. Závěr

I když řešení předložených úloh bylo jen naznačeno, je zřejmé, že úvahy a diskuse nad podobnými úlohami podstatně obohatí myšlení žáků. I když se jedná často o problémy obtížnější, na jejichž řešení přijde žák až po několika dnech či týdnech, nelze tento čas nazvat ztraceným. Žáci si procvičí schopnost logicky uvažovat, což může být v jejich dalším studiu i v životě jen ku prospěchu. Poznamenejme jen, že úlohy podobné uvedeným úlohám se často vyskytují nejen v matematických soutěžích, ale i v písemných přijímacích zkouškách na vyšší typy škol. Budou-li na ně žáci zvyklí, nezpůsobí jim v budoucnosti podobné úlohy takové problémy, jaké jsme zvyklí vídat v dnešní době.

Literatura

1. HEJNÝ, MILAN. *Teória vyučovania matematiky*. 2. vyd. Bratislava : Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1990. 554 s. r92U. ISBN 80-08-01344-3.
2. MALYNÁR. *Korešpondenčný matematický seminár, 12. ročník 2002-2003*. Košice: Strom, 2002. Dostupné na World Wide Web: <<http://malynar.strom.sk>>.
3. MALYNÁR. *Korešpondenčný matematický seminár, 13. ročník 2003-2004*. Košice: Strom, 2003. Dostupné na World Wide Web: <<http://malynar.strom.sk>>.
4. MALYNÁR. *Korešpondenčný matematický seminár, 14. ročník 2004-2005*. Košice: Strom, 2004. Dostupné na World Wide Web: <<http://malynar.strom.sk>>.
5. MALYNÁR. *Korešpondenčný matematický seminár, 15. ročník 2005-2006*. Košice: Strom, 2005. Dostupné na World Wide Web: <<http://malynar.strom.sk>>.
6. MALYNÁR. *Korešpondenčný matematický seminár, 16. ročník 2006-2007*. Košice: Strom, 2006. Dostupné na World Wide Web: <<http://malynar.strom.sk>>.
7. MALYNÁR. *Korešpondenčný matematický seminár, 17. ročník 2007-2008*. Košice: Strom, 2007. Dostupné na World Wide Web: <<http://malynar.strom.sk>>.
8. RÁMCOVÝ VZDĚLÁVACÍ PROGRAM PRO ZÁKLADNÍ VZDĚLÁVÁNÍ. Dostupné na World Wide Web: <www.vuppraha.cz>.
9. ROUGIER, ROGER. *Rozvíjíme logické myšlení : [hry, hádanky, cvičení pro děti od 7 do 11 let]* 2. vyd. Praha : Portál, 2000. 151 s. : ISBN 80-7178-482-6.

Kontaktní adresa

Doc. RNDr. Jaroslav Beránek, CSc.
Masarykova univerzita, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky
Poříčí 7, 603 00 Brno
Telefon: +420 549 491 673
E-mail: beranek@ped.muni.cz

VÝSLEDKY MATEMATICKÝCH TESTŮ MEZINÁRODNÍHO PROJEKTU PRO STUDENTY UČITELSTVÍ NA PDF UP OLOMOUC

Daniela BLAŽKOVÁ

Abstrakt

V článku jsou uvedeny výsledky matematických testů mezinárodního projektu pro studenty učitelství. Tento projekt je organizován Centrem pro inovaci ve vyučování matematice Univerzity v Plymouthu. Testování probíhalo na Pedagogické fakultě Univerzity Palackého v Olomouci, prostřednictvím webového rozhraní vytvořeného pomocí e-learningové platformy Claroline.

RESULTS OF MATHEMATIC LITERACY TESTING BY STUDENTS OF ELEMENTARY SCHOOL TEACHING AT PDF UP OLOMOUC

Abstract

In this article, the results of Questionnaires of International Teacher Training Project, organized by Centre for Innovation in Mathematics Teaching at the University of Plymouth, are shown. Testing was done by students – intending teachers - at Faculty of Education Palacky University and was made through web interface created by e-learning platform Claroline.

1. Platforma Claroline

Claroline je manažerský systém kursů na webovém základu. Platforma, vydaná pod Open Source licencí, umožňuje stovkám organizací z 86 zemí světa vytvářet a spravovat kurzy a online prostory pro spolupráci pomocí běžných webových prohlížečů (Internet Explorer, Netscape, FireFox, Mozilla, ...).

„Claroline“ byla spuštěna v roce 2001 Katolickou univerzitou v belgickém Louvainu a byla vyvinuta na základě pedagogických zkušeností a potřeb učitelů. Je zcela přizpůsobitelná různým tréninkovým situacím, proto není využívána jen školami a univerzitami, ale také tréninkovými centry, asociacemi a firmami.

Každý kurs poskytuje celou paletu nástrojů umožňujících mj.:

- publikovat dokumenty v libovolném formátu (text, PDF, HTML, ...),
- spravovat veřejná a soukromá fóra,
- vyvíjet výukové cesty (způsoby) a připravovat online cvičení,
- vytvářet skupiny studentů,
- vést agendu s povinnostmi a termíny,
- vidět statistiky aktivity uživatelů.

2. Testování na Katedře matematiky PdF UP Olomouc

Katedra matematiky PdF UP Olomouc se do testování prostřednictvím projektu Claroline zapojila koncem listopadu 2007. Testů se zúčastnili studenti učitelství 1. stupně a studenti učitelství matematiky pro 2. stupeň ZŠ.

	Muži	Ženy	Σ
1. stupeň	6	86	92
2. stupeň	55	71	126
Σ	61	157	218

Tab. 1 Počty testů použitých pro vyhodnocení výsledků testování

3. Průběh testování

Test se skládal ze dvou částí – lehčí část A a těžší část B. Pro každou z nich byl stanoven časový limit 30 minut. Těžší část testu pro studenty učitelství 1. stupně byla současně lehčí částí pro studenty učitelství matematiky pro 2. stupeň ZŠ. Bodové hodnoty jednotlivých částí jsou uvedeny v tab. 2.

	Test A	Test B	Celkem
1. stupeň	40	20	60
2. stupeň	20	20	40

Tab. 2 Maximální bodové hodnoty

4. Test studentů učitelství 1. stupně

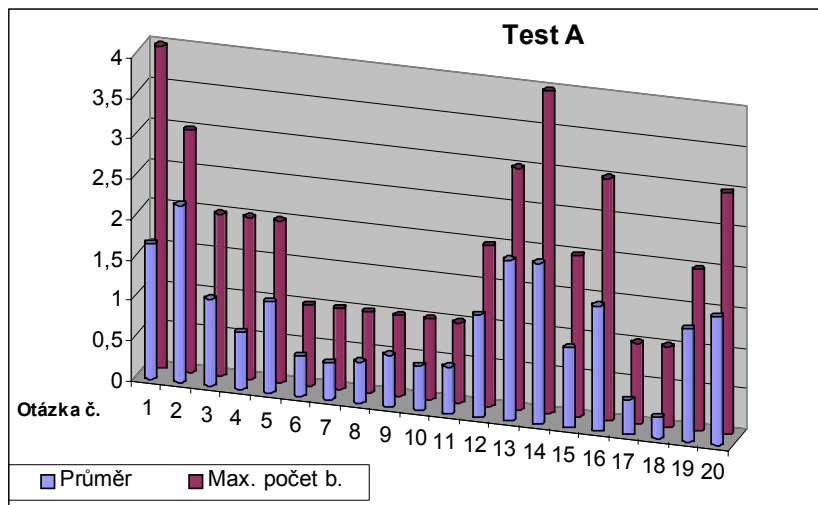
Část A obsahovala celkem 20 otázek. V tab. 3 jsou uvedeny typy úloh a jejich bodové ohodnocení, průměrný bodový zisk u mužů, žen a průměrný bodový zisk za celou úlohu.

Ot. č.	Typ úlohy	Max. počet b.	Průměr M	Průměr Ž	Průměr celkem
1	Určit typ daných čísel (přirozená, celá,...)	4	1,83	1,67	1,68
2	Doplnit znaménka nerovností mezi 2 čísla	3	1,83	2,22	2,20
3	Podle obrázku určit interval na číselné ose	2	1,00	1,08	1,08
4	Převod desetinného čísla na zlomek a %	2	0,67	0,71	0,71
5	Určování hodnoty číslíce v číslech	2	0,83	1,15	1,13
6	Vyčíslit hodnotu mocniny daného čísla	1	0,67	0,49	0,50
7	Určit největšího společného dělitele 2 čísel	1	0,50	0,45	0,46
8	Určit nejmenší společný násobek 2 čísel	1	0,67	0,50	0,51
9	Přímá úměrnost	1	0,50	0,65	0,64
10	Poměr	1	0,50	0,56	0,55
11	Úprava algebraického výrazu	1	0,67	0,55	0,58
12	Dosazení do vztahu (převod mezi °C a °F)	2	0,83	1,30	1,27
13	Převody jednotek	3	1,67	2,00	1,99
14	Určování souřadnic bodů v rovině	4	1,50	2,03	2,00
15	Shodnost a podobnost rovinných útvarů	2	0,67	1,01	0,99

16	Shodná zobrazení v rovině	3	1,33	1,57	1,55
17	Síť krychle	1	0,17	0,45	0,43
18	Určování obsahu rovinného útvaru	1	0,17	0,27	0,26
19	Přiřazování pravděpodobností k daným jevům	2	1,50	1,40	1,40
20	Přiřazování jevů k daným pravděpodobnostem	3	1,50	1,59	1,59

Tab. 3 Test A

Z tabulky je patrné, že studenti měli největší potíže s otázkou číslo 18, tj. určováním obsahu rovinného útvaru. Bodový průměr dosažený u této otázky je ze všech nejnižší, jak absolutně, tak i vzhledem k bodovému ohodnocení příkladu (26 %).



Graf 1 Průměrný a maximální bodový zisk z testu A

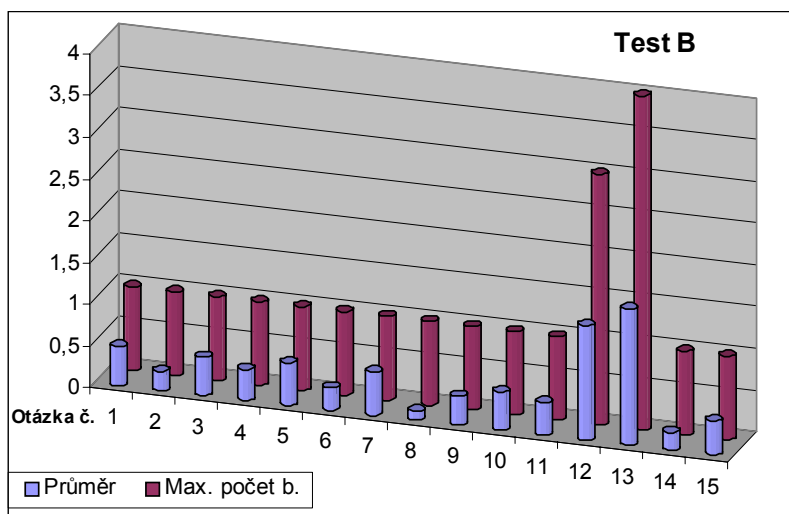
Část B obsahovala 15 otázek. V tab. 4 jsou opět uvedeny typy úloh a jejich bodové ohodnocení, průměrný bodový zisk u mužů, žen a průměrný bodový zisk za celou úlohu.

Ot. č.	Typ úlohy	Max. počet b.	Průměr M	Průměr Ž	Průměr celkem
1	Úprava číselného výrazu s odmocninou	1	0,50	0,47	0,47
2	Vyčíslit hodnotu mocniny daného čísla	1	0,17	0,23	0,23
3	Vyjádření neznámé z rovnice	1	0,67	0,44	0,46
4	Určení velikosti úhlu v pravouhlém trojúhelníku	1	0,17	0,38	0,37
5	Slovní úloha – násobení racionálních čísel	1	0,33	0,52	0,51
6	Rozklad trojčleny na součin dvojčlenů	1	0,20	0,28	0,27
7	Slovní úloha – lineární rovnice o jedné neznámé	1	0,30	0,53	0,52
8	Vyčíslit hodnotu číselného výrazu	1	0,17	0,10	0,11
9	Určení pravděpodobnosti daného jevu	1	0,33	0,35	0,35
10	Objem krychle	1	0,33	0,45	0,46

11	Losovací	1	0,17	0,41	0,39
12	Určit pravdivost/nepravdivost daných tvrzení	3	1,50	1,36	1,37
13	Určit pravdivost/nepravdivost daných tvrzení	4	0,67	1,70	1,63
14	Procenta – procentová část, porovnávání částí	1	0,17	0,21	0,21
15	Rozhodnout o sestrojitelnosti trojúhelníků	1	0,67	0,40	0,41

Tab. 4 Test B

U testu B měli studenti největší potíže s otázkou číslo 8. Úkolem bylo určení hodnoty číselného výrazu, v němž se vyskytovala desetinná čísla v součinu s celočíselnými mocninami čísla 10. Bodový průměr, kterého studenti dosáhli u této otázky je opět ze všech nejnižší absolutně i vzhledem k bodovému ohodnocení příkladu (11 %).



Graf 2 Průměrný a maximální bodový zisk z testu B

5. Srovnání výsledků studentů učitelství 1. stupně a učitelství matematiky pro 2. stupeň ZŠ

Jak již bylo výše uvedeno, jedna část testu byla společná oběma skupinám. Jednalo se o test B pro studenty učitelství 1. stupně. Tab. 5 uvádí výsledky obou skupin ve společné části testu. Pro přehlednost je již vynechán sloupec Typ úlohy, který je uveden v tab. 4.

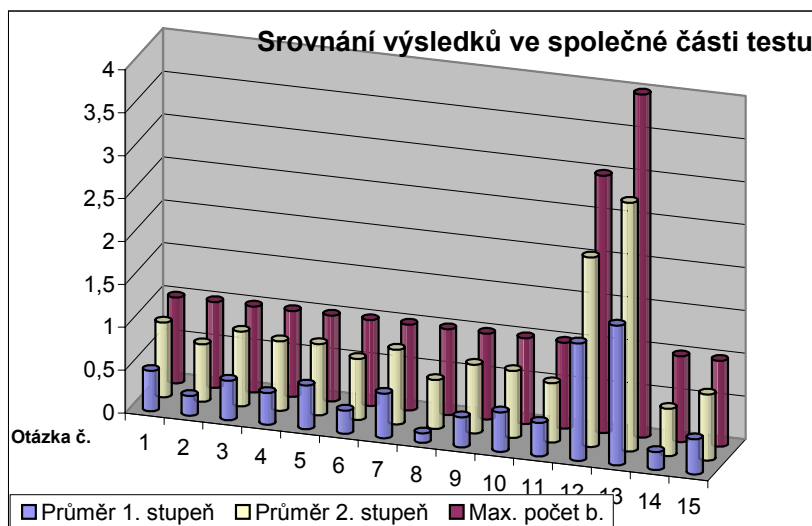
Ot. č.	Max. počet bodů	Studenti učitelství 1. stupně			Studenti učitelství M pro 2. stupeň		
		Ø M	Ø Ž	Ø	Ø M	Ø Ž	Ø
1	1	0,50	0,47	0,47	0,93	0,82	0,87
2	1	0,17	0,23	0,23	0,60	0,72	0,67
3	1	0,67	0,44	0,46	0,87	0,87	0,87
4	1	0,17	0,38	0,37	0,84	0,79	0,81
5	1	0,33	0,52	0,51	0,85	0,80	0,83

6	1	0,20	0,28	0,27	0,64	0,77	0,71
7	1	0,30	0,53	0,52	0,91	0,83	0,87
8	1	0,17	0,10	0,11	0,62	0,54	0,57
9	1	0,33	0,35	0,35	0,84	0,77	0,80
10	1	0,33	0,45	0,46	0,78	0,77	0,78
11	1	0,17	0,41	0,39	0,73	0,66	0,69
12	3	1,50	1,36	1,37	2,31	2,14	2,21
13	4	0,67	1,70	1,63	2,91	2,90	2,90
14	1	0,17	0,21	0,21	0,64	0,48	0,55
15	1	0,67	0,40	0,41	0,69	0,83	0,77

Tab. 5 Průměrné bodové zisky v testu B u obou sledovaných skupin

U studentů učitelství 2. stupně byla otázkou s nejhorším průměrem otázka č. 14, tedy úloha na procentový počet. V celkovém kontextu však byla nejproblémovější otázkou opět otázka č. 8.

Celkové výsledky této části testu odpovídají předpokladu, že studenti učitelství matematiky pro 2. stupeň ZŠ by měli dosáhnout lepších výsledků.



Graf 3 Srovnání výsledků ve společné části testu

Kontaktní adresa

Mgr. Daniela Blažková
Katedra matematiky PdF UP Olomouc
Žižkovo nám. 5
771 40 OLOMOUC
Telefon: +420 585 635 705
E-mail: blazkovd@pdfnw.upol.cz

PŘIROZENÁ ČÍSLA A POSLOUPNOSTI JAKO PROSTŘEDEK ROZVÍJENÍ EXAKTNÍHO MYŠLENÍ ŽÁKŮ

Růžena BLAŽKOVÁ

Abstrakt

Ukázka několika úloh s náměty využívajících aritmetické a geometrické posloupnosti v učivu matematiky 1. stupně základní školy i v přípravě budoucích učitelů matematiky.

NATURAL NUMBERS AND SEQUENCES AS A TOOL FOR DEVELOPING EXACT WAY OF THINKING OF PUPILS

Abstract

In this contribution we present problems concerning mathematics in primary school. In particular, we show how arithmetic and geometric sequences can be used.

Kurikulární dokumenty v každém období stanovují jako jeden ze základních cílů výuky matematiky rozvíjení logického, abstraktního, exaktního, funkčního a kombinatorického myšlení. Je tomu tak i v současnosti, kdy se v cílech vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace uvádí: *"Vzdělávání v dané vzdělávací oblasti směřuje k utváření a rozvíjení klíčových kompetencí tím, že vede žáka k rozvíjení abstraktního a exaktního myšlení osvojováním si a využíváním základních matematických pojmů a vztahů, poznávání jejich charakteristických vlastností."* (8, s. 21, 22).

Zařazení tématického okruhu Nestandardní aplikačních úloh a problémy poskytuje možnosti zařazování takových úloh, jejichž řešení může být do značné míry nezávislé na znalostech a dovednostech školské matematiky, ale při němž je nutné uplatnit logické myšlení. Jedná se zejména o úlohy, v nichž žáci vyhledávají zákonitosti v různých číselných řadách i o úlohy, ve kterých se vyskytují prvky učiva o posloupnostech. Nejde v žádném případě o výuku dané problematiky, ale o určitý směr přemýšlení a o procvičování operací s přirozenými čísly na nestandardních úlohách. Řešení úloh s propedeutikou posloupností může být pro žáky přínosné do budoucna, kdy budou řešit úlohy týkající se například úvěrů, úroků, růstu počtu obyvatelstva, růstu společenstev, růstu produktivity práce, poločasu rozpadu různých látek aj. Rovněž mohou přispět k lepšímu chápání úloh ze zájmové matematiky týkajících se např. posloupnosti čtverců vepisovaných postupně do daného čtverce za určitých podmínek, posloupnosti trojúhelníků vepisovaných do rovnostranného trojúhelníku, tvoreni spirály aj. Propedeutika posloupností vyžaduje pouze znalosti počítání s přirozenými čísly. Geometrická interpretace a vhodné grafické znázornění

usnadňují přístup k řešení úloh a napomáhají lepšímu pochopení souvislostí a zákonitostí.

Se studenty studia učitelství pro 1. stupeň jsem řešila úlohy v disciplíně Metody řešení matematických úloh a pomocí induktivních přístupů studenti přicházeli na obecná vyjádření. Závěry byly formulovány jako matematické věty a ty pak byly dokazovány. Studenti tak poznávali výhody induktivních a deduktivních postupů a způsobů ověřování a dokazování, např. matematickou indukcí.

Úloha 1.

Zapišeme n přirozených čísel do obrazce tvaru trojúhelníku, očíslováme jednotlivé sloupce:

Sloupec č.:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
										101	122	
									82	102	--	
								65	83	103	--	
							50	66	84	104	--	
						37	51	67	85	105	--	
					26	38	52	68	86	106	--	
				17	27	39	53	69	87	107	--	
			10	18	28	40	54	70	88	108	--	
		5	11	19	29	41	55	71	89	109	--	
	2	6	12	20	30	42	56	72	90	110	--	
1	3	7	13	21	31	43	57	73	91	111	--	
	4	8	14	22	32	44	58	74	92	112	--	
		9	15	23	33	45	59	75	93	113	--	
			16	24	34	46	60	76	94	114	--	
				25	35	47	61	77	95	115	--	
					36	48	62	78	96	116	--	
						49	63	79	97	117	--	
							64	80	98	118	--	
								81	99	119	--	
									100	120	--	
										121		
											144	

Jaké zákonitosti můžeme sledovat:

- poslední číslo v každém sloupci je součinem dvou sobě rovných čísel udávajících pořadí sloupce (druhá mocnina čísla sloupce), např. $4 \cdot 4 = 16$, $7 \cdot 7 = 49$, ... $10 \cdot 10 = 100$, ...
- součin kterýchkoliv dvou sousedních čísel je zapsán v tomtéž řádku jako oba činitelé, např. $3 \cdot 7 = 21$, $7 \cdot 8 = 56$, $8 \cdot 14 = 112$, ...
- vybereme-li si řádek začínající číslem 1, pak následující čísla jsou tvořena takto:

$$\begin{array}{cccccccc}
 1 & 3 & 7 & 13 & 21 & 31 & 43 & 57, \dots \\
 +2 & +4 & +6 & +8 & +10 & +12 & \dots &
 \end{array}$$

- $$16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 21 + 22 + 23 + 24$$

- a) Určete součet všech lichých čísel od jedné do sta.
 b) Určete součet všech sudých čísel od jedné do sta.
 c) O kolik se liší součty z případů a) a b)?
 d) Pozorujeme-li postupně součty čísel lichých, můžeme si povšimnout:

$$\begin{array}{ll} 1 & \\ 1 + 3 = 4 & 4 = 2 \cdot 2 = 2^2 \\ 1 + 3 + 5 = 9 & 9 = 3 \cdot 3 = 3^2 \\ 1 + 3 + 5 + 7 = 16 & 16 = 4 \cdot 4 = 4^2 \end{array}$$

atd.

obecně $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$

Tato skutečnost má velmi pěknou geometrickou interpretaci, která mimo jiné ilustruje i souvislost se čtvercovými čísly.

- e) Pozorujme postupně součty čísel sudých:

$$\begin{array}{ll} 2 & \\ 2 + 4 = 6 & 6 = 2 \cdot 3 \\ 2 + 4 + 6 = 12 & 12 = 3 \cdot 4 \\ 2 + 4 + 6 + 8 = 20 & 20 = 4 \cdot 5 \\ 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30 & 30 = 5 \cdot 6 \end{array}$$

atd.

obecně: $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n \cdot (n + 1)$

- f) Vypočítejte součet všech dvojciferných přirozených čísel.
 g) Vypočítejte součet všech trojciferných přirozených čísel.

Úloha 4.

Ščítejte postupně přirozená čísla po sobě jdoucí a pokuste se součet vyjádřit jiným způsobem.

$$\begin{array}{ll} 1 & \\ 1 + 2 = 3 & 3 = (2 \cdot 3) : 2 \\ 1 + 2 + 3 = 6 & 6 = (3 \cdot 4) : 2 \\ 1 + 2 + 3 + 4 = 10 & 10 = (4 \cdot 5) : 2 \\ 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 & 15 = (5 \cdot 6) : 2 \end{array}$$

atd.

obecně: $1 + 2 + 3 + \dots + n = n(n + 1) : 2$ $\left(\frac{n(n + 1)}{2} \right)$

Úloha 5

Zapište číslo 100 jako součet čtyř přirozených čísel, pro která platí, že každé následující je o 10 větší než předcházející.

Při vhodném grafickém znázornění vede úloha k výpočtu $(100 - 60) : 4 = 10$.

Hledaná čísla jsou 10, 20, 30, 40.

Úloha 6

Šest hráčů golfu porovnávalo svůj věk a vytvořili tuto úlohu. Je nám dohromady 315 roků a když se postavíme do řady od nejmladšího k nejstaršímu, zjistíme, že každý následující je o rok straší než ten, co stojí před ním. Kolik roků je nejstaršímu z nás?

Pomocí grafického znázornění lze zapsat příklad $(315 - 15) : 6 = 50$.

Nejstaršímu je 55 roků.

Úloha 7

Veronika kreslila domeček a na střechu pečlivě zakreslovala pomocí obloučků tašky. V první řadě u hřebenu střechy nakreslila 3 a v každé následující řadě o jednu tašku více.

a) Kolik tašek nakreslila celkem, když bylo 5 řad?

$$(3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 25)$$

b) Kolik tašek bylo v poslední řadě? (7)

c) Kolik nakreslila řad, když tašek bylo celkem 33? (6)

Dostáváme aritmetickou posloupnost, kdy každý následující člen je o jednu větší než člen předcházející.

Úloha 8

Petr stavěl pyramidu z PET lahví. V dolní řadě jich umístil 10 a další lahve pokládal do prohlubní v předchozí řadě tak, že v každé následující bylo vždy o jednu láhev méně. Kolik lahví potřeboval na celou stavbu, když nahoře byla jedna láhev?

$$10 + 9 + 8 + \dots + 1 = 55$$

Celkem potřeboval 55 lahví.

Úloha 9

Jak se šíří zprávy? Anička má velké tajemství a sdělí je jen třem nejvěrnějším kamarádkám. Každá z kamarádek to také sdělí třem dalším, atd. Kolik děvčat by znalo tajemství za týden?

1. den	1	celkem	1
2. den	3		4
3. den	9		13
4. den	27		40
5. den	81		121
6. den	243		364
7. den	729		1 073

Dostáváme geometrickou posloupnost 1, 3, 9, 27, 81, ...,

Každý člen je třikrát větší než člen předcházející.

Úloha 10

Paní Eva má také tajemství, první den je sdělí jedné kamarádce a další den ještě jedné a pak už nikomu. Každá kamarádka to udělá stejně. Jak rychle se bude tajemství šířit?

1. den	1	celkem	1
2. den	1		2
3. den	2		4
4. den	3		7
5. den	5		12
6. den	8		20
7. den	13		33

atd.

Dostáváme Fibonacciovu posloupnost, u které je první člen roven 1, druhý člen je roven 1 a každý následující člen je roven součtu dvou členů předcházejících,

$$1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 13 \quad 21 \quad 34 \quad 55 \dots$$

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

Jedná se o modifikaci známé úlohy Leonarda Pisánského – Fibonacciho – o počtu králíků. Tato úloha byla uvedena v jeho knize Liber abaci z roku 1202.

Úloha 11

Filip dostal e-mailovou zprávu s prosbou, aby ji zaslal dalším pěti známým. Kdyby tak pokračovali všichni, jak by se zvětšoval počet osob, které by dostaly zprávu?

5, 25, 125, 625, 3 125, 15 625, ...

Každé následující číslo je pětikrát větší, než číslo předcházející.

Úloha 12

Zdeněk pracoval 10 dní a za práci si mohl vybrat odměnu:

- a) První den dostal 10 Kč a každý následující den do 10 Kč více než předcházející den.
- b) První den dostal 1 Kč a každý následující den dvojnásobek toho, co předcházející den.

Která možnost pro něj byla výhodnější?

- a) $10 + 20 + 30 + 40 + \dots + 100 = 550$

Jedná se o součet deseti členů aritmetické posloupnosti.

- b) $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 512 = 1\,023$

Jedná se o součet deseti členů geometrické posloupnosti.

Úloha 13

V literatuře se uvádí historická úloha: Kupec chtěl koupit koně a s prodejcem se dohodl, že koně dostane zadarmo, ale že zaplatí pouze hřebíky v jeho podkovách. Každá podkova je přibita 6 hřebíky, celkem jich je 24. Za první hřebík zaplatí 1 groš, za druhý 2 groše a za každý další dvakrát více než za předchozí. Kolik grošů kupec zaplatil?

Modifikace úlohy současná:

Kovář koval koně, každou podkovu připevňoval šesti hřebíky. Za práci s řekl si o takovou odměnu: Za první přibitý hřebík zaplatí majitel koně 1 Kč a za každý další hřebík dvojnásobek ceny předchozího. Hřebíků je na každé podkově 6, podkovy jsou 4. Kolik Kč by za těchto podmínek majitel koně zaplatil?

1 2 4 8 16 32 64 128 256 512 1024 2 048 4 096 8 192 16 384 32 768
... .. 8 388 608

Majitel koně by celkem zaplatil 16 777 216 Kč.

Modifikace úlohy jednodušší:

V reklamních novinách bylo uvedeno: Kabát zdarma, platíte jen knoflíky. Knoflíků je celkem dvanáct. Za první knoflík zaplatíte 1 Kč a za každý následující vždy dvojnásobek ceny předcházejícího knoflíku. Kolik korun zaplatíme za knoflíky celkem? *Za poslední knoflík zaplatíme 2 408 Kč, celková cena bude 4 095 Kč.*

Pozorování:

Všimněte si, že platí:

$$1 + 2 = 3$$

$$3 + 1 = 4$$

$$1 + 2 + 4 = 7$$

$$7 + 1 = 8$$

$$1 + 2 + 4 + 8 = 15$$

$$15 + 1 = 16$$

Součet n čísel je vždy o jednu menší než číslo následující.

Úloha 14

Bakterie se množí dělením tak, že za půl hodiny se z jedné bakterie utvoří dvě.

- Zapište jak postupně roste počet bakterií.
- Ve 12 hodin byla zkumavka, ve které se bakterie množily, plná. Jakou část zkumavky zaplňovaly bakterie v 11.30 hodin?
 - 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...
 - Byla zaplněna polovina zkumavky.

Úloha 15

Kolik mají celkem nohou?

Na hřišti je 5 děvčat, každá má 5 košíků, v každém košíku je 5 koček a každá kočka má 5 koťat. Kolik mají všichni dohromady nohou?

Počty nohou:

Děvčata: $2 \cdot 5 = 10$

Košíky: $0 \cdot 5 \cdot 5 = 0$

Kočky: $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 500$

Koťata: $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2\,500$

Dohromady mají 3 010 nohou.

Úloha 16

V řadě čísel 19, 7, 17, 14, 15, 21, 13, 28, 11, 35, ... najděte nějakou zákonitost.

Rozdělíme řadu na dvě řady:

19, 17, 15, 13, 11, ...

7, 14, 21, 28, 35, ...

Vidíme, že se jedná o dvě aritmetické posloupnosti.

Úloha 17

Znáznorněte geometricky tzv. obrazcová čísla:

Čísla trojúhelníková: 1, 3, 6, 10, ...

Čísla čtvercová: 1, 4, 9, 16, ...

Čísla pětiúhelníková: 1, 5, 12, 22, ...

Čísla šestiúhelníková: 1, 6, 15, 28, ...

Úloha 18

Lenoch a čert. Čert řekl lenochovi, jak zbohatne. Přejdeš most a peníze, co máš v kapse, ti zdvojnásobím. Za odměnu mi odevzdáš 24 korun a můžeš přecházet, jak dlouho chceš. Lenocho přišel třikrát a měl kapsu prázdnou. Kolik korun měl v kapse na začátku?

Úlohu je vhodné řešit "od konce". Na počátku měl 21 Kč.

Literatura

- ADLER, I.: *Čísel hra kouzelná*. Praha: Horizont 1972
- BLAŽKOVÁ, R.: *Problémové a zajímavé úlohy v matematice*. Brno: PÚMB, 1991.
- KOPKA, J.: *Hrozny problémů ve školské matematice*. Ústí nad Labem: UJEP, 1999. ISBN 80-7044-24-6.
- KOPKA, J.: *Výzkumný přístup při výuce matematiky*. Ústí nad Labem: UJEP, 2004. ISBN 80-7044-604-8.
- KORDÉMSKIJ, B., A.: *Matematické prostocviky*. Praha: Mladá fronta 1957.

6. ODVÁRKO, O.: *Matematika pro gymnázia. Posloupnosti a řady*. Praha: Prometheus, 1995. ISBN 80-7196-195-7.
7. OPAVA, Z.: *Matematika kolem nás*. Praha: Albatros, 1989.
8. Rámcový vzdělávací program. Dostupné na <http://www.vuppraha.cz>

Príspevek byl zpracován jakou součástí řešení výzkumného záměru MSM 0021622443 Speciální potřeby žáků v kontextu Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání.

Kontaktní adresa

*RNDr. Růžena Blažková, CSc.
Katedra matematiky Pedagogické fakulty MU
Poříčí 31
603 00 Brno
Telefon: +420 549 491 678
E-mail: blazkova@ped.muni.cz*

TVORIVÁ PRÁCA UČITEĽA MATEMATIKY 1. STUPŇA ZŠ SO ŽIAKMI ZO SOCIÁLNE ZNEVÝHODNENÉHO PROSTREDIA

Jaroslava BRINCKOVÁ

Abstrakt

Príspevok oboznamuje s prácou tvorivého učiteľa v inovácii kurikula a vyučovacích postupov s využitím medzi predmetovej integrácie matematiky a hudobnej výchovy v 2. ročníku ZŠ v triede so žiakmi, pochádzajúcimi zo sociálne oslabeného prostredia.

CREATIVE WORK OF TEACHER OF MATHEMATICS WITH PUPILS FROM SOCIALLY DISADVANTAGED BACKGROUND AT ELEMENTARY SCHOOL

Abstract

The article is dealing with work of creative teacher during process innovation of curriculum and teaching ways. The teacher uses integration of mathematics and music in the 2nd class. The pupils are from socially disadvantaged background.

1. Úvod naučiť sa takým

„Ak deti nie sú schopné

*spôsobom, akým ich učíme, potom
musíme nájsť taký spôsob, aby sa to
dokázali naučiť.“*
(Susan Ignelziová)

Dobré vzdelanie tvorí základ pre budúci úspešný život jednotlivca v spoločnosti, nedostatok vzdelania naopak handicapuje dospelého jedinca a zabraňuje mu uplatniť sa v spoločnosti. Dať šancu žiakom zo sociálne znevýhodneného prostredia uspieť v škole, je podľa nás nevyhnutným predpokladom ich začlenenia sa do spoločnosti.

Sociálne znevýhodneným prostredím sa rozumie prostredie, ktoré vzhľadom na sociálne a jazykové podmienky nedáva žiakovi predpoklad na zvládnutie učiva 1. ročníka základnej školy za jeden školský rok. Žiak, pochádzajúci zo sociálne znevýhodneného prostredia je žiakom s problémami v učení a postojoch, vzniknutých na základe dysfunkčných sociálnych podmienok vyplývajúcich zo sociálneho vylúčenia (napr. chudoba, nedostatočné vzdelanie rodičov, neštandardné bytové a hygienické podmienky a podobne.) [7]

Úlohou učiteľa je, dať všetkým žiakom čas a príležitosť na získanie vedomostí, skúseností a zručností, ktoré dokážu neskôr uplatniť v živote. Poskytnúť im možnosť uvažovať, akceptovať rôznosť nápadov a názorov, podporovať ich aktívne angažovanie sa do učenia, vytvoriť pre nich neohrožujúce prostredie a navodiť pocit pohody a istoty.

2. Rómski žiaci a vyučovanie matematiky

Najpočetnejšiu skupinu ľudí, žijúcich v sociálne znevýhodnenom prostredí, tvorí skupina rómskeho etnika. Jej populačná krivka na rozdiel od majoritného etnika neklesá. Rómski žiaci prichádzajúci do školského zariadenia a predstavujú spoločenský problém. Rómsky žiak, pre ktorého je jeho rodina so svojimi zvykmi, hodnotami a normami celým svetom, sa zrazu dostáva do sveta celkom odlišného, plného nových ľudí, vecí, pravidiel a povinností. Dostáva sa do školskej triedy, ktorá by mala byť jeho referenčnou skupinou, v ktorej by malo nájsť svoje miesto a byť v nej akceptované a prijímané. Najväčšie ťažkosti, ktoré sa u týchto žiakov v škole prejavujú sú :

- ťažkosti pri pochopení školských noriem a cieľov, ako napríklad stanovený rozvrh, minimálna úroveň sebaovládania, alebo pochopenia užitočnosti školských vedomostí
- nerozvinutá individuálna zodpovednosť za svoje činy, správanie, za seba, pretože rozhodnutia sú prijímané kolektívne komunitou a sú záväzné pre každého jej člena
- nedostatočná motivácia na dosahovanie stanovených úloh, nízke sebavedomie
- hyperaktívne správanie a ťažkosti s pozornosťou a to hlavne z dôvodov nedostatočnej motivácie, neschopnosti stvárňovať hlavnú úlohu a uzavretej štruktúry školy
- chýbajúce návyky a schémy predchádzajúcich vedomostí potrebných na učenie sa a adaptáciu školských aktivít [5, s.18]
- predsudkami, ktoré majú majoritní žiaci voči rómskym a naopak
- rómsky žiak sa vynikajúco intuitívne orientuje v medziľudských vzťahoch, vycíti láskavé srdce dospelého, pričom nerozlišuje, či je to Róm alebo Slovák, je živý, temperamentný a vyžaduje veľa neustálej pozornosti od dospelého, čo môže u pedagóga vyvolať negatívne pocity a odmeranosť
- rómsky žiak v zmiešaných triedach býva skôr žiakom neoblúbeným, často je prijímaný najmä problémovými spolužiakmi, ktorým sa prispôbuje, čo následne vyvoláva produkciu nevhodného správania, za ktoré je trestaný a odmietaný [4,s.3-4]

Učenie sa matematike je prepojené aj s prácou s knihou. Podľa Gerovej a Kováčika (s. 170-171, 2006) „... knihy sa v tomto“ (myslí sa v sociálne zaostalom prostredí) „vyskytujú len ojedinele a najčastejšie sú to učebnice starších súrodencov. ... Podobne je to s detskými časopismi. ... Ak dieťa počas prípravy na vstup do prvého ročníka základnej školy nepracuje s knihou a časopisom, je ochudobnené o zážitky a rôzne poznatky z matematického aj nematematického učiva.“ Učenie sa matematike predstavuje pre rómskeho žiaka problém komunikácie vo dvoch nových jazykoch súčasne.

Človek nespracúva informácie a neučí sa iba jedným spôsobom alebo pomocou jedného typu inteligencie. Vychádzajúc z najnovších pohľadov H. Gardnera [2, s.90] na rozvíjanie psychických funkcií a procesov učenia sa konštatujeme, že na učenie sa matematike, potrebuje žiak mať pocit neohrozeného prostredia. Potrebuje prezentovať problémy a úlohy spôsobom, využívajúcim jeho najrozvinutejší typ inteligencie, aby mohol spracovávať myšlienkové operácie na tretej úrovni mozgovej činnosti.

H. Gardner inteligenciu opisuje ako súbor zručností riešiť problémy, ktoré umožňujú človeku nájsť riešenia skutočných problémov alebo ťažkostí, ktorým je vystavený, a ak je to potrebné, dosiahnuť účinný výsledok. Inteligencia tiež umožňuje problémy nachádzať alebo vytvárať, čím kladie základy na osvojenie nových

vedomostí. Tieto podmienky by nám mali pomôcť pri hľadaní tých intelektových schopností, ktoré sú v určitom kultúrnom kontexte pre vyučovanie matematiky významné. Ľudské kultúry sa však veľmi, niekedy dokonca zásadne líšia v tom, čo považujú za podstatné. Nové výtvary, či nové otázky vznikajúce v jednej kultúre môžu mať v inom prostredí len veľmi malý význam. Uvedené podmienky zaisťujú, aby bola inteligencia aspoň v určitom kultúrnom prostredí naozaj užitočná a dôležitá.

Rómske etnikum má výrazne rozvinuté dispozície hudobnej inteligencie. Hudba a hudobné činnosti integrované do vyučovania ostatných predmetov môžu navodiť atmosféru aktívnej a pokojnej práce v triede aj vo vyučovaní matematiky.

Učitelia a školy, prostredníctvom otvorených a flexibilných učebných osnov, nových učebných postupov, metód a stratégií, môžu žiakom veľmi pomôcť. Vyučovaci proces môžu priblížiť záujmom, potrebám i temperamentu žiakov. Tí by sa mali v škole cítiť príjemne, bezpečne a uvoľnene. A aby tomu tak bolo, mal by sa učiteľ občas vcítiť do ich roly.

Len od učiteľa závisí, ako bude prebiehať matematické vzdelávanie v triede. A ak mu na žiakoch záleží, robí všetko preto, aby mali z učenia radosť. Aj náročné a ťažké úlohy sa dajú zvládnuť ľahšie, ak nájdeme tu správnu cestu, zohľadňujúcu špecifiká učenia sa matematike a typu inteligencie rómskych žiakov.

3. Práca tvorivého učiteľa

Didaktickú prípravu učiteľa matematiky v štúdiu Predškolskej a elementárnej pedagogiky orientujeme na zvládnutie novej koncepcie vyučovania, využívajúcej medzipredmetové vzťahy. Zameriavame ju hlavne na zvládnutie obsahov tvorby neohrozeného prostredia v triede, použite nových vyučovacích metód a inováciu kurikula. Táto filozofia vyučovania si vyžaduje vysoko tvorivého, špeciálne pripraveného učiteľa, ochotného pracovať na sebe v záujme rozvoja žiaka. Výhodou, podľa Zelinu [9, s.60] je zvýšená aktivita, samostatnosť a tvorivosť žiakov, pozitívna a pokojná atmosféra na vyučovaní, komplexnosť a prepojenie kognitívnych aj non kognitívnych oblastí osobnosti a celková humanizácia edukatívneho prostredia. Jej úplné zvládnutie a realizáciu v praktickej príprave učiteľov prezentujeme v nasledujúcej časti nami vedenej rigoróznejšej práce D. Jedinákovej [4], ktorá vyučuje žiakov zo sociálne znevýhodneného prostredia na 1. stupni ZŠ už 16 rokov.

Prvým impulzom ku zmenám, orientovaným na využitie medzi predmetovej integrácie v jej triedach bolo poznanie rodinného života žiakov, navštevujúcich ZŠ v Kolačkove. Táto oblasť je známa tým, že má v okolitých obciach veľa folklórnych súborov a hudobných skupín. Väčšina žiakov školy pozná a spieva ich piesne v škole, ale aj mimo vyučovania. Možnosť vyjadriť sa spevom alebo pomocou hudobných činností motivuje žiakov k väčšiemu záujmu o preberané učivo. Navodzuje priateľskú atmosféru v triede tak u žiakov zo sociálne oslabeného prostredia, ako aj u ostatných žiakov.

2.1 Inovácia obsahu a metód vyučovania

Cieľom vyučovania matematiky je uspokojenie tých matematických potrieb žiakov, ktoré im nastoľuje každodenný život. Veľmi dôležité je pripraviť ich na získanie základného a stredného vzdelania z matematiky. Svojím obsahom a metódami práce vyučovanie matematiky prispieva k rozvoju tvorivých schopností, k vytrvalosti, pracovitosti, vôľových čŕt osobnosti žiaka a podobne.

Vyučovanie matematiky v 2. ročníku ZŠ nadväzuje na vedomosti a zručnosti, ktoré žiaci získali už v 1. ročníku. Matematické vedomosti v každom ročníku ZŠ sa budujú

v súlade s matematickou teóriou len do tej miery, do akej je to v súlade s vekovými a psychickými osobitosťami žiakov.

Hudobná výchova patrí k esteticko-výchovným predmetom. Hudba je pre žiakov na 1. stupni ZŠ predovšetkým hrou, predmetom detského experimentovania, príležitosťou na uplatnenie poznávacieho a objaviteľského inštinktu, bránou do zákonitostí života. Pomáha rozvíjať citový svet žiakov, vedie ku uvedomeniu a rozlišovaniu mravných i estetických hodnôt, k otvorenosti a tvorivosti. Hudobná výchova si kladie za cieľ vychovať vnímavého a aktívneho poslucháča a pritom vychádza zo spojenia reči, spevu, pohybu, tanca, počúvania hudby a inštrumentálnych činností. Vzájomným prepojením jednotlivých zložiek rozvíja hudobná výchova celkovú hudobnosť žiakov, pričom rešpektuje ich individuálne schopnosti, záujmy a potreby.

Na základe inovovaných učebných plánov vznikli nové pracovné listy z matematiky. K bežnej strane v pracovnom zošite autorov Černek, P., Repáš, V. [1] bola pridaná zaujímavá hudobná činnosť v súlade s učebným plánom hudobnej výchovy. V prvom pracovnom zošite sme pridávali rozmanité hudobné činnosti na každú druhú pracovnú stranu, v druhom pracovnom zošite už na každú pracovnú stranu. Jeden deň v týždni si žiaci sami volili hudobnú činnosť, ktorú potom realizovali na vyučovacej hodine. Výber činností bol usmerňovaný učiteľom, aby zvolená činnosť splnila didaktický cieľ. Používali sme aj učebnicu matematiky, ale pri riešení úloh z nich, sme hudobné činnosti nezaraďovali.

Volili sme predovšetkým také činnosti, ktoré sú u žiakov obľúbené, primerané ich schopnostiam, zručnostiam aj vedomostiam. Najčastejšie sme zaraďovali **vokálne činnosti**. Tie sú z hľadiska hudobno-výchovnej činnosti veľmi blízke deťom na dedine a o to viac deťom zo sociálne znevýhodneného prostredia. Ich výhodou je aj nenáročnosť z hľadiska prípravy na konkrétnu činnosť, aj z hľadiska materiálno-technického vybavenia. Výber piesní a ich zaradenie do vyučovacieho procesu je časovo nenáročné a nevyžaduje si špeciálnu prípravu. Uprednostňovali sme piesne, ktoré už deti poznajú, ale aj menej známe piesne, piesne o prírode, zvieratkách, o rodine či škole. Napríklad piesne z CD Pastrnovci a Zamišovci. [8]. Tiež piesne, ktoré sa spievajú v ich regióne – goralské, ba aj rómske piesne. Je pomerne zaujímavé, že napriek veľkej inklinácii rómskeho etnika k hudbe a k spevu, sme sa doposiaľ nestretli s rómskymi detskými piesňami.

Ďalšie činnosti boli **rytmické činnosti**, alebo rytmická výchova. Tá sa realizuje buď samostatne alebo s intonačnou výchovou a rytmické zručnosti rozvíjame aj v rámci hudobno-pohybovej a inštrumentálnej činnosti. Volili sme najmä rytmizáciu piesní, riekaniek a vyčítaniek, ale aj rytmizáciu rôznych, predovšetkým algoritmických úloh z matematiky a tiež rytmické hry. Realizovali sme ich rôznymi formami ako tleskanie, plieskanie, dupanie, lúskanie, ale aj ich vzájomnou kombináciou.

Integráciou obsahu vzdelávania týchto dvoch predmetov v 2. ročníku ZŠ, navodením pokojnej pracovnej atmosféry pri riešení úloh za súčasného počúvania tichej hudby je možné upevniť vzťah k riešeniu úloh v matematike a osvojeniu si učiva matematiky u žiakov zo sociálne oslabeného prostredia, ale aj u ostatných žiakov.

Experimenty realizované počas troch rokov výskumu a následné porovnanie výsledkov v mesačných písomných prácach experimentálnych a kontrolných tried ukázali, že faktor zabúdania poznatkov žiakov u experimentálnej triedy je menší, ako v kontrolnej triede, pričom obľuba riešenia úloh v matematike rastie. S obsahom inovovaných pracovných listov a riešeniami žiakov oboznámime v prednáške.

Záver

Vybranými hudobnými činnosťami sme navodili dobrú pracovnú atmosféru a zvýšili efektívnosť riešenia úloh žiakov v experimentálnej skupine.

Náš edukačný zámer vychádzal z poznania, že každý žiak má k niečomu blízky vzťah, má niečo rád. Jeden obľubuje výtvarný prejav, iný hudbu, ďalší pohyb atď. Aj matematika, tak ako každý iný predmet má svojich zástancov, žiakov, ktorí ju majú radi, ale práve matematika je u mnohých žiakov aj strašiakom. Veľa žiakov má vo vyšších ročníkoch školy s matematikou problém a to už nehovoríme o deťoch, ktoré pochádzajú zo sociálne znevýhodneného prostredia. Je stále potrebné hľadať spôsob, ako plniť výchovno-vzdelávacie ciele matematiky a súčasne pomôcť žiakom. Hudba je týmto deťom srdcu blízka, preto sme sa rozhodli hľadať cestu práve cez ňu. Myslíme si, že práve hudba – hudobný materiál, ktorý sa realizuje prostredníctvom hudobných činností pomôže zmenšiť problémy, ktoré vznikajú pri riešení úloh vo vyučovaní matematiky a pomôže nám ich riešiť zábavnejšou a pútavejšou formou.

Pre učiteľa je dôležité, aby u žiakov vzbudil lásku k učeniu a to aj tým, že im navodí pocit istoty a pohody, vytvoril pre žiaka neohrozené prostredie. Vďaka tomu sa zmení klíma triedy, atmosféra a ovzdušie, pocit spolupatričnosti a spoločenstva, zapájanie všetkých do rozhodovacieho procesu, láskavosť a vzájomné povzbudzovanie spolužiakov a aj vhodná komunikácia so žiakmi. A keďže bolo vyučovanie prispôsobené záujmom žiakov, odrazilo sa to aj na lepších výchovných aj vedomostných výsledkoch v experimentálnych triedach.

Literatura

1. ČERNEK, P., REPAŠ. V.: *Matematika pre 2. ročník ZŠ*. Pracovné listy 1 a 2. Bratislava: OPI, 2005.
2. GARDNER, H. : *Dimenze myšlení*. Praha: Portál, 1999. ISBN 80-7178-279-3
3. GEROVÁ, L., KOVÁČIK, Š.: Predškolská príprava a pracovné zošity. In: Zborník príspevkov z medzinárodnej konferencie „Zvyšovanie úrovne socializácie rómskeho etnika prostredníctvom systémov vzdelávania sociálnych a misijných pracovníkov a asistentov učiteľa“. Nitra: UKF a FSVZ, 2006. s.170-174. ISBN: 80-8050-987-5.
4. JEDINÁKOVÁ, D.: *Využitie medzipredmetových vzťahov vo vyučovaní matematiky v 2. ročníku ZŠ u žiakov zo sociálne znevýhodneného prostredia*. Banská Bystrica: PF UMB, 2007. 154 s. Rigorózna práca
5. KOLEKTÍV AUTOROV: *Vyučovať a učiť sa na základe kultúrnych odlišností*. Bratislava: Oblasť výchovy a vzdelávania, 2003. ISBN 84-95068-16-8
6. KOLEKTÍV AUTOROV: *Pracovný materiál pre nultý ročník základnej školy, 1.časť*. PHARE SK0002.01 Better Conditions for Roma Self – Realisation in the Education Systém, 2003. ISBN bez (10)
7. MINISTERSTVO ŠKOLSTVA SLOVENSKEJ REPUBLIKY. *Metodické usmernenie č. 12/2005- R*
8. PASTRNOCI A ZAMIŠKOVCI : ... a hraj 2. Prešov: DUB-ART, 2003. (CD ROM)
9. ZELINA, M.: *Alternatívne školstvo*. Bratislava, Iris 2000, s.60

Kontaktní adresa

Jaroslava Brincková, Doc., RNDr., CSc.

Katedra matematiky PF UMB

Ružová 13 , 974 11 Banská Bystrica, SR

Telefon: +421 48 43 64 416, e-mail: jbrinckova@pdf.umb.sk

JAK OVLIVŇOVAT PŘESVĚDČENÍ BUDOUCÍCH UČITELŮ

Jana CACHOVÁ

Abstrakt

Příspěvek se zabývá pojmy přesvědčení učitele, přesvědčení studenta učitelství a možností jejich změny směrem k podnětnému vyučování. Ukazuje, že jednou z možností takové změny je rozbor situací z pedagogické praxe studentů. Cílem takové reflexe je zvýšit citlivost studentů vůči sledovaným jevům. V příspěvku je dále ukázáno, kterých jevů si studenti ve svých situacích především všímají.

HOW TO INFLUENCE BELIEFS OF STUDENT TEACHERS

Abstract

The paper deals with the notions of a teacher's beliefs and student teacher's beliefs and with some possibilities of their change towards investigative teaching. One of the possibilities is based on the analysis of classroom situations arising from a student teacher's pedagogical practice. The goal of such a reflection is to sensitize a student to some educational phenomena. The paper shows which phenomena student teachers mostly focus on.

1. Přesvědčení učitele a studenta učitelství

Každý učitel matematiky má své názory na to, jak by mělo vypadat ideální vyučování. Tyto názory v průběhu let v praxi postupně kriticky upravuje a mění. Podobnými změnami prochází během let i jeho postoj ke svému vlastnímu vyučování. Školní praxe tak významně ovlivňuje učitelovo přesvědčení.

Pojem *přesvědčení učitele* (odpovídající anglickému termínu „*beliefs*“, který zavedl Pehkonen – např. viz. Pehkonen, 1994) je podle mého názoru možné nahlížet jako komplexní charakteristiku postoje učitele k otázkám vyučování, zahrnujícím například:

- vyučovací přístupy, které učitel užívá,
- učitelovy představy o ideálním vyučování,
- jeho vztah k žákovi,
- explicitní obraz matematiky v duševním světě učitele,
- cíle vyučování,
- priority ve vyučování atd.

Dobrý učitel musí umět najít vhodnou rovnováhu mezi respektováním cílů školy, potřeb dítěte a specifikou vyučovaného předmětu (tedy didaktikou matematiky).

Stejně tak i začínající učitel a student učitelství si s sebou do vyučování matematice přinášejí svá přesvědčení učitele, která jsou mnohdy velmi silně ovlivněna zkušenostmi, kterých nabyli ve škole ještě v roli žáků. Často na tato přesvědčení mají patrný vliv tradiční vyučovací přístupy.

V současné době, kdy se od učitele očekává, že dokáže pružně reagovat na potřeby jednotlivých žáků a vzájemně je skloubit s cíli vyučování matematice, tradiční vyučovací přístupy však jen stěží obstojí.

Otázky týkající se dodržení vzdělávacích cílů školy, resp. cílů vyučování matematice na jedné straně, a současně vyzdvižení zájmu a potřeb žáka, rozvíjení matematiky v jeho mysli na straně druhé, vedly F. Kuřinu k vymezení tzv. *realistického konstruktivismu* (viz. Hejný, Kuřina, 2008).

Možnosti, jak realizovat myšlenky konstruktivismu v praxi, ukazuje tzv. podnětné vyučování (viz. podrobně Stehlíková, Cachová, 2006):

- *Učitel probouzí zájem dítěte o matematiku a její poznávání.*
- *Učitel předkládá žákům podnětná prostředí (úlohy a problémy) a vhodně s nimi pracuje.*
- *Učitel jde především o žákovu aktivní činnost.*
- *Učitel nahlíží na chybu jako na vývojové stádium žákova chápání matematiky a impuls pro další práci.*
- *Učitel se u žáků orientuje na diagnostiku porozumění spíše než na reprodukci odpovědi.*

Jak ale dovést studenty ke změně jejich přesvědčení?

Jednou z možností je podle mého názoru diskutovat na didaktických seminářích situace z jejich pedagogické praxe.

2. Situace z pedagogické praxe studentů učitelství a možnosti jejich reflexe

Na úvod začneme několika situacemi, které se odehrály během pedagogické praxe studentů učitelství pro primární vzdělávání a které si zaznamenaly samy studentky.

Situace 1.

- *Žáci dostali pracovní list na procvičení malé násobilky (měli umět násobky 2 až 7). V pracovním listě se ale objevily i spoje z násobilky 8 a 9. Žáci ihned upozorňovali, že se v listě objevují početní úlohy typu $9 \cdot 7$, $8 \cdot 6$. Učitelka zareagovala tak, že řekla, že je to to samé jako $7 \cdot 9$, $6 \cdot 8$. Žákům tato odpověď stačila.*
- *Je ale správné takto argumentovat? Např. 9 bonbónů po 7 Kč a 7 bonbónů po 9 Kč je přece rozdíl.*

Situace 2.

- *Při rozdělování žáků do skupin jsem zvolila náhodnou formu – každý žák si na lístečku vylosoval početní úlohu, kterou měl vyřešit, a podle výsledku se zařadit do příslušné skupiny. Problém nastal, když mi žáci oznámili, že takové úlohy ještě nepočítali, nezvládnou je. Paní učitelka zrovna ve třídě nebyla přítomná.*

Situace 3.

- *Děti ve třetím ročníku doplňovaly dvě tabulky z učebnice:*

p	$p \cdot 4$
4	
1	
6	
2	
7	
0	

r	$r : 5$
	8
	1
	5
	7
	4
	3

- *Výpočty v první tabulce byly všechny správné, druhá tabulka však děti velmi zmátla.*

- *Protože jsme měli tuto hodinu za úkol vypočítat velké množství cvičení, zazmatkovala jsem, jednotlivě jsem děti obcházela a znovu a znovu vysvětlovala správný postup. Nakonec, abychom mohli společně přejít k dalšímu cvičení, jsem výsledky nadiktovala a děti si chyby opravily.*

Z uvedených situací je patrné, že pedagogická praxe s sebou přináší řadu otázek, z nichž mnohé zůstávají pro studenty i po rozboru s fakultním učitelem nevyjasněné. Možností, jak na tyto problémy reagovat, je propojit semináře didaktiky matematiky s praxí cestou reflexe zajímavých situací z praxe.

„...Reflexi spojenou s interpretací učebních situací můžeme pokládat za nejlepší způsob, jak rozvíjet profesní myšlení učitelů a jak ukazovat funkčnost didaktické teorie pro praxi ...“ (Slavík, 2004)

Reflexemi ve vyučování matematice se zabývají například M. Tichá a A. Hošpesová (2008).

Reflexí jako prostředkem akčního výzkumu ve škole např. Nezvalová (2003).

Studenti na začátku semestru na cvičení z didaktiky matematiky dostali úkol – *sledovat zajímavé situace v hodinách matematiky na praxi.*

Situace se mohou vázat k činnostem učitele, k žákovi, ke skupinkám žáků či celé třídě, k učivu, netradičním postupům, řešením úloh, k chybám... cokoli, co je na praxi zaujme a o čem by bylo možné na semináři diskutovat (jinými slovy, co v sobě skrývá nějaký problém, který je možné různě řešit).

Studenti pak situaci přednesou na začátku semináře – buď nechají otevřený konec, tj. neukáží, jak situace dále probíhala, jak do ní zasáhli, popř. svůj zásah nebo vyústění situace odhalí.

Pokud je situace složitější a odkrývá obtížnější problém k zamyšlení, dostávají studenti cca 3 min. na samostatné promyšlení situace – hledání vhodných cest, jak se zachovat, jak postupovat.

Poté diskutují nad svými návrhy buď ve skupinkách, nebo přímo jako celá skupina.

Následující tabulky ukazují, na jaké jevy studenti nejvíce zaměřovali svoji pozornost.

NEJVĚTŠÍ POZORNOST BUDOUČÍCH UČITELŮ – ZAMĚŘENA NA ŽÁKA	
Otázky pedagogicko – organizační	Oblast didaktiky M
• Individuální rozdíly mezi dětmi • Rozdíly v tempu práce • Problémy s dětmi se specifickými poruchami učení • Žáci odmítají hrát hry, které jsou založené na úrovni početních dovedností, ve kterých stále prohrávají • Odmítavé postoje ze strany žáka (odmítnutí účasti na výukových činnostech), nekázeň žáků • Nečekané reakce žáků (raději než hrát didaktickou hru, počítat tzv. „sloupečky“ z učebnice) • Neporozumění didaktické hře	• Chyby žáků • Užití chybného postupu, chyby v algoritmech • Neporozumění standardnímu postupu, předkládanému algoritmu • Neschopnost žáků samostatně řešit danou úlohu • Neschopnost žáků řešit nestandardní úlohy (takové, se kterými nemají zkušenosti) • Problémy se slovními úlohami, neporozumění zadání, formální postup řešení • Úlohy, pojmy, vztahy, které dětem činily potíže, chyby v terminologii (zaměňování termínů, chybné označení)

	pojmu) • Neporozumění pojmu, vztahu mezi pojmy • Nedostatečné představy a zkušenosti dětí, nedostatek izolovaných modelů, absence generického modelu • Nedostatečně upevněné pojmy, na které se má navázat • Žáci používají zdoluhavější názorný postup namísto jednoduššího vzorce • Formální užití zkoušky k ověření správnosti výpočtu • Problémy s orientací v prostoru, nedostatečná představivost
--	---

POZORNOST ZAMĚŘENA NA UČITELE	
fakultního	sebe sama
• Chyby učitele • Formální vysvětlení učitele • Učitel věnuje chybě žáka malou pozornost • Nestandardní metody či postupy učitele • Přenášení strachu a negativního vztahu k určitému učivu na žáky • Věci formálního charakteru (způsob opravování, označování chyb atd.)	• Vlastní chyby • Vlastní nedostatky (nedostatečné kompetence) • Neschopnost pohotově reagovat na chybu žáka nebo na jeho nestandardní postup řešení • Nedostatečné či nejasné formulace pokynů • Neporozumění mezi učitelem a žáky – žáci odhadují, co po nich učitel vlastně chce • Hledání vhodného modelu • Mnemotechnické pomůcky • Zadání úloh tak, že výsledek padne mimo obor, ve kterém žáci pracují • Organizační problémy • Jak rozdělit žáky do skupin, aby práce ve skupinách byla co nejefektivnější
Samozřejmě si studenti při praxi všímali především pozitivních jevů, k analýze situací ale vybírali spíše negativní jevy – ačkoli byli vybízeni, aby si všímali i zajímavých pozitivních jevů (např. u žáků netradičních a pěkných řešení atd.)	

JINÉ
• Nepřehlednost pracovních materiálů v učebnici, kritika učebních materiálů, chyby v učebnicích • Obsah učiva – vysvětlení jevů, které patří do učiva vyšších ročníků, ale na které se nějakým způsobem narazí dříve • Otázky týkající se zkoušení a hodnocení žáků

Studenti většinou nalézali více variant, jak v dané situaci postupovat, jevíli o diskuzi skutečný zájem, diskutovaná problematika se jich dotýkala, často si uvědomovali, že mají podobné zkušenosti ze své vlastní praxe.

Cílem této aktivity je především zvyšovat citlivost vůči jevům, kterým by měl budoucí učitel věnovat dostatečnou pozornost.

Domnívám se, že takto mohou postupovat i učitelé na školách. Samostatně se mohou zamýšlet nad situacemi z vlastní výuky. Z nich vybírat takové, které stojí za diskuzi. V malých skupinách (ve dvojici, popř. trojici) s kolegy – učiteli pak o vybraných situacích navzájem diskutovat. Důležité je ovšem najít na škole mezi kolegy – učiteli matematiky – partnery pro takovou diskuzi.

Pokud se podaří takové efektivní diskuze v praxi na škole vést – je možné postupně posouvat přesvědčení učitele směrem ke konstruktivismu.

Vzhledem k čerpání nových podnětů z rozboru školních situací je možné rozšířit teze podnětného vyučování o následující tezi:

- *Učitel se dále učí tím, že citlivě reaguje na situace, které přináší školní praxe, a zpětně se nad nimi zamýšlí.*

V podnětném vyučování jde především o vytváření takových prostředí, která vybízejí žáky k aktivním tvořivým činnostem v matematice. Základní otázkou je zde tvořivost učitele. Rozborem jednotlivých situací z praxe a hledáním dalších vhodných variant jejich řešení, se rovněž tvořivost učitele rozvíjí.

Literatura

1. HEJNÝ, M., KUŘINA, F. *Dítě, škola a matematika*. Druhé doplněné vydání. Praha: Portál, 2008.
2. NEZVALOVÁ, D. *Akční výzkum ve škole*. Pedagogika, 53 (3), 2003.
3. PEHKONEN, E. *On teachers' beliefs and changing mathematics teaching*. Journal für Mathematik-Didaktik 15(3/4), 177-209, 1994.
4. STEHLÍKOVÁ, N., CACHOVÁ, J. *Konstruktivistické přístupy k vyučování a praxe*. In: Studijní materiály k projektu Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP. Praha: JČMF, 2006.
5. SLAVÍK, J. *Profesionální reflexe a interpretace výuky jako prostředník mezi teorií a praxí*. In: Konference Oborové didaktiky v pregraduálním učitelském studiu. Brno: PdF MUNI, 2004.
6. TICHÁ, M., HOŠPEŠOVÁ, A. *Kvalifikovaná pedagogická reflexe – cesta ke zlepšení kultury vyučování?* In: Cesty zlepšování kultury vyučování matematice. České Budějovice: PdF Jihočeské univerzity, 2008.

Příspěvek vznikl s podporou grantu GAČR 406-08-0710

Kontaktní adresa

PhDr. Jana Cachová, Ph.D.
Katedra matematiky, PdF UHK
Rokitanského 62, 500 03 Hradec Králové
Telefon: +420 493 331 140
E-mail: jana.cachova@uhk.cz

KOGNITIVNÍ KONFLIKT JAKO NÁSTROJ PŘEKONÁVÁNÍ PŘEKÁŽEK V POROZUMĚNÍ NEKONEČNU

Jiří CIHLÁŘ, Petr EISENMANN, Magdalena KRÁTKÁ, Petr VOPĚNKA

Abstrakt

Článek je věnován překážkám v porozumění pojmu nekonečno. Jsou formulovány atributy nekonečna a základní typy epistemologických překážek. Podrobně je charakterizován kognitivní konflikt a jeho role při překonávání překážek. Je podána ilustrace této problematiky na reálných experimentálních rozhovorech.

COGNITIVE CONFLICT AS A TOOL OF OVERCOMING OBSTACLES IN UNDERSTANDING OF INFINITY

Abstract

The article is devoted to obstacles in understanding of concept of infinity. Both the attributes of infinity and fundamental types of epistemology obstacles are formulated. The cognitive conflict and its role at the overcoming obstacles are analyzed. Illustration of the problems by means of real experimental interviews is given.

1. Úvod

Pojem **nekonečno** je klíčovým pojmem v matematice i jejím vyučování. Rozvíjení poznatků o nekonečnu tvoří v historii matematiky zásadní mezníky důležité pro její další vývoj. Přijmeme-li hypotézu tzv. genetické paralely, tedy že ontogenetický vývoj neprobíhá nezávisle na vývoji fylogenetickém, lze předpokládat, že ty překážky, které nalezneme ve fylogenezi konceptu nekonečna, nalezneme i v ontogenezi, a že překonání těchto překážek je nutnou komponentou poznávacího procesu jedince. Porozumění mnoha pojmům, se kterými se žáci při vyučování matematiky setkávají, je závislé na postupném vytváření pojmu nekonečno (bod, přímka, úsečka, desetinné zápisy čísel, atd.).

V současné době se v rámci tříletého projektu GAČR zaměřujeme jednak na studium fylogenetického vývoje pojetí nekonečna, a jednak na studium ontogenetického vývoje chápání nekonečna v rámci současné populace. Výzkum by měl být završen formulací návrhů na překonávání zjištěných překážek.

2. Atributy nekonečna

Nekonečno má mnoho různých projevů. Řada důležitých matematických pojmů, metod, jednotlivých myšlenek i rozvinutých teorií je na něm založena. Pro potřeby výzkumu bylo třeba tuto spleť navzájem propojených projevů strukturovat, vyčlenit tedy podle našeho mínění nejdůležitější z těchto projevů, jeho **atributy**. V současnosti se v našem výzkumu soustředíme na těchto šest atributů:

- mohutnost množiny (rozlišování konečných, velmi početných a nekonečných množin, přijetí aktuální nekonečné množiny),
- ohraničenost množiny (rozlišování ohraničených, velmi velkých a neohraničených množin),
- míra množiny (geometrické míry bodových množin, představy nekonečně malých a nekonečně velkých veličin),
- uspořádání (vnímání hustoty uspořádání, polarita „atomických“ a diskrétních představ a představy kontinua u číselných a geometrických množin),
- nekonečný proces (fenomén neomezeného opakování, indukce, rekurse),
- konvergence (vnímání fenoménu přibližování, překonání potenciální argumentace).

3. Překážky v porozumění nekonečnu

Překážku chápeme jako soubor znalostí ukotvených ve znalostní struktuře jedince, které lze v jistých situacích úspěšně používat, ale které v novém kontextu selhávají a dávají špatné výsledky. Pro zvládnutí dalších představ je třeba překážku překonat, tedy rozlišit, které předchozí znalosti jsou přenositelné do nového kontextu, které nejsou přenositelné, a které znalosti se objevují jako nové (Brousseau 1997). Na základě zkušeností z předcházejících výzkumů (Krátká 2005, Cihlár & Eisenmann & Krátká & Vopěnka 2007) jsme získali souhrn překážek v porozumění nekonečnu, které považujeme za principiálně neodstranitelné (**epistemologické**):

- znalosti o „konečnu“ (konečné množiny, konečné procesy, ohraničené objekty, atd.),
- znalosti o uspořádání množiny přirozených čísel,
- potenciální vnímání nekonečného procesu,
- záměna objektu s jeho modelem, speciálně s obrázkem,
- „poloha obzoru“, který v obecném smyslu v určitém kontextu determinuje hranici ostrosti a rozlišitelnosti (Vopěnka 2004).

Vedle epistemologických překážek se můžeme setkat s překážkami jiného charakteru, kterým bychom se mohli vyhnout, aniž bychom pojmotvorný proces narušili. Patří sem zcela jistě didaktické překážky (například zkušenosti z hovorového jazyka, kdy se varianty slova „nekonečno“ objevují v matematicky nepřijatelném kontextu nebo například očekávání, že každá úloha má jednoznačné řešení, atd.).

4. Kognitivní konflikt

Znalosti, které jsou překážkou, v nějakém kontextu selhávají, tj. produkují špatné odpovědi. Toto selhání si žák obvykle neuvědomuje sám, neví, že dostal nesprávný výsledek nebo vyslovil nesprávnou odpověď. Ten, kdo tuto nesprávnou odpověď zaznamená, je nejčastěji učitel. Ten nejprve zaznamená **rozpor** mezi odpovědí jedince a nějakou objektivní pravdou (platnou v dané matematické teorii), v našem případě s pravdou platnou ve školské matematice. Je důležité podotknout, že příčinou stejně projeveného rozporu mohou být u různých jedinců různé překážky.

Pokud si jedinec rozpor **uvědomí** (často za přispění učitele), nebo je schopen si ho v budoucnu (za stávajících znalostí) uvědomit, mluvíme o **kognitivním konfliktu**¹. Kognitivní konflikt tedy není sporem mezi žakovou nesprávnou odpovědí a nějakou objektivní pravdou (to je rozpor), ale konfliktem mezi znalostí produkující tuto

¹ O kognitivním konfliktu hovoří poprvé v souvislosti s pojmem nekonečno Tall (Tall 1976, 1977). O tzv. cognitive conflict teaching approach hovoří v souvislosti s porovnáváním nekonečných množin Swan (Swan 1983).

nesprávnou odpověď a nějakou jinou jeho znalostí. Kognitivní konflikt (KK) je tedy spor ve znalostní struktuře jedince – jedinec si uvědomuje, že jeho znalostní struktura není konzistentní.

Rozlišujeme následující **možnosti**, jak se jedinec vyrovnává s kognitivním konfliktem:

- **Marný pokus o odstranění konfliktu:** jedinec po několika pokusech zjišťuje, že k odstranění konfliktu nemá dostatečné prostředky nebo nemá dostatečnou motivaci nebo je unaven, atd. Odmítá tedy KK odstranit a spor v jeho znalostní struktuře přetrvává. Ani tato varianta vyrovnání se s KK není ale pro něj bezcenná, má totiž propedeutický význam pro další konflikty vyvolané s cílem postupně překonat danou překážku.
- **Nesprávný pokus o odstranění konfliktu:** jedinec se snaží změnit svou kognitivní strukturu tak, že ji přizpůsobuje nesprávné tezi z rozporu. Chybně koriguje správné znalosti, překážka se tedy nemění vůbec nebo mění nežádoucím způsobem a dále přetrvává.
- **Úspěšný pokus o odstranění konfliktu:** jedinec si nabourává víru ve správnost překážky a mění ji tak, že již dále v tomto kontextu nesprávné odpovědi neprodukuje.

Teprve tím, že jedinec **kognitivní konflikt odstraní**, postupně **překonává danou překážku**, která je příčinou zaznamenaného rozporu a vyvolaného KK. Jediná překážka může tedy v různých kontextech vést k vyvolání různých KK. Odstraněním jednoho KK nedojde k úplnému překonání překážky, obvykle je naopak zapotřebí vyvolat u žáka řadu KK (v různých kontextech) a ty odstranit, aby se překážka mohla postupně překonat.

Kognitivní konflikt má dvě funkce:

- pomocí něho můžeme překážku identifikovat (**diagnostická funkce**),
- po jeho navození a odstranění můžeme překážku překonávat, tedy zkvalitňovat znalostní strukturu žáka (**výuková, vzdělávací funkce**).

Učitel může vyvolávat takové situace, kdy předpokládá, že se jedinec dostane do KK. Jeho cílem je buď ověřit existenci předpokládané překážky (diagnostická funkce) nebo překonávat předpokládanou překážku (vzdělávací funkce).

Učitel se ale dostane i do situací, kdy se objeví rozpor, popřípadě už přímo KK nečekaně, resp. nezáměrně. Pak by měl zkoumat, je-li příčinou konfliktu nějaká překážka, dále ji správně diagnostikovat, a pak vyvolávat ve vhodných kontextech další KK, vést žáka k jejich odstraňování, a tak dospět k postupnému překonání dané překážky.

V souvislosti s atributy nekonečna se někteří autoři domnívají (Tall & Schwarzenberger 1978), že by vyučovací proces měl být veden tak, aby se KK vyhýbal, což souvisí s tím, že se autoři zaměřili pouze na konflikty související s didaktickými překážkami. Protože chápeme KK obecněji podle výše uvedeného vymezení, klademe důraz na jeho vzdělávací funkci (Tsamir 2001, Swan 1983), která se realizuje překonáváním překážek.

5. Ilustrační příklady

V následujících dvou příkladech z reálných experimentálních rozhovorů, které jsme prováděli v roce 2007, ilustrujeme záměrné navození KK a komentujeme způsoby, kterými se žáci s nimi vyrovnávali. Číslo v závorce udává pauzu ve vteřinách.

Příklad 1 Jakub 5. třída

Atribut ohraničenosti (rozlišování ohraničených, velmi velkých a neohraničených množin)

Na obrázku je narysována přímka p a body A , B ležící v opačných polorovinách určených přímkou p .

E42: *Tak a teď kdyby si stál tady, (ukazuje tužkou na bod A) na jednom místě a chtěl jsi se dostat sem. (2) Šlo by někudy se dostat do toho bodu B, kdekoli po tom papíře?*

J43: *No, šlo.*

E44: *Ukaž. (Jakub ukazuje na papíře kolem obrázku)*

E46: *Hm. Tak ji tam nakresli, klidně. (Jakub kreslí oblouk kolem obrázku přímky)*

E48: *Hm. (2) Takže ta přímka p neprotne tu čáru AB ?*

J49: *(2) Hm, no, neprotne.*

Experimentátor zaznamenává rozpor, že totiž lze spojit dva body v opačných polorovinách daných přímkou p nějakou čarou tak, že čára neprotíná tuto přímku. Domnívá se, že chybná odpověď je způsobena tím, že Jakub chápe přímku jako její obraz na papíře, což odpovídá výše popsané překážce záměna geometrického objektu a jeho modelu, v tomto případě obrázku.

E52: *Hm. A tak... Tak já se k tomu ještě zeptám (kreslí různoběžky, ale nekonstruuje průsečík) Tady je nějaká jedna přímka. Tady je druhá přímka. (kreslí) Já je pojmenuju třeba (2) m a n , jo. (4) Protnou se tyhle dvě přímky? (3) Našel bys jejich průsečík?*

Experimentátor se snaží navodit kognitivní konflikt. K jeho vyvolání využívá pro Jakuba snadnější úkol, ale neopouští kontext. Domnívá se, že je Jakub schopen tento úkol správně vyřešit.

J53: *(2) No našel, no. Kdybych to ještě víc prodloužil.*

J56: *Můžu to kreslit?*

E58: *Jasně.*

J59: *(kreslí) Takhle a takhle.*

E60: *A našel's jejich průsečík?*

J61: *Tady. (ukazuje tužkou na papír)*

Jakub v tomto kontextu úspěšně úlohu vyřešil. Není ale zatím schopen konfrontovat svou odpověď s řešením původní úlohy. Experimentátor tedy na původní odpověď explicitně upozorní.

E62: *Jasně. Hm. A šlo by teda teďko pro tu tvoji čáru (ukazuje na papíře) AB a pro tu tvoji přímku taky najít průsečík?*

J65: *Taky bych tuhle čáru prodloužil.*

E67: *A můžeš ji prodloužit?*

J68: *(4) No, je to přímka, tak jo.*

E69: *Tak jo.*

Po opakování otázky (E62) si Jakub uvědomuje, že stejný postup může použít i zde a původní odpověď mění. Dochází zde tedy ve velmi krátkém okamžiku jak k navození KK tak k jeho úspěšnému odstranění.

J72: *Můžu, takhle. (kreslí)*

E73: *Jasně.*

J74: *A tady vlastně vznikl takhle ten průsečík.*

E75: *Hm, to je ten bod. Takže teď už protíná tu čáru AB a dala by se tam nakreslit jiná čára, která by zase přímku neprotínala?*

J76: *Zase neprotínala (3). Uf.*

E77: *Viš, jak to bylo předtím. (ukazuje na papír) Předtím si tu čáru AB nakreslil tak, aby tam ten průsečík nebyl. Ted' jsi tu přímkou trochu prodloužil, takže tam zase je. Šla by tam nějaká jiná, ne tahleta čára (ukazuje na papír), nějaká jiná nakreslit?*

I když v předcházející části rozhovoru Jakub svou odpověď opravil žádoucím způsobem, experimentátor se ujišťuje, že v tomto kontextu byl konflikt skutečně odstraněn a proto se ptá podobně znovu (E77 a dále E81).

J78: *Ne.*

E79: *Nešla?*

J80: *Nešla.*

E81: *Tahleta by to třeba nebyla? (kreslí oblouk na opačné straně)*

J82: *No ta ne, protože sem by se mohla tady ta přímka zase prodloužit. (ukazuje na papíře)*

Jakub ale potvrzuje, že nyní už umí prodlužování přímky použít bezpečně (J82). Kognitivní konflikt byl tedy navozen a následně úspěšně odstraněn. Ovšem nemůžeme se domnívat, že byla překonána samotná překážka. Je možné (a také pravděpodobné), že se opět projeví, ale ve složitějším kontextu.

Příklad 2 Michal, 9. třída

Atribut mohutnosti (rozlišení konečných, velmi početných a nekonečných množin)

E21: *A co lidí, všech lidí, na celým světě, těch je nekonečně mnoho?*

M22: *Ne, není. Vždyť se dělalo to sčítání lidí, bytů a domácností. Těch je konečno.*

E23: *A co ryb, ryb na celý zeměkouli?*

M24: *Nó, nekonečně, to nejde spočítat.*

E25: *A co takhle (3) mravenců, mravenců na celý Zemi?*

M26: *Mravenců na Zemi je nekonečně mnoho.*

V této chvíli zaznamenal experimentátor rozpor. Michal používá pro nekonečnost množiny kritérium *Nedají se spočítat* (rozuměj prvky uvažované množiny), *je jich tedy nekonečně mnoho*. Správné či nesprávné použití tohoto kritéria ale spočívá ve významu výroku *Dají (nedají) se spočítat*. Pro Michala to znamená reálné uskutečnění procesu počítání. V tom nás utvrzují jeho výroky na pozici M22 a M24. I když množina lidí na celé Zemi je relativně početná a on sám by ji spočítat nemohl, má přímou zkušenost s tím, že se počet lidí již určil. Pro „málo početné“ množiny se principiální možnost a reálná možnost pochopitelně překrývají. Ale co víc, překrývají se i pro nekonečné množiny. V těchto kontextech je tedy Michal utvrzován, že je jeho znalost správná. Právě tato znalost – tedy porozumění významu „lze spočítat“ jakožto reálné možnosti spočítání – je pro Michala překážkou. Experimentátor se tedy pokouší navodit kognitivní konflikt.

E27: *A mravenců v České republice?*

M28: *Taky nekonečně.*

E29: *A v jednom lese?*

M30: *Taky nekonečně, pořád nekonečně.*

E31: *A v jednom mraveništi?*

M32: *Taky nekonečně.*

Pro Michala je představa spočítat mravence v mraveništi nereálná.

E33: *A kdybych z toho mraveniště nabral mravence do skleničky, kolik by jich tak bylo v té jedné skleničce?*

M34: *No, (4) to nevím.*

Je možné, že už byl KK navozen, Michal si uvědomil nekonzistentnost svých odpovědí, je ale možné, že k tomu ještě nedošlo.

E35: *Je jich konečně mnoho nebo nekonečně mnoho?*

M36: *No, konečně.*

E37: *A v tom jednom mraveništi?*

M38: *No asi taky teda konečně.*

Michal začíná přehodnocovat své odpovědi.

E39: *A jak to dopadne s mravenci na celém světě?*

M40: *No tak to jich musí být taky konečně mnoho.*

Michal opravil svou původní odpověď, která ho dovedla ke KK a opravil ji žádoucím způsobem, tzn. v tomto kontextu už chápe konečnou množinu takto: „Její prvky se dají principiálně spočítat“. Michal tedy pochopil, že nemusíme vždy znát počet prvků množiny, ale umíme si představit, jak ho určit. Překážka ale nebyla ještě úplně překonána, jak nás přesvědčí další úryvek.

E51: *A kolik je atomů na celé Zemi?*

M52: *Tak těch je nekonečno. (rozpor)*

E53: *A kolik by bylo atomů třeba tady v tom nehtu?*

Experimentátor se znovu pokouší navodit KK, domnívá se, že Michal použije analogii z předcházející situace.

M54: *Tam jich je taky nekonečně mnoho, to se nedá spočítat, vždyť je ani nevidíme.*

Michal si neumí představit, jak by se daly počítat atomy, jsou tak nepředstavitelně malé, neuchopitelné, že je nelze spočítat, jsou „za obzorem rozlišitelnosti“ (Vopěnka 2000, 2004). Přetrvávala tedy představa o počítání, díky předcházející zkušenosti s odstraněním KK posunutá, avšak ne zcela překonaná.

6. Závěr

Cílem našeho výzkumu je vymezení procesu utváření pojmu nekonečno. Tohoto pojmu se zmocňujeme pomocí dalších pojmů – objektů (bod, přímka, číslo apod.) tak, že poznáváme jeho atributy – mohutnost množiny, ohraničenost množiny, míru množiny, uspořádání, nekonečný proces a konvergenci. Právě na tyto atributy se zaměřují otázky strukturovaných rozhovorů.

K vysvětlení procesu utváření pojmu nekonečno jsme využili teorie epistemologických překážek (Brousseau 1997), které jsou pro daný pojem fundamentální, a proto bychom se jim neměli vyhýbat, ale naopak vědomě je překonávat. Pro překážku je však charakteristické, že vzdoruje sporům, s nimiž je konfrontována. Klíčovým momentem pro překonání překážky je navození a následné odstranění kognitivního konfliktu. Teprve po odstranění mnoha kognitivních konfliktů v různých kontextech může dojít k překonání překážky a tím k vytvoření „lepší“ znalosti.

V článku uvádíme dva ilustrační příklady z rozhovorů uskutečněných v průběhu roku 2007 se žáky prvního i druhého stupně základních škol. Jsou zaměřené na dva atributy nekonečna – ohraničenost a mohutnost množiny. V první ukázce (Jakub, 5. třída) je demonstrováno navození kognitivního konfliktu, které následovalo po zaznamenaném rozporu způsobeném překážkou, a to záměnou přímky a jejího obrazu, jakožto modelu. Respondent byl schopen tento KK úspěšně odstranit. Ve druhé ukázce (Michal, 9. třída) je rozhovor zaměřen na atribut mohutnosti množiny. I zde se podařilo navodit kognitivní konflikt po té, kdy experimentátor zaznamenal rozpor. Překážkou je chápání kritéria „lze spočítat“ jakožto reálné možnosti spočítání. Respondentovi se podařilo úspěšně odstranit navozený KK, avšak pouze v daném kontextu.

V pozměněném kontextu respondent opět selhává, protože překážka nebyla ještě překonána.

Pro úspěšný proces utváření pojmu nekonečno je nutné překonávání překážek. Učitel tedy potřebuje znát možné překážky v tomto procesu. Aby mohla být daná překážka postupně překonávána, musí učitel vytvářet takové didaktické situace, kdy v různých kontextech budou opakovaně vyvolávány a odstraňovány kognitivní konflikty.

Literatura:

1. BROUSSEAU, G.: 1997, *Theory of Didactical Situations in Mathematics*, [Eds. Balacheff, N. et al.] Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London.
2. CIHLÁŘ, J., EISENMANN, P., KRÁTKÁ, M., VOPĚNKA, P.: 2007, About a distribution of points on a line segment, In: *Mathematics XII*, Akademia im. Długosza w Czeszochowie, 2007, 175 – 184
3. KRÁTKÁ, M.: 2005, A Geometrical Picture as an Obstacle, In *Proceeding of SEMT '05*, The Charles University, Prague.
4. SWAN, M.: 1983, *Teaching Decimal Place Value. A Comparative Study of Conflict and Positive Only Approaches*, University of Nottingham, Shell Centre Nottingham, England
5. TALL, D.O.: 1976, Conflicts and Catastrophes in the Learning of Mathematics, *Math. Education for Teaching* 2, 2 – 18
6. TALL, D.O.: 1977, *Cognitive conflicts and the learning of mathematics*, paper presented at PME 1, Utrecht, Netherlands
7. TALL, D.O., Schwarzenberger, R.L.E.: 1978, Conflicts in the learning of real numbers and limits, *Mathematics Teaching* 82, 44 – 49
8. TSAMIR, P.: 2001, When 'The Same' is not perceived as such: The case of infinite sets. *Educational Studies in Mathematics* 48, 289 – 307
9. VOPĚNKA, P.: 2000, *Úhelny kámen evropské vzdělanosti a moci*, Práh, Praha.
10. VOPĚNKA, P.: 2004, *Vyprávění o kráse novobarokní matematiky*, Práh, Praha.

Článek byl zpracován s podporou grantu GAČR 406/07/1026.

Kontaktní adresy

Prof. RNDr. Jiří Cihlár, CSc.
Katedra matematiky PF UJEP
Hoření 13, 400 96 Ústí nad Labem
Telefon: +420 475 282 289
E-mail: cihlarj@pf.ujep.cz

Doc. PaedDr. Petr Eisenmann, CSc.
Katedra matematiky PřF UJEP
České mládeže 8, 400 96 Ústí nad Labem
Telefon: +420 475 283 364
E-mail: eisenmannp@sci.ujep.cz

Mgr. Magdalena Krátká
Katedra matematiky PřF UJEP
České mládeže 8, 400 96 Ústí nad Labem
Telefon: +420 475 283 362
E-mail: kratka@sci.ujep.cz

Prof. RNDr. Petr Vopěnka, DrSc.
Katedra matematiky PřF UJEP
České mládeže 8, 400 96 Ústí nad Labem
Telefon: +420 475 283 340

VYUŽÍVÁNÍ DIDAKTICKÝCH HER V HODINÁCH MATEMATIKY NA 1. STUPNI ZŠ

Jana COUFALOVÁ

Abstrakt

Učitelé 1. stupně byli požádáni, aby popsali tři didaktické hry, které nejčastěji používají ve vyučování. Analýza 354 popisů her byla zaměřena na typ hry, její organizaci a použití pomůcek. Nejčastěji jsou zařazovány hry soutěžního charakteru pro celou třídu. Učitelé využívají jednoduché pomůcky a materiály, které si sami vyrobili. Opomíjeny jsou hry podporující skupinovou práci a hry zaměřené místo rychlosti na kvalitu provedené činnosti. Další výzkum je třeba zaměřit na efektivitu didaktických her z hlediska rozvoje kompetencí žáka.

USING GAMES FOR TEACHING MATHEMATICS AT THE PRIMARY LEVEL

Abstract

The teachers were asked to write about three games they use in teaching mathematics. 354 games were grouped according to kinds of games, how the games were organized and using teaching aids. The games that are most often used are competitive and games for the whole class. The teachers make and use simple teaching aids and materials. They leave cooperative and quality games aside, focusing more on memorization and less on the process behind the answers. The following research should be focused on game effectiveness paying close attention to the pupils' competence development.

1. Hra jako prostředek aktivizace žáků

Zařazování didaktických her do vyučování na 1. stupni vychází z přirozených potřeb dítěte tohoto věku. Proto změna pojetí vyučování, ke které u nás došlo v devadesátých letech minulého století, vedla i k masové propagaci didaktických her v počátečním vyučování na našich školách. Vznikla řada publikací s náměty na didaktické hry v matematice, učitelé si začali vyměňovat náměty prostřednictvím internetu, hry se objevily i v matematické přípravě budoucích učitelů. Protože zařazení hry do vyučovací hodiny je poměrně nenáročné, učitelé didaktické hry často v hodinách matematiky používají. Co od nich očekávají? Dovedou užívat didaktické hry k rozvoji kompetencí žáka? Na tyto otázky hledá odpověď výzkum, který byl zahájen na katedře matematiky Fakulty pedagogické ZČU v Plzni v roce 2003. O některých dílčích výsledcích budeme informovat v tomto příspěvku.

V akademickém roce 2005/06 a 2006/07 byli studenti 5. ročníku kombinované formy studia oboru Učitelství pro 1. stupeň na Fakultě pedagogické ZČU v Plzni,

působící jako učitelé na 1. stupni, požádání, aby v seminární práci popsali tři didaktické hry, které nejčastěji používají ve své třídě. Práci odevzdalo 118 učitelů. Při udělování zápočtu byl s každým studentem proveden rozhovor zaměřený na jeho vlastní zkušenosti s používáním didaktických her. Následovalo třídění námětů a analýza 354 odevzdaných her.

2. Typy her

Při třídění her se opakovaly hry stejného typu. Učitelé čerpají náměty z literatury (zpravidla [3], [4], [5]), ale ve většině případů zařazují do vyučování hry, se kterými je seznámí jiní učitelé. Minimálně se objevovaly vlastní náměty. U velkého počtu námětů uváděných učiteli se nejednalo o didaktickou hru, ale o činnost, která je pro některé žáky zajímavou. S označením hra se objevilo například vybarvování části kruhu při zavádění zlomku jako části celku, stavění komínů (postav komín z deseti kostek), ale i běžné činnosti žáků (učitel řekne číslo, žák řekne číslo o 1 větší). Deset nejčastěji využívaných typů činností označovaných učiteli jako hry je uvedeno v tabulce 1.

Pořadí	Typ činnosti	Absolutní četnost	Relativní četnost
1.	Tvoření skupin a řad podle pravidel (Na molekuly, řazení vagónů apod.)	31	8,75
2.	Štafety (Tichá pošta, Telefonování, Házení míče apod.)	30	8,47
3.	Vybarvování, spojování bodů podle výsledku	28	7,91
4.	Odpověď pohybem (vstávání, zvedání karet, poskoky apod.)	24	6,78
5.	Šifry (přiřazování písmene k výsledku)	22	6,25
6.	Bingo	20	5,65
7.	Tvoření příkladů podle hodu kostkou	19	5,37
8.	Počítání příkladů na rychlost	18	5,08
9.	Početní král, Mrazík	17	4,80
10.	Hledání příkladů (Lovení ryb, losování příkladů apod.)	16	4,52

Tabulka 1

Na dalších místech se umístilo domino, křížovky, skládání obrázku s využitím výsledků příkladů a skládání obrázku z geometrických tvarů.

Z uvedeného přehledu lze ve zkoumaném souboru vytušit nerovnoměrné zastoupení her používaných v aritmetice a geometrii. Do jisté míry je to způsobeno i rozdílným rozsahem aritmetického a geometrického učiva na 1. stupni, který se projevil při zvoleném zadání úkolu (...hry, které nejčastěji používáte...). Z geometrických námětů učitelé uváděli především hry založené na poznávání geometrických útvarů hmatem, na určování těles postupným zjišťováním vlastností (ano – ne) a na skládání obrázků z geometrických tvarů.

aritmetika	315	geometrie	39
	89,0 %		11,0 %

Tabulka 2

Řada učitelů spojuje pojem didaktická hra se soutěží v hodině matematiky. Pro určitý typ žáků může být soutěž silně motivačním faktorem. Zkušenosti však ukazují, že

vyřazení prvku soutěživosti vnáší do hry klid a umožňuje dětem více se soustředit na podstatu matematického úkolu. Ve zkoumaném souboru tvořily hry soutěživého charakteru více než polovinu analyzovaných her (Tabulka 3). Většina soutěží byla orientována na jednotlivce, soutěže skupin se vyskytovaly méně (Tabulka 4). Většinou se jednalo o soutěže oddělení ve třídě typu „...žák běží k tabuli, vypočítá příklad, běží zpět, z řady vybíhá další žák...“. Rozhodujícím faktorem při soutěžích byl čas. V analyzovaném souboru zcela chyběly soutěživé činnosti, ve kterých by šlo o kvalitu provedené práce bez ohledu na čas.

Soutěž	
ano	ne
187	167
52,8 %	47,2%

Tabulka 3

Organizace soutěže	
jednotlivci	skupiny
127	50
71,8 %	28,2 %

Tabulka 4

3. Organizace činností

Cílem analýzy bylo zjistit, jak učitelé využívají u her základních didaktických forem tak, aby dosáhli zapojení co největšího počtu žáků.

Forma		Absolutní četnost
hromadná	celá třída	189
skupinová	dvojice	50
	skupina více než 2 žáků	55
individuální	jeden žák	60
celkem		354

Tabulka 5

Z tabulky 5 je patrné, že učitelé málo využívají her pro skupinovou práci. Převažují hry pro celou třídu, ve kterých nedochází k diferenciaci úkolů pro jednotlivé žáky. Do her pro celou třídu patří i často zařazované soutěže typu Početní král, při kterých jsou slabší žáci brzy vyřazováni a paradoxně si tak učivo procvičují nejvíce lepší žáci. Navíc jsou slabší žáci stavěni do situace nevhodné z hlediska sociálního klimatu třídy. Řada učitelů se snaží uvedené riziko řešit změnou pravidel her.

4. Použití pomůcek a materiálů

Použití pomůcek	
ano	ne
226	128
63,8 %	36,2 %

Tabulka 6

Typ pomůcky a materiálu		
vyrobil žák	vyrobil učitel	zakoupeno
14	136	76

Tabulka 7

Použití pomůcek v didaktických hrách do jisté míry naznačuje, že hra nebyla zařazena do hodiny nahodile na základě okamžité situace, ale že byla předem připravena a zařazena cíleně. Z tohoto pohledu je převaha her s využitím pomůcek pozitivní (Tabulka 6). Zakoupenými pomůckami jsou míče, švihadla, hrací kostky, stavebnice, mezi pomůckami a materiály připravenými učitelem převažovaly

nakopírované obrázky a pracovní listy. Učitelé však připravují i řadu dalších materiálů (karty s obrázky, dominové karty různého charakteru, lota, herní plány, obrázky na magnetickou tabuli, karty s příklady a úlohami apod.). Upřednostňují ty, které mohou použít opakovaně. I pomůcky vyrobené žáky jsou většinou z papíru (peníze, modely těles, tabulky na zapisování výsledků apod.).

5. Závěr

Didaktická hra, která cíleně přispívá k rozvoji kompetencí žáka, je náročná na přípravu. Učitel musí předem promyslet její obsah a pravidla, určit místo hry ve struktuře hodiny. Je třeba stanovit cíl hry, připravit materiály a pomůcky, rozhodnout o době jejího trvání, zabývat se organizací činnosti žáků, způsobem seznámení s pravidly a ukončením hry, formou hodnocení.

Analýza souboru her nejčastěji používaných učiteli a rozhovory s jednotlivými učiteli ukázaly, že náročnost celého procesu vede k volbě her jednoduchých na přípravu a na pomůcky. Učitelé si předávají osvědčené náměty a věří, že zařazování her samo o sobě aktivizuje žáky a vzbudí jejich zájem o matematiku. Domnívám se, že většina her ve sledovaném souboru vede spíše k uvolnění klimatu ve třídě a k relaxaci žáků než k jejich aktivizaci ve vztahu k matematice. Řadě žáků pomáhá „matematiku přežít“, ale nevede k zájmu o podstatu předmětu. Není tak využito potenciálu, který se v didaktických hrách bezesporu skrývá. Proto se naše pracoviště bude problematikou didaktických her zabývat i nadále, abychom pomohli zejména budoucím učitelům hledat a tvořit vhodné didaktické hry cílené na rozvoj konkrétních kompetencí žáků 1. stupně základní školy.

Literatura

1. CANFIELD, J., HAROLD, H. C., HANČIL, J. *Hry pro zlepšení motivace a sebezpojetí žáků : příručka pro učitele, vychovatele a rodiče*. 2. vyd. Praha: Portál, 1997. 197 s. ISBN 80-7178-136-3.
2. GUNZBURGER, I., BERKANE, N., DENEUX, X., LATYK, O. *Hrajeme si a učíme se 1 : rozvoj schopností a osvojení základních dovedností*. 1.vyd. Praha: Portál, 2006. 67 s. ISBN 80-7367-166-2.
3. KÁROVÁ, V. *Didaktické hry ve vyučování matematice v 1. - 4. ročníku základní a obecné školy. Část aritmetická*. 2.vyd. Plzeň: Vydavatelství Západočeské univerzity, 1998. 53 s. ISBN 80-7082-467-0.
4. KÁROVÁ, V. *Didaktické hry ve vyučování matematice v 1. - 5. ročníku základní a obecné školy. Část geometrická*. 3.vyd. Plzeň: Vydavatelství Západočeské univerzity, 2004. 53 s. ISBN 80-7043-303-5.
5. KREJČOVÁ, E., VOLFOVÁ, M. *Didaktické hry v matematice*. 3. vyd. Hradec Králové: Gaudeamus, 2001. 120 s. ISBN 80-7041-423-5.
6. NELEŠOVSKÁ, A. *Jak se děti učí hrou*. 1.vyd. Praha : Grada Publishing, 2004. 115 s. ISBN 80-247-0815-9.

Kontaktní adresa

Doc. PaedDr. Jana Coufalová, CSc.
Katedra matematiky, Fakulta pedagogická ZČU
Sedláčkova 38, 306 14 Plzeň
Telefon: +420 377 636 000
E-mail: coufalov@kmt.zcu.cz

OFFENE MATHEMATIKAUFGABEN IM GRUNDSCHULUNTERRICHT

Peter DERINGER

Abstract

Kann man etwas „Rechnen“, wenn gar keine Zahlen vorhanden sind. Lehrer/innen¹ sind sehr verunsichert, viele Kinder auch, wenn sie aber einmal begonnen haben ihrer Fantasie freien Lauf zu lassen, dann sind sie gar nicht mehr zu bremsen und arbeiten mit Begeisterung, oft mehr als von ihnen verlangt wird. Sie überschreiten mathematische Grenzen und werden zu Entdeckern, so wie früher, als sie noch nicht in die Schule gehen mussten.

Auch für Lehrer und Lehrerin geben diese spontanen Rechenleistungen interessante Einblicke in die Leistungsfähigkeit und das mathematische Verständnis ihrer Schüler/innen - und es macht sogar Spaß.

OPEN TASKS IN MATHEMATICS AT PRIMERY SCHOOL

Abstract

Is it possible to “calculate” something, if there are no numbers. Teachers are very insecure, many children also, but when they have started and there fantasy is fully working, than you cannot stop them. They are working with enthusiasm, even more as you aspect and they also leave there secure standards of thinking, to find out new things. Comparable to the times, they had not to sit in school.

Also for teachers this spontaneously created activities give a view behind the thinking of the children and of what they are willing to do - and they have also pleasure.

Ich wurde von der Idee offene Aufgaben zu stellen von Frau Prof. Dr. Renate RASCH (Universität Koblenz - Landau)² auf der GDM-Tagung³ in Dortmund begeistert. Nicht nur für einen Sonderschullehrer, wie mich, sondern für jede/n Lehrer/in bietet diese Form von Aufgaben eine Fülle von Vorteilen.

Alleine die Aufgabenstellung: “Nimm ein Blatt Papier und einen Bleistift und rechne einfach was du willst“, beinhaltet ein Fülle von Chancen für die Lehrperson und die Schüler:

- 1) Dem Kind wird nichts vorgegeben, es darf tun was es will.
- 2) Es wird sicherlich mit Rechnungen beginnen, wo es sich ziemlich sicher ist, dass es sie bewältigen kann (Lernausgangsstandkontrolle)
- 3) Aus dieser Sicherheit heraus wird es auch Rechnungen versuchen, die es nicht so gut kann.

- 4) Es wird sich sogar auf „Neuland“ wagen, versuchen Rechnungen zu rechnen, die es noch gar nicht gerechnet hat, es wird zum Entdecker und hat Spaß am entdecken.
- 5) Es wird Fehler machen und wer über seine Grenzen hinausgeht, macht einfach Fehler und das ist gut so !!!

Aber auch dem/der Lehrer/in kann eine solcher Art gestellte Aufgabe viel Aufschluss über ihre Kinder geben:

- 1) Die ersten Rechnungen, die das Kind rechnet, sind sicher Aufgaben, die es versteht (oder glaubt zu verstehen).
- 2) Die Lehrperson braucht nicht zu differenzieren, weil die Kinder differenzieren selbst, indem sie den Zahlenraum und die Aufgaben wählen, die ihnen entgegenkommen.
- 3) Was sind meine Kinder im Stande, wenn sie tun dürfen was sie wollen.
- 4) Welche Fehler machen meine Kinder (und ganz wichtig ist Fehler zuzulassen und nicht sofort auszubessern) und wie zeigen sie mir, was sie denken (und komme selbst dahinter was sie sich denken oder muss/darf ich sie fragen, was sie sich gedacht haben).

Meine Studierenden müssen (oft gegen den Widerstand ihrer Praxislehrer/innen) offene Aufgaben (besonders „Rechne was du willst“ in ihren Unterricht einbauen und erleben sehr unterschiedliche Reaktionen von den Kindern. Zwei extreme Beispiele möchte ich anführen:

- 1) Die Kinder sitzen starr da und wissen nicht was sie tun sollen, weil es hat ihnen ihr ganzes Schulleben noch keiner gesagt, dass sie tun dürfen was sie wollen (überhaupt beim Rechnen).
- 2) Der absolut schwächste Schüler (Adrian) in Mathematik ruft spontan: „Super, darf ich auch Minusrechnungen machen?“ (und er hat sie gemacht, siehe Abb. 1)

$$\begin{array}{l} 4 - 3 = 1 \\ 5 - 2 = 3 \\ 6 - 3 = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4 + 4 = 8 \\ 5 + 5 = 10 \\ 6 + 6 = 12 \\ 10 + 10 = 20 \end{array}$$

Abb. 2

Bleiben wir gleich bei Adrian, es hätte niemand geglaubt, dass er diese Minusaufgaben bewältigen kann. Er zeigt uns aber auch ein zweites Phänomen von Rechenanfängern: Das Verdoppeln!

Fast alle Kinder beginnen bei spontanen Rechnungen mit Verdoppelungen (Abb. 2). Das sollte uns besonders bei der Zehnerüberschreitung zu denken geben, weil für ein Kind ist $6 + 6$ einfach 12 und es rechnet nicht so, wie wir es wollen: $6 + 4 = 10 / 10 + 2 = 12$.

$$2 + 2 = 4$$

Abb. 1

Ein weiteres Phänomen ist darin zu sehen, dass viele Kinder über ihr Wissen hinausgehen und neue Dinge ausprobieren. Sie haben (bis sie in die Schule kommen) viele Dinge durch Versuch und Irrtum gelernt und Irrtum bedeutet, dass sie auch Fehler machen dürfen und diese Fehler sind positiv, wenn man sie hinterfragt, warum sie passiert sind. Letzteres ist eindeutig Aufgabe der Lehrperson. Dazu gäbe es auch reichlich Material, aber das würde meinen Kurzaufsatz sprengen, ich möchte hier nur einen typischen Fehler, der aus der Sicht des Kindes kein Fehler sein kann, anführen: $600 - 1 = 500$. H. Rapatz hat gesagt, dass 80% der Schülerfehler Denkfehler sind und nur 20% Schlampigkeitsfehler (Konzentrationsfehler). Bei Denkfehlern hat das Kind ein

logisches Konzept in seinem Denken und bei $500 - 1 = 600$ ist es sehr gut erkennbar: Jedes Kind zählt ... 3, 4, 5, 6, 7, 8, ... und solange ein Kind zählend rechnet, dann ist $6 - 1 = 5$, weil es ja beim Zählen vor 6 kommt. Fast jedes Kind zählt auch ... 300, 400, 500, 600, 700, 800, ..., es ist daher nur „kinderlogisch“, dass $600 - 1 = 500$ ist.

Wichtig ist einfach, dass Fehler passieren, wenn man sich auf Neuland begibt und aus Fehlern lernt man (ich würde auch nie mehr so nach Olmütz fahren, wie ich das beim ersten Mal bei meiner Teilnahme an diesem Kongress getan habe, aber Kartenlesen ist keine so hohe Abstraktionsleistung, wie zum Beispiel zu verstehen, warum mein Computer so funktioniert, wie er funktioniert. Beim Computer muss ich des öfteren einen anderen Fragen, den optimalen Weg nach Olmütz habe ich mir selbst erarbeiten können.) Genauso ist es bei unseren Schüler/innen, sie machen bei einer so hohen Abstraktionsleistung wie Mathematik einfach Fehler und da Schüler/innen selten fragen, warum dieser Fehler passiert ist, haben sie eine/n Lehrer/in, die ihnen über die Schulter schaut und freundschaftlich sagt: „Ja, da hast du dir sicher etwas gedacht, aber leider ist das Falsche herausgekommen, versuche mir zu erklären, was du dir gedacht hast, dann kann ich dir vielleicht helfen.“

Nachdem ich der festen Überzeugung bin, dass man Mathematik nicht unterrichten kann (wie so Vieles anderes auch, aber das ist nicht mein Thema), sondern, dass der Lehrer/in nur ein Helfer sein kann, dass er/sie, dass vorhanden Wissen (und damit ich weiß, was ein Kind weiß, muss ich wissen was sich ein Kind denkt - nicht, wie ich nach Olmütz komme, sondern wie ein Computer funktioniert, der ja nicht umsonst Rechner heißt – hoffentlich auch auf tschechisch) erkennt und Hilfen anbietet, dass ein Kind ein Ziel erreicht.

Die Hauptfaszination für mich waren aber Aufgaben, die keinerlei Zahlen enthalten, wobei man aber sehr viel rechnen kann (und da hat die Kreativität der Kinder, die der Erwachsenen um Lichtjahre überholt).

Leider können sich sehr viele Erwachsene (Lehrer/innen) nicht mehr ins kindliche Denken versetzen, ganz klar, wir können gehen, wer kann sich noch erinnern, wie es war, als wir gehen lernten. Genauso ist es in der Mathematik, wir können rechnen bzw. wir glauben es zu können und kein Mensch (Lehrer/in), kann sich mehr daran erinnern, wie es war als es nicht so war. Da wir es nicht wissen sollten wir die „Fachleute“ fragen, die Kinder und die würden uns, falls wir sie fragen würden, sehr viel sagen können.

Eine der Aufgaben, die uns viel Aufschluss geben könnte, war die Standardaufgabe, die ich bei Frau Prof. Dr. Rasch kennen lernen durfte: „Auf einem Apfelbaum wachsen Äpfel. Der Wind bläst, was passiert. Schreibe eine Rechnung auf und mache eine Zeichnung.“ Diese Aufgabe ist mittlerweile durch sehr viele Schulklassen von Wien gegangen und ich möchte hier nur drei Beispiele bringen, eines welches vollkommen logisch erscheint, eines welches man einem Kind aus der Sonderschule kaum zutraut, und eines, dass interessanterweise vollkommen ident mit einem der vorgestellten Beispiele von Prof. Dr. Rasch ist (sogar die Zahlen stimmen überein).

Die Standardbeispiele lauten natürlich: Auf dem Baum hängen X Äpfel, der Wind bläst und Y Äpfel fliegen herunter (überraschenderweise sind das ca. 40% der Aufgaben, alle anderen sind weit kreativer).

Jetzt zu der Aufgabe eines Sonderschulkindes: Es schreibt auf: $10+10+10=30$ (die Erklärung dazu ist: Ich habe 3x am Baum geschüttelt und es sind jedes Mal 10 Äpfel heruntergefallen = vereinfachte Darstellung der Multiplikation), dann schreibt sie auf: $10-1=9$, $9-1=8$ $1-1=0$ (die Erklärung dazu ist: Wenn ich jeden Tag einen Apfel esse, kann ich 10 Tage essen = vereinfachte Darstellung der Division). Mit der Tatsache

konfrontiert, dass ja 3x10 Äpfel heruntergefallen sind, schaut sie mich vollkommen entgeistert an und sagt: “Die 20 Äpfel liegen jetzt schon 10 Tage in der Wiese, glaubst du wirklich, das man die noch essen kann.“

Zum Abschluss noch die Aufgabe, die mit der Aufgabe, die von Prof. Dr. Renate Rasch vorgestellt, fast ident ist (Abb. 3):

Die Aufgabe heißt: $12 - 3 = 9$, einfach sagen sie, dass Kind erklärt aber, 12 Äpfel sind heruntergefallen und es verschwinden 3 (also nicht die Tatsache, dass Äpfel heruntergefallen ist für das Kind wichtig, sondern was nachher passiert). Dazu ist die Zeichnung hilfreich. Also nicht die Tatsache, dass 12 Äpfel heruntergefallen ist wichtig, sondern, dass sich die Vögel 3 Äpfel wegnehmen.

Was uns offene Aufgaben zeigen ist Folgendes: Kinder sind noch in der Fantasie verhaftet, für sie ist die abstrakte Rechnung noch nicht so weit von ihrem Denken abgehoben, als Erwachsenen (Lehrer/innen) denken. Und ich glaube, dass Lehrer/innen gut daran täten, wenn sie sich sehr schnell von ihrem Erwachsenenendenken lösen würden und endlich wieder kindlich denken lernen würden. Dabei können wir nur von den Kindern lernen (oder wer kann sich noch erinnern, wie es war als er noch nicht rechnen konnte, ich glaube niemand, deswegen brauchen wir die Kinder, damit wir es wieder verstehen können, wie es war, als wir noch nicht wussten was 7 bedeutet hat).



References

1. RADATZ, Hendrick: Fehleranalysen im Mathematikunterricht, 1979, Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden
2. SPIEGEL, Harthmut / SELTER Christoph: Kinder und Mathematik, 2003, Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung, Selze Velber
3. RASCH Renate: in Beiträge zum Mathematikunterricht, 2003, Verlag Franzbecker, Hildesheim/Berlin
4. RASCH Renate: in Beiträge zum Mathematikunterricht, 2004, Verlag Franzbecker, Hildesheim/Berlin

Contact address

Prof. Peter Deringer
Pädagogische Hochschule Wien
A-1100, Grenzackerstr. 18
Phone: +436643117122
Email: peter.deringer@chello.at

¹ Für Sie, die nicht Deutsch als Muttersprache haben, schaut diese Doppelbenennung wahrscheinlich komisch aus, aber ich finde es im Sinne der Gleichberechtigung von Frau und Mann einfach wichtig

² <http://www.uni-landau.de/rasch/publikationen.php>

³ <http://didaktik-der-mathematik.de/>

HEURISTICKÉ PRINCIPY PŘI ŘEŠENÍ PROBLÉMOVÝCH ÚLOH NA 1. STUPNI ZŠ

Radka DOFKOVÁ

Abstrakt

Příspěvek uvádí základní heuristické principy a jejich aplikace na řešení problémových úloh při výuce matematiky na 1. stupni ZŠ. Upozorňuje na přednosti, které metoda objevování poskytuje a na její pozitivní vliv na rozvoj divergentního myšlení žáků. Heuristické postupy jsou názorně prezentovány na problémové úloze o trojúhelníkových číslech.

HEURISTIC PRINCIPLES AND THEIR APPLICATION ON SOLVING PROBLEMS AT PRIMARY SCHOOL TEACHING

Abstract

The article shows the basic heuristic principles and their application on solving problem exercises at mathematics education at primary school. It present the advantages, which method of discovering provides and its influence on development of pupils divergent thinking. Heuristic principles are clearly present on problem about triangular numbers.

1. Úvod

„Vzrušující objevitelská činnost začala formovat psychiku člověka tak, že v ní samé se zakořenila touha po silných intelektuálních zážitcích, které člověku poskytuje odhalování matematických zákonitostí. Tato skutečnost napomáhá pěstování lásky k matematice.“ (Hejný, M., Kuřina, F., 2001 , s. 105).

Důraz na chápání školské matematiky jako na výuku matematických činností než jako na seznamování žáků s matematickými teoriemi se dostal do popředí v souvislosti s rozsáhlou reformou systému kurikulárních dokumentů. Dosud si měli žáci v hodinách matematiky v průběhu základní školní docházky osvojit předepsaný vzdělávací obsah, představující odborně vybranou sumu podstatných matematických informací, činností a hodnot.

V současném kurikulu by osvojování konkrétního vzdělávacího obsahu nemělo být apriori pojímáno jako hlavní cíl vzdělávání, nýbrž spíše jen jako cíl dílčí, který je v prvé řadě prostředek k dosažení obecnějšího hlavního cíle vzdělávání. Tento nový hlavní cíl pak představují jisté obecné předpoklady každého člena společnosti pro využívání konkrétních výsledků svého vzdělávání k praktickému jednání v různých situacích. Nedochozí zde ke snižování významu konkrétního vzdělávacího obsahu, ale k přesunu ohniska zájmu k něčemu, co stojí nad ním.

2. Heuristické strategie

Objevování a aplikace odpovídajících strategií řešení v jiných situacích než jsou hodiny matematiky by měla poskytnout žákům zejména radost z toho, že pomocí znalostí získaných v hodinách matematiky se jim podaří vyřešit problémy, před které jsou staveni v každodenním životě. Nejmladší žáci přichází do školy s mnoha otázkami „Proč?“ a s obdivuhodnou touhou dostat na všechny tyto otázky odpovědi. Avšak při použití nevhodné vyučovací metody, např. při pouhé transmissi poznatků, se žáci čisté matematice stále více vzdalují.

Je velmi důležité, aby žáci byli přesvědčeni o tom, že školská matematika je potřebná pro jejich budoucí život. Ospravedlňování výuky matematiky museli učitelé v historii vždy provádět a je paradoxem, že ho musí provádět i v dnešní době, kdy už matematika pronikla téměř do všech oblastí běžného života.

Domnívám se, že jednou z neúčinnějších metod k uplatňování uvedených principů je metoda objevu (heuristika), která vychází z přesvědčení, že žáci budou matematice lépe rozumět, když budou vidět, jak se matematika tvoří a když si toto vytváření na odpovídající úrovni sami vyzkoušejí.

Za zakladatele heuristiky je považován maďarský matematik *George Polya*, který ve svém díle „How to solve it?“, shrnul její základní zásady, které mají stěžejní význam pro vyučování matematiky. Říká, že efektivní vyučovací hodina musí být postavena na:

- **aktivitě žáka**, kdy si žák sám vybírá náročnost úloh i jejich počet tak, aby neustále pracoval na hranici svých možností po celou učební dobu,
- **vnitřní motivaci** žáka, protože žák by měl být zainteresovaný v tom, co dělá,
- **postupných kroků heuristiky**, ve kterých žákovi ukazujeme plán, podle kterého by měl postupovat (*Polya, 1985*).

Dnes heuristika představuje ve světě „významný způsob zefektivnění a modernizace výchovněvzdělávacího procesu. Učení se pomocí tvořivého řešení problémů, stejně jako vyučování touto metodou a strategií, představuje vrchol v jednotlivých druzích a způsobech vyučování a učení.“ (*Zelina, 1990, s. 66*).

V následující části si aplikaci jednotlivých fází heuristické metody budeme stručně prezentovat na zavedení pojmu trojúhelníková čísla. Omezíme se pouze na zavedení tohoto pojmu v hodinách matematiky na 1. stupni ZŠ, i když se v tento problém dá rozšířit až do hodin matematiky žáků 2. a 3. stupně ZŠ (*Kopka, 1999*). Při řešení se budeme opírat o snadno zapamatovatelný metodický návod pro jednotlivé heuristické kroky, jímž je akronym DITOR, který podle Polyových zásad vytvořil Zelina (1990): Definice problému, Informace o problému, Tvorba řešení, Ohodnocení řešení, Realizace řešení v praxi.

3. Trojúhelníková čísla

Problém: *Vyzkoumejte, která čísla nazýváme trojúhelníková a doplňte místo otazníku páté trojúhelníkové číslo v tabulce:*

1	2	3	4	5
1	3	6	10	?

I když jde o problematiku, která se svým názvem téměř motivuje sama, může učitel na úvod uvést, že se jedná o typ čísel, mezi které patří také čísla čtvercová, obdélníková, apod. (tzv. figurální čísla) a že je zkoumali již matematikové v antickém Řecku (*Fulier, J., Šedivý, O., 2001*).

Nyní máme za sebou první dvě fáze heuristických kroků řešení a dostáváme se do fáze tvorby řešení. Ta by měla probíhat tak, že učitel inspiruje žáky k samostatnému

hledání řešení a následně jim udá směr zkoumání: „Proč si myslíte, že se těmito čísly říká trojúhelníková?“

Žáci by měli sami odhadnout, že tento název souvisí s jejich vizuální podobou tvaru trojúhelníku. Pokud bychom nyní nechali žáky, aby si nakreslili trojúhelníky do sešitů a podle nich určili potřebný algoritmus, dostali bychom jistě velké množství různých trojúhelníků (obecné, rovnostranné, pravoúhlé), z nichž by žáci požadovanou odpověď objevovali jen velmi těžko. Můžeme proto zvolit názornější způsob: dáme žákům 15 shodných kostek (krychlíček) a řekneme jim, že mají nyní vše, co potřebují, aby odpověděli na daný problém a znovu jim připomeneme, že jde o čísla trojúhelníková (zdůrazníme souvislost s jejich vizuální podobou).

V závislosti na schopnostech žáků by měli dříve či později přijít na to, že z kostiček musí udělat „schodiště“, kde jedna kostička představuje první schod, dvě kostičky na sebou představují druhý schod, tři nad sebou třetí schod, atd. Spočítají-li žáci všechny použité kostičky vždy po dokončení daného schodu, dostanou trojúhelníková čísla (mohou porovnat s tabulkou) a správně dosadí místo otazníku číslo 15 (viz obr.1).



Obr. 1: Trojúhelníková čísla

Je zřejmé, že postup řešení uvedeného problému a jeho případná prezentace žákům zde není z metodického hlediska podána zcela vyčerpávajícím způsobem. Mým cílem však bylo ukázat, jakou formou je možné zařazovat heuristické principy do běžných hodin matematiky, abychom bylo možné žáky nechat prožít radost z objevování a poskytnout jim odpověď na jejich otázky, které v nich sami vhodným způsobem probudíme („Je možné, aby číslo bylo trojúhelníkové?“ apod.) Právě formulaci podobných otázek vycházejících z konstruktivistického přístupu ke vzdělávání a specifikaci konkrétních didaktických postupů jsem, ve prospěch zmiňovaného cíle, vypustila.

4. Závěr

Vyučování, které neaktualizuje potřeby poznávání, vede ve většině případů k nuditě a nezájmu. Jestliže má však žák řešit problém, musí divergentním myšlením nejprve odhalovat chybějící fakta a hledat cestu, jak je získat, neboť předmětem úkonu je neznámé a cílem je jeho odhalení.

Chápat řešení problému ve škole jako umění heuristiky je velmi slibné, ale zároveň nesmírně problematické. Je zřejmé, že chceme-li rozvíjet žákovo myšlení pomocí heuristických strategií jako jsou např. analogie, zobecnění nebo ilustrace, nesmíme pospíchat a potřebujeme proto dostatek času. Při probírání matematiky není však bohužel nikdy času nazbyt. Proto musí učitel, který stojí v centru výuky, k rozvoji heuristického umění používat cíleně zvolené problémy. Jen on může zodpovědně odhadnout, jaké problémy či situace pro žáky zvolit, aby měli radost z objevování a jakou pomoc jim při řešení poskytnout.

Literatura

1. BRANSFORD, J. D., STEIN, B. S. *The Ideal Problem Solver*. 2nd ed. New York: W. H. Freeman and Company, 1995. ISBN 0716722054.
2. FULIER, J., ŠEDIVÝ, O. *Motivácia a tvorivosť vo vyučovaní matematiky*. Nitra: Fakulta prírodných ved Univerzity Konštantína Filozofa v Nitre, 2001. ISBN 80-8050-445.
3. HEJNÝ, M., KUŘINA, F. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. 1. vyd. Praha: Portál, 2001. ISBN 80-7178-581-4.
4. KOPKA, J. *Hrozny problémů ve školské matematice*. 1. vyd. Ústí nad Labem: Univerzita J. E. Purkyně Ústí nad Labem, 1999. ISBN 80-7044-247-6.
5. MAŇÁK, J., ŠVEC, V. *Výukové metody*. 1. vyd. Brno: Paido, 2003. ISBN 80-7315-039-5.
6. POLYA, G. *How to solve it?* USA: Princeton University Press, 1985.
7. ZELINA, M. *Tvorivosť v matematice: metodický materiál pro učitele matematiky*. Olomouc: Krajský pedagogický ústav Ostrava, 1990. ISBN 80-9000158-9-1.

Příspěvek byl vypracován s podporou projektu FRVŠ č. 809/2008.

Kontaktní adresa

Mgr. Radka Dofková, Ph.D.

Katedra matematiky Pedagogické fakulty Univerzity Palackého v Olomouci

Žižkovo nám. 5, 771 40 Olomouc

Telefon: +420 585 635 907

E-mail: radka.dofkova@upol.cz

PROČ NÁS ZAJÍMAJÍ POSTOJE POPULACE K MATEMATICE

Jindřiška EBEROVÁ, Anna STOPENOVÁ

Abstrakt

Postavení matematiky ve společnosti. Dotazníkové šetření postojů žáků základní školy a studentů oboru Učitelství pro 1. stupeň základních škol k matematice.

WHY WE ARE INTERESTED IN POPULATION'S ATTITUDES TOWARDS MATHEMATICS

Abstract

Position of mathematics in society. Pupils' and primary education students' attitudes towards mathematics finding by questionnaires.

1. Úvod

Téměř všichni lidé na celém světě se s matematikou pravidelně setkávají, mnohdy aniž by si to uvědomovali. Využívané elementy matematiky berou jako samozřejmost, jako spoustu dalších věcí. V životě každého jedince má matematika své místo, ale u každého jedince hraje jinou úlohu a každý vidí matematiku jinými očima, má na ni jiné vzpomínky ze školy, které ovlivňují jeho názor na ni.

Cílem vyučovacího předmětu Matematika na všech stupních škol je vybavit žáky znalostmi a dovednostmi, které pak využijí v určitých životních situacích. Kromě těchto kognitivních a psychomotorických cílů jsou důležité v procesu učení i afektivní cíle. Ty se týkají rozvoje hodnot, pocitů, názorů, zájmů, morálních a jiných postojů. Oba tyto cíle jsou ve vyučování rovnocenné. Zatím co plnění cílů kognitivních a psychomotorických lze hodnotit pomocí zkoušení, dosahování afektivních cílů učitel zpravidla nehodnotí.

Konkrétním afektivním cílem by mělo být vytváření pozitivního vztahu žáků ke studiu a tím i ke studiu matematiky a později i oborů, které úzce souvisí s matematikou.

Matematika bývá označována jako královna věd. Zároveň se dá říci, že vzbuzuje u většiny lidí spíše obavy, někdy možná úctu a obdiv. Ve společnosti se v současné době klade důraz ve vzdělanosti na cizí jazyky (zejména anglický), historii, umění a jiné vědy, ale téměř výjimečně na matematiku. Stále ještě lidem bývá podsouvána myšlenka, že k dobrému tónu patří, nerozumět matematice. Některé současné celebrity, které jsou idolem pro mládež, v rozhovoru pro media se chválí svým negativním vztahem k matematice.

Matematiku společnost zařazuje, k její škodě, pouze k vědám technickým, které se vzdělaností nesouvisí. Širší veřejnost se všeobecným vzděláním má zkušenosti s matematikou jen takové, které souvisí pouze s počítáním matematických příkladů, které jsou uměle vytvořeny a nesouvisí se životem. Obvykle tato veřejnost nedospěla

k řešení vlastních problémů matematiky, neměla příležitost poznat, jak se tvoří nové pojmy a tím i celá nová odvětví matematiky. V matematice však nejde jen o počítání, ale řeší se problémy daleko hlubší. Každý člověk, i když si to neuvědomuje, využívá výsledků práce matematiků. Matematika se uplatňuje v technice, ale i v dalších oborech jako je lékařství, biologie, hospodářství, ve fyzice, v chemii a dalších příbuzných oborech.

2. Poznámky k historii matematiky

Matematiku můžeme považovat za jednu z nejstarších věd, která je součástí lidské kultury a civilizace vůbec. Poznatky matematiky patří ke kulturnímu dědictví lidstva. Všichni velcí myslitelé byli stejně velcí matematici jako filosofové, např. Descartes, Leibniz aj.

Základní impuls k rozvoji matematiky vychází zpravidla z praxe, která je též zdrojem podnětů pro další rozvoj vzniklých disciplín. Pokud nově vzniklá disciplína získá logickou strukturu, vyvíjí se pak už sama, vytýčuje si vlastní problémy, které se snaží řešit.

Matematika je věda, která provází společnost od samého počátku. Elementární poznatky z matematických disciplín, jako je aritmetika a geometrie, se objevily už na samém začátku kulturního vývoje lidstva. I když lidstvo umělo svých zkušeností využívat daleko dříve než bylo schopno je uspořádat a vytvořit z nich vědní obor. Zjednodušeně můžeme říci, že se počítalo, i když primitivně, odjakživa. Rovněž prostorové útvary byly studovány již dávno před naším letopočtem.

Na dějinách matematiky můžeme sledovat celý kulturní vývoj lidstva. Matematika procházela a prochází rychlým a složitým vývojem. Zásoba matematických poznatků se stále rozrůstá. Je to důsledek jednak autonomního rozvoje matematiky, jednak potřebou přírodních věd, techniky, výpočetní techniky, lékařství a v současné době i potřebami oborů společenských věd. Matematika je bohatá a živá součást lidské kultury. Mnohdy si ani nepřipouštíme, jak hluboko matematika proniká do většiny oblastí každodenního života celé společnosti. Matematika hraje důležitou roli v odhalování nových zákonitostí jak v přírodě, tak i ve společnosti.

3. Matematika ve škole

V poslední době dochází k hlasitým útokům na školskou matematiku a k pokusům o vytěsnění tohoto předmětu na okraj vzdělávání. Příčinou tohoto jevu jsou osobní negativní zkušenosti lidí z vyučovacích hodin matematiky. Ty se předávají na děti, které možná už předem zaujímají k matematice negativní postoj. Mezi veřejností existují názory, že školní předmět matematika oslabuje intelektuální sebevědomí většiny žáků a buduje jejich komplex méněcennosti. Předmět Matematika tím nepřispívá k motivování žáků k učení a snižuje kvalitu celého vyučovacího procesu. Příčinu těchto názorů lze vidět ve způsobu vyučování, které je zaměřeno především na výkon žáka nebo studenta.

Většina studentů, i budoucích učitelů matematiky, chápe matematiku jako pouhý soubor poznatků, které je třeba nějakým způsobem vstřebat a pak reprodukovat u zkoušky, často bez hlubšího porozumění. Příčinu je patrně třeba hledat již v dřívější „žakovské“ zkušenosti studentů z hodin školské matematiky. Po „úspěšném“ žákovi bylo požadováno, aby ve vhodném okamžiku předvedl své počtářské dovednosti a hlavním cílem tedy byl výsledek řešení příkladu, v lepším případě pak reprodukce co

největšího množství dat a informací. Taková představa o matematice je však zcela chybná.

4. Vztahy k matematice

Pro většinu populace se strach z matematiky traduje. Odstranění averze vůči matematice nebo dokonce strachu z matematiky vidíme v zajímavém a přitažlivém pedagogickém přístupu učitelů. Tento předmět by se měl zařadit mezi oblíbené předměty zejména u studentů, budoucích učitelů matematiky, neboť učitel sám musí mít kladný vztah k tomuto předmětu. Význam matematiky nelze tedy vidět jen v úzkém praktikizmu. Podstatou by měl být přesný rozbor všech okolností, které se v řešené úloze nebo problému vyskytují. Pro učitele je důležité, aby při vysvětlování problematiky žákům nic nezanedbal, neboť partie učiva na sebe úzce navazují. V opačném případě se ztrácejí souvislosti a žáci se učí bez hlubšího pochopení věci jen z paměti reprodukovat. Pro matematiku je důležitý specifický způsob myšlení, jehož podstatným znakem je hlavně zobecňování, abstrakce a srovnávání.

Výsledky našeho šetření jsou dokladem vztahu dětí a studentů k matematice. Studenti vyplňovali dotazník podle vlastních zkušeností s předmětem Matematika a osobního vztahu k tomuto předmětu. Návratnost dotazníku byla 96%. Některé odpovědi jsme zpracovali do tabulek a u některých položek uvádíme slovní vyjádření zajímavých postřehů k danému předmětu.

4.1 Metody

Šetření jsme provedli s užitím standardní metody pedagogického výzkumu. Sestavili jsme dotazník pro dvě skupiny zkoumaných respondentů. Každá skupina měla jiný dotazník.

- Jednu skupinu tvořilo 18 dětí 5. ročníku plně organizované ZŠ a 16 dětí 3. ročníku základní školy malotřídní.
- Druhou skupinu tvořilo 67 studentů posledního ročníku Pedagogické fakulty Univerzity Palackého oboru Učitelství 1. stupně základní školy.

4.2 Výsledky

V následujících dvou tabulkách jsou v procentech uvedeny odpovědi dětí na dotazníkové položky.

Tabulka 1 *Odpovědi žáků v procentech, vyjadřující své postoje k matematice na malotřídní škole [Staňková, 2005].*

	Odpovědi v %					
	1	2	3	4	5	N
Baví mě	51	14	14	14	7	0
Jde mi	29	43	28	0	0	0
Dobře se mi přemýšlí	37	14	28	7	14	0
Baví mě příklady, u kterých musím přemýšlet	22	57	7	14	0	0
Ve škole všemu porozumím	43	7	36	7	0	7

Legenda: 1 – vždy ano, 2 – skoro pořád ano, 3 – někdy ano, 4 – málokdy ano, 5 – nikdy ano, N – neodpověděli

Tabulka 2 Odpovědi žáků v procentech, vyjadřující své postoje k matematice na ZŠ Milady Horákové [Staňková, 2005].

	Odpovědi v %					
	1	2	3	4	5	N
Baví mě	31	26	32	11	0	0
Jde mi	16	42	42	0	0	0
Dobře se mi přemýšlí	38	26	26	5	5	0
Baví mě příklady, u kterých musím přemýšlet	26	16	42	11	5	0
Ve škole všemu porozumím	25	32	32	11	0	0

Legenda: **1** – vždy ano, **2** – skoro pořád ano, **3** – někdy ano, **4** – málokdy ano, **5** – nikdy ano, **N** – neodpověděli

Srovnání odpovědí dětí z obou typů škol nevykazuje diametrální rozdíly. Většina z dotazovaných má spíše kladný vztah k předmětu matematika. I když sebekriticky přiznávají, že myšlení v matematice jim spíše nejde. Zarážející je vysoké procento dětí, které přiznávají, že málo kdy rozumí probírané problematice a tomu odpovídá i procento dětí, které matematika nebaví.

V následující tabulce jsou uvedeny výsledky dotazníkového šetření, které proběhlo na PdF UP. Hodnocení známkou 1-5 odpovídá klasifikační stupnici.

Tabulka 3 Odpovědi studentů v procentech, vyjadřující postoje k matematice

	Odpovědi v %					
	1	2	3	4	5	N
1. Oznámkuje Váš vztah k matematice	12	33	31	12	12	0
2. Sebehodnocení matematických znalostí	9	36	39	12	4	0
3. Ohodnoťte známkou důležitost matematiky v životě člověka	15	48	36	0	1	0

Zarážející je skutečnost, že skoro jedna čtvrtina respondentů, jak je vidět z tabulky č.3, nemá kladný vztah k matematice. Svůj vztah k tomuto předmětu známkují 4 a 5. Míra sebehodnocení znalosti studentů z matematiky odpovídá Gaussově křivce. Téměř všichni jsou si však vědomi významu matematiky pro život.

Tabulka 4 Odpovědi studentů v procentech na otázku „ Co je pro mne matematika ?“

	Možnosti	Odpovědi v %
1.	Vědní obor	67
2.	Učí logicky myslet	13
3.	Početní příklady, úlohy, vzájemné vztahy	21
4.	Těžkosti, stres, děs	10
5.	Školní předmět	24

6.	Filosofie	1
7.	Zábava, radost	3
8.	Vše kolem nás	9
9.	Nevyplněno	4

Tato dotazníková položka byla otevřená, studenti odpovědi tvořili. Jak je vidět z tabulky č.4 většina studentů napsala že matematika je vědní obor, tj. 67%. Zábavu a radost představuje matematika pro 3% respondentů. Pro 10% studentů matematika znamená těžkosti, stres, dokonce napsali matematika je „děs“.

Uvádíme některá doplňující studentská vyjádření:

- *někdy úplně nudná a zbytečná, jindy zajímavá a užitečná věda,*
- *setkáváme se s ní všude, je prostě nevyhnutelná jako smrt,*
- *důležitá vědní disciplína, která rozvíjí u člověka nejen představivost a myšlenkové operace, zejména trpělivost až téměř „svatost“ v překonávání sám sebe,*
- *věda, jež v mnohém člověka přesahuje,*
- *záliba, koníček, hrůza a děs,*
- *horor.*

Na otázku „Co Vám matematika dala pro život?“ respondenti odpovídali různě a některé odpovědi uvádíme. Téměř 50% respondentů napsalo, že matematika je naučila logicky myslet (někteří z nich uvedli *snad alespoň logicky myslet*). Škála odpovědí na tuto otázku byla rozmanitá a některé zajímavé názory uvádíme:

- *otevřela mi obzory a uvědomění si, co zahrnuje,*
- *trpělivost a disciplinovanost při jejím studiu,*
- *základní informace,*
- *naučila počítat,*
- *rozvinula mi myšlení,*
- *dobré učitele,*
- *možnost vysvětlovat druhým a cítit se potřebná pro spolužáky,*
- *radost z pochopení a vyřešení, někdy však zklamání,*
- *překonávat překážky,*
- *pevnější nervy, které potřebuji já i můj učitel,*
- *radovat se z úspěchu spolužáků, kterým jsem problematiku vysvětlila,*
- *zábavu,*
- *pocit úspěchu,*
- *radost z pochopení,*
- *pochopila jsem, že vedle vědomostí je důležitý kladný vztah k poznávanému,*
- *díky za všechny hodiny M na PdF.*
- *díky matematice jsem lepší člověk.*

Odpovědi na otázku „V předmětu Matematika se mi nejvíce líbilo ...“ studenti odpovídali různě, vybrali jsme nejčastější odpovědi:

- numerické výpočty,
- zajímavosti a praktická využitelnost,
- učebnice, učitel,
- vtipné hodiny matematiky,
- názorné pomůcky,

- hry,
- vlastní úspěch.

Odpovědi na otázku „V předmětu Matematika se mi nejméně líbilo ...“ studenti odpovídali různě, vybrali jsme nejčastější odpovědi:

- mnoho nezáživných příkladů,
- stereotyp,
- testy, systém prověřování,
- špatný výklad nového učiva.

4. Závěr

Získané odpovědi ukazují, že žáci 1. stupně základní školy mají kladný vztah k matematice. Kladný vztah se narušuje s další školní docházkou a bývá nahrazen spíše opačným vztahem. Častou příčinou je, že studenti si uvědomují své nedostatky v matematickém vzdělání, které se promítnou do negativního vztahu. Tyto skutečnosti se pak promítají do velkého nezájmu o studium nejen matematiky, ale i o přírodovědné předměty, které se bez matematiky neobejdou. Důsledkem pak je skutečnost, že se nenaplnují na fakultách obory, které jsou spolu s matematikou. Studenti, kteří se přihlásí na obory s matematikou pak nestudují s úspěchem, neboť se přihlásili na tento obor jen proto, že se nedostali na svůj vysněný obor.

Učitel ve škole se snaží naplňovat vzdělávací cíle a zdá se, že opomíjí cíle afektivní. Měl by na žáky působit tak, aby se také měnily jejich postoje k matematice. Změna postojů vyžaduje čas a trpělivost, zejména proto, že bychom chtěli změnit hluboce a dlouhodobě zakořeněné názory na matematiku. Nestačí pouze uvádět argumenty o důležitosti matematiky. Musíme působit na žákovy city, aby získali příležitost zkoumat důležitost matematiky z hlediska vlastních hodnot a vlastního přesvědčení.

Ukazuje se, že názory i vztah studentů k matematice je velmi pestrý. Odpovědi nevyčerpávají charakter matematiky úplně. Tímto článkem jsme chtěli ukázat nejen jak vidí matematiku žáci, ale i studenti, budoucí učitelé primární školy, kteří matematiku budou učit denně a měli by dětem ukazovat krásu matematiky a budovat pozitivní vztah k tomuto předmětu.

Úloha učitele ve vyučování má i dnes své opodstatnění. Musí, ale nabývat nové podoby. Vedle plnění vzdělávacích cílů učitel vede žáky k vytvoření kladných afektivních cílů.

Literatura

1. VOPĚNKA, P. *Číslo nelžou*. <http://www.jedinak.cz/stranky/txtvopenka.html>, 21.3 2004-03-24
2. STAŇKOVÁ, L. *Hodnocení jako motivační činitel v matematice*. Diplomová práce, 2005.

Kontaktní adresa

RNDr. Jindřiška Eberová, PaedDr. Anna Stopenová, Ph.D.
 Katedra matematiky PdF UP
 Žižkovo nám. 5, 771 40 Olomouc
 Česká republika
 Telefon: +420 585 635 703, +420 585 635 711
 E-mail: eberova@pdfnw.upol.cz, anna.stopenova@upol.cz

MOŽNOSTI ROZVÍJANIA MATEMATICKEJ GRAMOTNOSTI ŠTUDENTOV PREDŠKOLSKÉJ A ELEMENTÁRNEJ PEDAGOGIKY

Ľubica GEROVÁ, Pavel KLENOVČAN

Abstrakt

Príspevok poukazuje na možnosť využitia doplnujúceho elektronického kurzu pre študentov - budúcich učiteľov v MŠ a na 1. stupni ZŠ v predmete Matematická gramotnosť. Zaoberá sa blokom prémiových úloh, orientovaných na riešenie reálnych situácií. Úlohy sú charakterizované z hľadiska rozvíjaných kompetencií a úrovni matematickej gramotnosti a Bloomovej taxonómie vzdelávacích cieľov.

POSSIBILITIES OF MATHEMATICAL LITERACY EDUCATION AND STUDENTS OF PRE-SCHOOL AND ELEMENTARY PEDAGOGY

Abstract

This article is dealing with possibility to show using of electronical course in subject Mathematical literacy for students - next teachers at kindergartens and elementary schools. It is dealing with group of bonus problems focussed on solving of real situations. The problems are judged from view of developing competencies and levels of mathematical literacy and Bloom's taxonomy of educational aims.

1. Úvod

Príspevok využíva naše skúsenosti, ktoré sme získali v priebehu rokov 2004 - 2007. Zaoberali sme sa úrovňou niektorých osvojených didaktických kompetencií študentov, budúcich učiteľov na 1. stupni ZŠ. Ich uplatnenie je potrebné pri riešení matematických úloh, a to štandardných i neštandardných. Sledovali sme niektoré kompetencie študentov tak, ako ich opisuje medzinárodná štúdia PISA. Pozornosť sme zamerali aj na kompetencie študentov spojené s vyššími kognitívnymi cieľmi Bloomovej taxonómie, najmä na schopnosti aplikovať, analyzovať, hodnotiť a tvoriť. Na základe zistených faktov a zmeny študijného programu pre učiteľstvo 1. stupňa na našej pedagogickej fakulte sme sa pokúsili do ich prípravy zahrnúť (zatiaľ dobrovoľne) doplnujúci elektronický kurz v predmete Logika (Gerová, Klenovčan, 2007).

Študijný program odboru Predškolská a elementárna pedagogika na PF v Banskej Bystrici prebieha neustálymi zmenami. Bolo tomu tak aj v školskom roku 2006/7 a ďalšie sa pripravujú pre nasledujúce obdobie. Vzhľadom na stále sa znižujúci počet hodín matematickej prípravy budúcich učiteľov je potrebné zvažovať ďalšie možnosti, aby neklesala úroveň ich pripravenosti pre prax. Znížený rozsah výučby môže byť čiastočne kompenzovaný doplnujúcimi elektronickými kurzami. Ich efektívne využívanie si však vyžaduje premyslenú a dôkladnú prípravu dokumentov, ktorá je

pre učiteľa časovo náročná. Prvé kroky sme urobili v predmete Matematická gramotnosť. Vytvorený vzdelávací program v systéme Moodle zároveň poukázal aj na (ne)záujem študentov o túto formu a jej (ne)akceptáciu. Zdôrazňujeme, že učiteľ ako osobnosť je pri výučbe nezastupiteľný i v dobe elektronických zdrojov výučby a tieto zdroje nemôžu nahradzovať ale len dopĺňať a podporovať tradičné i moderné metódy a formy vyučovania. Našu formu vyučovania označujeme ako „blended learning“ - zmiešané vyučovanie, kombináciu tradičného a elektronického vzdelávania.

2. Blended learning

V školskom roku 2006/7 sme sledovali možnosť ovplyvniť úroveň matematickej gramotnosti študentov v 1. ročníku odboru Predškolská a elementárna pedagogika. Využili sme k tomu kontaktnú výučbu v predmete Matematická gramotnosť a doplnujúci elektronický kurz. V tomto príspevku popíšeme prácu s e-kurzom.

Cieľom bolo podporiť rozvoj

- a) matematickej gramotnosti študentov,
- b) počítačovej gramotnosti (LMS Moodle),
- c) komunikačných kompetencií.

Štruktúru doplnujúceho elektronického kurzu sme zatiaľ zachovali v pôvodnej podobe, teda:

základné informácie; prednášky; učebné texty; úlohy na samostatnú prácu; výsledky; vyskúšajte sa; prémiové úlohy; bodové hodnotenie; zaujímavosti.

Zmenu sme uskutočnili v položke prémiových úloh. Zvýšili sme ich počet a upravili ich zameranie.

Prémiový blok:

Vypracovanie prémiových úloh bolo dobrovoľné. Ich riešenia boli prejavom záujmu študentov o predmet. Úlohy boli ponúknuté v dvoch skupinách A (počet 10), B (10). Boli zverejňované priebežne počas semestra, a to súčasne každý týždeň po jednej z oboch skupín. Skupina A užšie súvisela so stanoveným obsahom učiva preberaným počas semestra. Skupina B bola zameraná na použitie matematiky ako nástroja na riešenie úloh z pohľadu reálnych situácií. Študentom postačovali k riešeniu úloh matematické poznatky a zručnosti absolventa základnej školy. Obe skupiny úloh boli formulované slovne a vychádzali z reálneho života. Pri ich výbere a tvorbe sme vychádzali z kritérií dôležitých pre rozvoj matematickej gramotnosti ako sú chápané v krajinách OECD.

Pri výbere úloh sme sledovali najmä **tri hľadiská:**

1. Dosiahnutie *vyšších úrovní matematickej gramotnosti*. To znamená aktívnu prácu na úlohe, preniknutie do jej podstaty (úroveň 4), výber, porovnanie a vyhodnotenie stratégie riešenia problémov, uvažovanie o postupe a jeho odôvodnenie (úroveň 5), prípadne zovšeobecnenie riešenia, využitie situácie na vytvorenie nových úloh a postupov (úroveň 6).
2. Rozvíjanie *kompetencií* (štúdia OECD PISA 2003) vzhľadom na stanovené tri úrovne (štúdia OECD PISA 2003).
3. Uplatnenie *Bloomovej taxonómie* vzdelávacích cieľov prepojené s analýzou, hodnotením a syntézou.

Uvedieme dve úlohy ako reprezentantov úloh v skupine A a B.

Skupina A: Anketa

Anketár oslovil 500 ľudí, ktorí vlastnili kreditné karty. Podal správu, že 240 vlastnilo Gold-kartu, 290 malo Super-kartu a 270 malo Sporo-kartu. Anketár povedal, že 80 z týchto ľudí vlastnilo Gold-kartu a Super-kartu, 70 malo Gold-kartu a Sporo-kartu, 60

malo Super-kartu a Sporo-kartu, 50 vlastnilo všetky tri karty. Keď správa z prieskumu bola podaná na uverejnenie v miestnych novinách, vydavateľ ju odmietol publikovať. Vyhlásil, že anketár nebol presný. Mal vydavateľ pravdu? Prečo áno, alebo prečo nie?

Skupina B: **Cena plynu**

Cenové tarify pre dodávky plynu kategórie domácnosť sú nasledovné:

Cenová tarifa	Spotreba za 12 mesiacov	Fixná mesačná sadzba	Sadzba za odobraté množstvo plynu
		(Sk/mes.)	(Sk/m ³)
D1	od ... do ... m ³ vrátane	21,06	16,71
D2	nad ... do ... m ³ vrátane	119,24	10,82

- Koľko zaplatí rodina Novákovcov, ktorá spotrebuje za rok 190 m³ plynu?
- Koľko zaplatí rodina Kováčovcov, ktorá spotrebuje za rok 210 m³ plynu?
- Porovnajcie platby rodín Novákovcov a Kováčovcov. Čo z Vášho porovnania vyplýva?
- Pri akej spotrebe plynu by ste si zvolili (ak by ste túto možnosť mali) cenovú tarifu D1?

V nasledujúcej tabuľke uvádzame prehľad charakteristiky úloh. Symbol hviezdičky upozorňuje na príslušnosť jednotlivých kategórií.

Tabuľka 1 Prémiové úlohy

		skupina A										skupina B									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
MG kompetencie	R, U	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
	O, P		*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
	S, F, T, O	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
	A	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
MG úroveň	prepojenia	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
	reflexie	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
Bloomova taxonómia	analýza	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
	hodnotenie	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
	syntéza										*								*	*	*

Legenda: MG - matematická gramotnosť

R, U - rozmyšľanie a usudzovanie

O, P - polozenie otázky a riešenie problému

A - argumentácia

S, F, T, O - použitie symbolického, formálneho, technického vyjadrovania a operácií

Úlohu č. 10 v oboch skupinách A, B mali doplniť študenti.

Podľa inovácie taxonómie vzdelávacích cieľov z r. 2001 (Valent, 2007) sú znalosti v rámci dimenzie poznatkov triedené na faktické (F), konceptuálne (K), procedurálne (P) a metakognitívne (M). Vzhľadom na to môžeme túto kategóriu v našich úlohách premietnuť v podobe znalosti terminológie (F), znalosti princípov a zovšeobecnení (K), znalosti špecifických zručností a algoritmov v odbore (P), sebapoznania (M).

Môžeme konštatovať, že úlohy, ktoré sme zaradili do našej ponuky v e-kurze, rozvíjali požadované vyššie kompetencie a úrovne.

Aktívna práca študentov a vyučujúceho s úlohami bloku B môže:

- *Podporiť motiváciu*; Predpokladali sme prirodzenú zvedavosť študentov, snáď i túžbu po poznaní. Druhým faktorom bolo využitie netradičného zdroja vo vzdelávaní.
- *Podporiť záujem o predmet*, navyše odmenený bodovým ohodnotením.
- *Rozvinúť diskusiu* s učiteľom i so spolužiakmi navzájom o riešeníach úloh v rámci diskusného fóra v Moodle, *prezentovať prácu* v diskusnom fóre i na seminári (verbálna a písomná komunikácia, argumentácia, obhajoba riešenia).
- *Oceniť prácu* študentov ostatnými spolužiakmi, sprístupniť ju zverejnením v diskusnom fóre.
- *Rozvinúť sebadôveru a sebadôveru* vo vlastné schopnosti.

Záver

Komplexne danú problematiku rozvoja matematickej gramotnosti budeme riešiť v nasledujúcom období aj s podporou grantovej agentúry VEGA. Tento príspevok a predchádzajúce štúdie (Gerová, Klenovčan, 2004 - 2007, Brincková, 2006) budú slúžiť ako východisko pre schválený projekt VEGA (2008 – 2010) s názvom *Analýza matematickej prípravy študentov odboru Predškolskej a elementárnej pedagogiky z pohľadu rozvoja matematickej gramotnosti*. Prostredníctvom tohto projektu budeme diagnostikovať:

- podmienky pre rozvoj matematickej gramotnosti študentov pred vstupom na vysokú školu;
- úroveň matematickej gramotnosti študentov - budúcich učiteľov pri vstupe na vysokú školu;
- podmienky pre rozvoj matematickej gramotnosti študentov počas štúdia v odbore *Predškolská a elementárna pedagogika* (PaEPg);
- úroveň matematickej gramotnosti študentov pri ukončení bakalárskeho štúdia v odbore PaEPg.

Hlavným cieľom projektu bude spracovanie návrhu na dosiahnutie maximálnych vzdelávacích efektov s akcentom nielen na odbornú výučbu, ale aj na emocionálnu výchovu v tom zmysle, aby absolventi odboru PaEPg boli schopní pestovať pozitívne postoje k matematike aj u svojich budúcich žiakov.

Literatura

1. BRINCKOVÁ, J.: *Riešenie lineárnych rovníc a rozvoj matematickej gramotnosti žiakov 8. ročníka ZŠ*. In: Acta Mathematica 9. Zborník príspevkov zo 4. nitrianskej matematickej konferencie. 12.-14.9.2006. Nitra: FPV UKF, 2006 s. 251-258. ISBN 80-8094-036-3.
2. GEROVÁ, L.- KLENOVČAN, P.: *Analógie a rozdiely v riešeníach matematických úloh pre 1. stupeň základnej školy*. In: Zborník Cesty (k) poznávaniu v matematice primárnej školy. Olomouc: PF UP, 2004. s. 91 - 97. ISBN: 80-244-0818-X.
3. GEROVÁ, L.- KLENOVČAN, P.: *Riešenie matematických úloh pre 1. stupeň ZŠ z pohľadu rozvíjania matematickej gramotnosti*. In: CD "Induktívne a deduktívne prístupy v matematike". Trnava: PF TU, 2005. s. 78 - 88. ISBN: 80-8082-030-9.
4. GEROVÁ, L.- KLENOVČAN, P.: *Riešenie praktických situácií a rozvoj matematickej gramotnosti*. In: Zborník „Matematika 2“, Olomouc: PF UP, 2006. ISBN: 80-244-1311-6.

5. GEROVÁ, L.- KLENOVČAN, P.: *Rozvíjanie matematickej gramotnosti budúcich učiteľov - elementaristov*. In: Sborník z konference s medzinárodnou účasťou „Vyučovanie matematiky z pohľadu kompetenci žaka a učiteľa 1. stupňa základného vzdelávania – Srní 2007“. Plzeň: ZU, 2007. ISBN: 978-80-7043-548-9.
6. VALENT, M.: *Taxonómia vzdelávacích cieľov v novom štate*. In: Pedagogické rozhľady, č. 5. s. 14 - 17. Banská Bystrica: MPC, 2007.

Kontaktná adresa

*PaedDr. Ľubica Gerová, PhD.
katedra matematiky, PF UMB
Ružová 13, 974 11 Banská Bystrica
Telefón: +421 48/436 4419
lgerova@pdf.umb.sk*

*Doc. RNDr. Pavel Klenovčan, CSc.
katedra matematiky, PF UMB
Ružová 13, 974 11 Banská Bystrica
Telefón: +421 48/436 4417
pklenovcan@pdf.umb.sk*

DAS MATHEMATIKBUCH AUF NEUEN WEGEN

Hahn CHRISTINE

Abstract

Mathematikbücher sind als Schulbücher aus dem Schulalltag nicht wegzudenken. In vielen Fällen sind sie voll von Aufgabenbeispielen, die von den Schüler/innen im Sinne des automatisierenden Übens gelöst werden sollen. Die allgemeinen mathematischen Kompetenzen, wie „Modellieren“, „Operieren und Darstellen“, „Kommunizieren“ und „Probleme stellen und lösen“, die durch einen guten Unterricht geschult werden sollen, stehen daher nicht ausreichend im Mittelpunkt. „Die Matheprofis“ gehen neue Wege und versuchen diesem Anspruch gerecht zu werden!

NEW PATHS IN MATH BOOKS

Maths books are part of the every-day routine in primary school life. They are usually full of exercises which children have to do in terms of automatised practising. Mathematical competences like “modelling”, “operating and presenting”, “communicating” and “problem finding and solving”, which should be trained through good teaching, are therefore not focused on sufficiently. “Die Matheprofis” break new ground by trying to meet this demand.

1. Welchen Beitrag kann ein Schulbuch zum offenen Unterricht leisten?

Auf den ersten Blick erscheinen die Verwendung eines Schulbuches und das Konzept eines offenen Mathematikunterrichts als Widerspruch. Versteht man offenen Unterricht jedoch als einen Unterricht, wie er von Sybille Schütte für „Die Matheprofis“(1) konzipiert wird, löst sich dieser Widerspruch auf. Ihre grundlegenden Vorstellungen für eine Anleitung zu eigenständiger Arbeit liegen in:

- *Geeigneten offenen Lernangeboten*
- *Vorbildern und Beispielen von Lösungswegen, die zu eigenen Lösungsversuchen anregen*
- *Einer Ermutigung, gezielten Anregung und Beobachtung ihrer Lernwege sowie der Anerkennung ihrer Bemühungen(2).*

Mit diesem Anspruch an einen sachgerechten, kindgemäßen und am jeweiligen Entwicklungs- und Leistungsstand ansetzenden Mathematikunterricht werden Schülerinnen und Schüler, von der ersten Schulstufe beginnend, konsequent in ihren allgemeinen mathematischen Kompetenzen geschult, die für die Anwendung im Rahmen der Bildungsstandards, die auch für die 4. Schulstufen der Volksschule in Zukunft verbindlich sein werden, vorbereitet. Exemplarisch soll an Beispielen aus „Die

Matheprofis 4“ gezeigt werden, wie diese Kompetenzschulung mit Unterstützung eines Schulbuches gelingen kann.

1.1. Modellieren

Umfasst die Kompetenz, eine Sachsituation in ein mathematisches Modell zu übertragen. Dazu ist erforderlich, den mathematischen Stellenwert eines Problems zu erkennen, die benötigten Daten zu sichten und einen geeigneten Lösungsweg zu finden. Das Ergebnis ist in Hinblick auf die Sachsituation zu interpretieren und auf seine Gültigkeit zu überprüfen(3).

Diese Beschreibung ermöglicht den Lehrpersonen bei der Auswahl der Beispiele und Texte auf Inhalte zu achten, die es Kindern ermöglichen diese Schritte auch durchzuführen. Dieser Schritt des Modellieren muss von allen Kindern eingefordert werden, es stellt die Voraussetzung dafür dar, um im Anschluss daran die entsprechende Rechenoperation zu finden und zu einem Ergebnis zu kommen. „Die Matheprofis 4“ wählen dazu unter anderem die folgende Form der Darstellung(Abb.1):

④ Erhans letzte Geschichte:

Zwei Radfahrer wollen einander treffen. Sie starten um 9.00 Uhr in 98 km Entfernung voneinander. Um 11.00 Uhr sind sie noch 12 km voneinander entfernt. Der eine ist 40 km gefahren. Wie viele km ist der andere zu diesem Zeitpunkt gefahren?

Welche Skizze ist deiner Meinung nach am besten für die Lösung geeignet? Welche nicht? Begründe!

Mache selbst eine Skizze zu dem Rechenproblem, die dir bei der Lösung hilft! Sprech darüber, welche Skizze ihr am besten findet!

Abb.1/Die Matheprofis 4/Seite 57

1.2. Operieren und Darstellen

Umfasst die Kompetenz, Verfahren, die für die Lösung eines mathematischen Problems zielführend sind, zu finden und anzuwenden. Das bedeutet, fachspezifische Zeichen zu verwenden, mit Gleichungen, Termen und graphischen Darstellungen zu arbeiten und mit Zeichen- und Messgeräten umzugehen(3).

Die Arbeit in der Grundschule beschränkt sich auf arithmetische Aufgabenstellungen. In Anbetracht des kommenden Schulwechsels in eine allgemeinbildende höhere Schule, eine Kooperative Mittelschule oder eine Hauptschule kann bei den Schüler/innen mit Zahlenrätseln ein Vorverständnis für algebraische Aufgabenstellungen aufgebaut werden. Da Operatordarstellungen bereits ab der 1. Schulstufe als Übungsformat bekannt sind, stellen solche Aufgaben eine Erweiterung im Sinne des Spiralprinzips dar und werden mit großer Motivation gelöst (Abb.2).



Abb.2/Die Matheprofis 4/Seite 58

1.3. Kommunizieren

Umfasst die Kompetenz, mathematische Aufgaben mit Hilfe der Fachsprache zu verbalisieren, mathematisch zu argumentieren, zu dokumentieren und zu begründen(3).

Sprache und Mathematik sind eng miteinander verbunden. Eine mathematische Aufgabenstellung in kindgemäßer Formulierung oder auch Fachsprache ausdrücken zu können bedeutet, die Aufgabenstellung auch verstanden zu haben. Eine Kompetenzerweiterung kann daher nicht nur für den Gegenstand Mathematik beobachtet werden, sondern kommt auch dem Gegenstand Deutsch generell zu Gute. Wie auch die Beispiele in internationalen Studien wie TIMSS zeigen, steht nicht immer das Ausrechnen im Vordergrund, das Reflektieren und Erkennen von Strategien ist langfristig gesehen von größerer Bedeutung. Wie auch die Abb.3 zeigt, können Übungsaufgaben dazu dienen, den „Zahlenblick“ zu schulen.

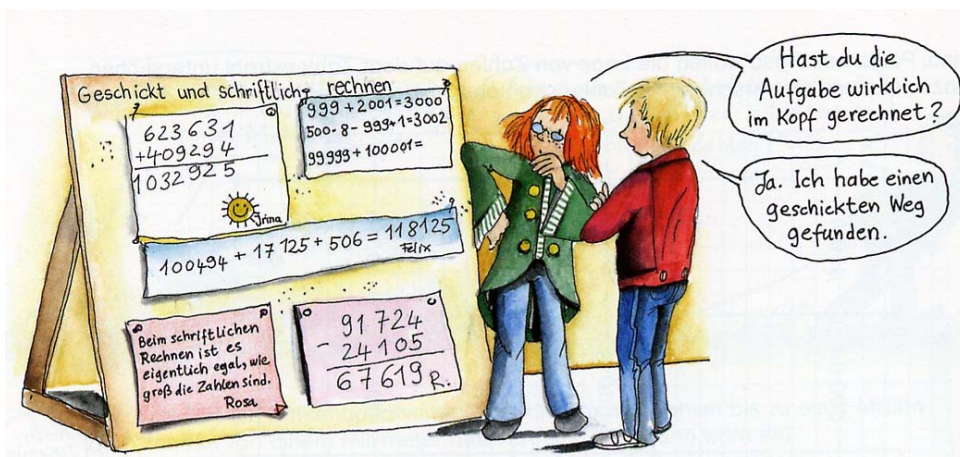


Abb.3./Die Matheprofis 4/Seite 28

1.4. Probleme stellen und lösen

Umfasst die Kompetenz, Probleme zu erkennen, anzunehmen und weiter zu verfolgen(3).

Mehrheitlich ergeben sich Fragestellungen, die mit Mathematik beantwortet werden, aus dem Sachunterricht und der Lebenswelt der Kinder. In solchen Situationen wird für die Schüler/innen deutlich, dass sich ihre Kompetenz, z.B. das Lesen einer Statistik und das Wissen wie sie erstellt wird, eine Voraussetzung darstellt, um solche Fragen beantworten zu können, wie sie in der Abb. 4 zu finden sind. Die Sachrichtigkeit steht dabei auf jeden Fall im Mittelpunkt, aber auch die Erkenntnis, dass es beim Berechnen solcher Werte nicht auf eine exakte Zahl im Ergebnis ankommt, dass vielmehr das Runden von Zahlen zu einem sinnvollen Ergebnis führt, das für weitere Sachüberlegungen, wie z.B. beim Wasserverbrauch zu sparen, hilfreich sein kann.

Die Matheprofis machen an ihrer Schule ein Projekt zum Thema Wasser. Von den Stadtwerken bekamen sie dieses Plakat.

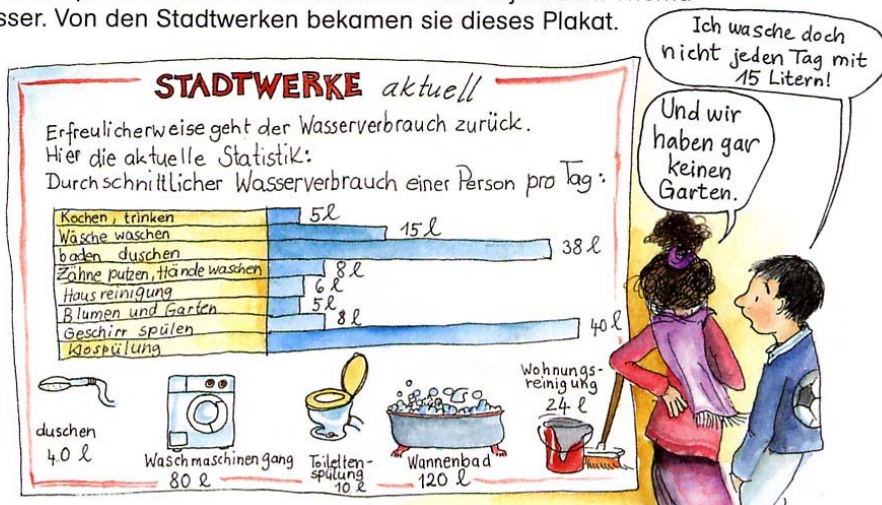


Abb.4./Die Matheprofis 4/Seite 54

„Die Matheprofis“ zeigen, wie Ansprüche an einen sachgerechten, dem aktuellen Stand der Fachdidaktik entsprechenden Mathematikunterricht von einem Mathematikbuch unterstützt werden können. Die Schüler/innen fühlen sich dabei in ihrem Anspruch ernst genommen, Fragen stellen zu können, Sachprobleme mit Hilfe der Mathematik lösen zu lernen und auch Rätsel lösen zu dürfen! Sie schulen damit auch ihren Zahlenblick und freuen sich auf herausfordernde Aufgabenstellungen.

References

1. SCHÜTTE/ARENDs/BUGRAM/HAHN/RUCKERBAUER. Die Matheprofis. *Schulbuch* 2006, Veritas-Verlag / Oldenburg-Verlag www.veritas.at
2. RATHGEB-SCHNIERER Elisabeth und ROOS Udo (Hrsg.), Wie rechnen Matheprofis? *Ideen und Erfahrungen zum offenen Mathematikunterricht*. 2005, Oldenburg Verlag . ISBN 978-3-637-00033-9.
3. BMUKK. *Bildungsstandards für Mathematik* .Version 2.2. Februar 2006

Contact address

*Hahn Christine Prof.
Pädagogische Hochschule Wien
A-1100 Wien, Grenzackerstraße 18
Phone: +43 1 60118/3916
E-mail: diehahn@aon.at*

DYNAMICKÉ PRVKY VO VYUČOVANÍ GEOMETRIE

Pavol HANZEL

Abstrakt

V tomto príspevku upriamime pozornosť na možnosti využívania programu C.a.R vo vyučovaní elementárnej geometrie. Popíšeme tvorbu a používanie appletov¹, ktoré sme vytvorili pomocou programu C.a.R. Budeme sledovať dva ciele: popísanie matematického základu appletov a interpretácia niektorých geometrických pojmov pomocou appletov.

DYNAMIC ELEMENTS IN TEACHING OF GEOMETRY

Abstract

In this paper we show animations and creations of applets in the freeware mathematical program C.a.R. We focus on the presentation and distribution of applets of elementary geometry which are useful for teaching of mathematics at faculties of education.

1. Úvod

Applety sú špecifické aplikácie, ktoré je možné spustiť v akejkoľvek internetovej prehliadači. Umožňujú vyšší stupeň interaktivity, komplexnosti a dynamickosti vo vyučovaní. Základom appletov je animácia dosiahnutá najčastejšie možnosťou pohybu nejakého bodu, resp. väčšieho útvaru. Vo vyučovaní matematiky applety sa využívajú predovšetkým na interpretáciu takých tvrdení resp. vlastností, ktoré sa opierajú o invariantnosť pri danej transformácii.

Pri tvorbe appletov využívame grafický softvér C.a.R. (Compass and Ruler), ktorý je vhodný na vytváranie názorných dynamických grafických ukážok nielen pri vyučovaní v geometrii, ale aj v iných matematických disciplínach. Program je tzv. freeware a je dostupný v mnohých jazykoch, slovenskú verziu čitateľ nájde na stránke².

2. Ciele

Využívanie appletov vo vyučovaní matematiky má okrem motivačnej funkcie predovšetkým evokačnú funkciu. Práca s appletmi je experimentálna metóda, ktorá umožní žiakom/študentom prechádzať rôznymi etapami vytvárania matematického pojmu. Podľa [5] je „veľmi efektívna v 1. etape pojmotvorného procesu, pre úspešné zvládnutie učiva žiak vo vyučovacom procese musí prejsť všetkými štyrmi etapami“. V geometrii vhodný experiment vyvoláva korektné matematické predstavy o pojme

¹ Pojem applet sa skladá z dvoch zložiek: „app“ (angl. application) a koncovky „let“ (v anglickom jazyku význam zhrubnutejšie). Tento termín bol zavedený v roku 1993. Väčšina appletov je naprogramovaná v jazyku Java.

² <http://vk.upjs.sk/~tuleja/CaR>

a následne jeho uvedenie a pochopenie. Tento proces vytvára pevný základ matematického myslenia a v literatúre sa často označuje skratkou EUR [2]. Pri navrhovaní a vytváraní appletov³ je preto dôležité v prvom rade porozumieť teoretickej podstate matematického problému, ktorý chceme dynamicky prezentovať. V súčasnosti príprava učiteľov matematiky vytvára dobré predpoklady dosiahnuť integritu technickej (programátorská) a matematickej (teoretická a didaktická) zložky pri tvorbe appletov. Využívanie grafických softvérov (CABRI, C.a.R. a pod.) významne redukuje požiadavky na technické predpoklady, čím sa zväčšuje priestor pre didaktickú zložku pri tvorbe appletov. Tieto softvéry umožňujú automatické prevedenie geometrickej konštrukcie na applet. V tomto príspevku sme si vymedzili ciele, ktoré sledujú význam:

- metrického invariantu pri geometrickej transformácii
- funkcie SCALE programu C.a.R. v dynamickej konštrukcii
- appletov pri zvyšovaní informačnej gramotnosti učiteľov matematiky

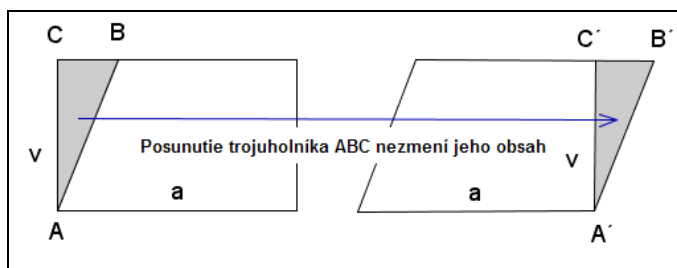
3. Invariant obsahu pri geometrickej transformácii

Vo vyučovaní planimetrie sa mnohokrát stretávame s transformáciami, pri ktorých ako invariant vystupuje do popredia obsah geometrickeho útvaru. Pre žiakov/študentov je prijateľné tvrdenie:

Tvrdenie:

Nech T je zhodné zobrazenie roviny E_2 na E_2 a nech $U \subset E_2$ je merateľný geometrický útvar, ktorého miera je $M(U)$. Potom pre $U' = T(U)$ platí, že je jeho miera $M(U')$ sa rovná pôvodnej miere $M(U)$. *Voľnejšie povedané, obsah geometrickeho útvaru je invariantom zhodného zobrazenia v rovine.*

Toto tvrdenie je možné využiť aj v nižších ročníkoch ZŠ pri odvádzaní obsahu rovnobežníka, tak ako to ukazuje obrázok 1. Na ľavej strane tohto obrázka je obdĺžnik zložený z dvoch neprekrývajúcich sa útvarov a jeho obsah je rovný súčinu $S = a \cdot v$. Na pravej strane je rovnobežník zložený zo zhodných neprekrývajúcich sa útvarov a jeho obsah musí byť tiež rovný súčinu $S = a \cdot v$.

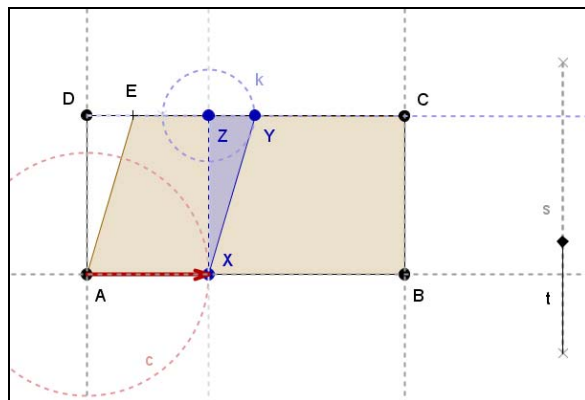


Obr. 1 Obsah rovnobežníka

Vhodným grafickým softvérom môžeme situáciu znázornenú na obrázku 1 vystihnúť dynamicky. Nami použitý softvér C.a.R. umožňuje zachytiť plynulý prechod od počiatočnej situácie (ľavá časť obr. 1) do konečnej polohy (pravá časť obr.1) a späť. Zachytiť celý proces dynamickej transformácie si vyžaduje jeho rozloženie na elementárne kroky (pozri tiež obrázky 2 a 3):

³ Applety použité v tomto príspevku, môžete si ich stiahnuť na adrese: www.pdf.umb.sk/~phanzel/ a www.pdf.umb.sk/~rmajovska/ a voľne distribuovať. Podporíte tým šírenie nových prístupov pri vzdelávaní, ktoré matematiku robia prístupnejšou.

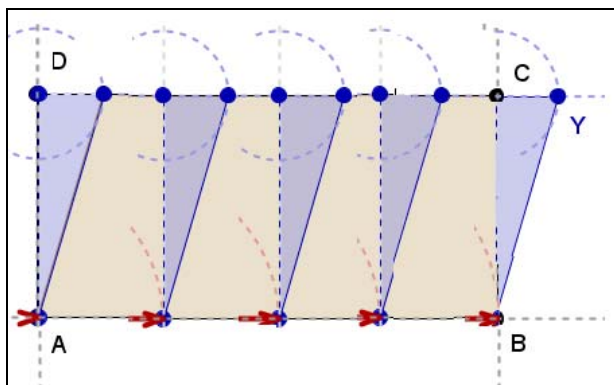
- stanoviť počiatočné (fixné) podmienky – v našom prípade (obr. 2) obdĺžnik $ABCD$, ktorý musí byť ukotvený na kolmiciach AB , PD ,
- určiť počiatočnú (voľnú) polohu bodu E na strane DC , ktorú bude možné meniť v intervale $\langle A, B \rangle$,
- zvoliť posuvník s , ktorého veľkosť sa rovná veľkosti úsečky AB ,
- zvoliť bod X na úsečke AB (dynamicky závislý bod) tak, aby veľkosť úsečky AX sa zhodovala s veľkosťou vektora t (dynamická premenná) na posuvníku s , pričom $t \in (0, d = |AB|)$,
- zostrojiť trojuholník XYZ , ktorý je zhodný s trojuholníkom AED v posunutí AX



Obr. 2 Dynamická transformácia

Poznámka 1:

Dynamické prvky – úsečka AX , strany trojuholníka XYZ , ktoré sú závislé od veľkostí iných úsečiek, môžeme zostrojiť napríklad ako priesečníky kružníc s daným polomerom a odpovedajúcich rovnobežiek resp. kolmíc. Veľkosť polomerov takýchto kružníc odvodíme napríklad od veľkosti vektora t resp. od veľkostí strán trojuholníka ADE .



Obr. 3 Animácia transformácie

4. Využitie funkcie SCALE pri tvorbe appletu

Funkcia SCALE (x, a, b) počíta relatívnu polohu x v intervale (a, b) , ak je x v tomto intervale. Inak sa stane výraz neplatným. Túto funkciu môžeme výhodne využiť, ak chceme zobraziť rovnomerný pohyb viacerých bodov v intervaloch rôznej dĺžky.

Príklad 1.

Dynamicky znázorníte rýchlosti $v(W)$, $v(A)$ chodca W , cyklistu C a automobilu A , ktorí za rovnaký čas $t_0 \in (0, t)$ prejdú rôzne dráhy. Logická podmienka je, aby dráhy splňovali nerovnosti $s(W) < s(C) < s(A)$.

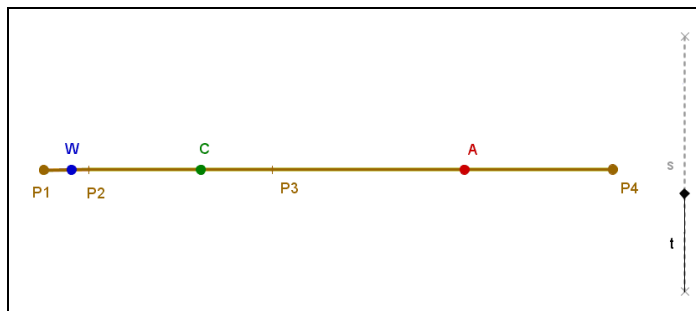
- Označme $|P_1P_2| = s(W)$, $|P_2P_3| = s(C)$ a $|P_3P_4| = s(A)$ tak, ako to ukazuje obrázok 4. Veľkosť dráhy $s(A)$ je zrejme počiatočná (fixná) podmienka pre každého účastníka dopravnej situácie.
- Body P_2, P_3 budú určovať počiatočné (voľné) hodnoty pre veľkosti dráh a musia byť zostrojené tak, aby ich bolo možné meniť v intervale P_1P_4 .
- Zvolíme posuvník s hodnotami $0 < t < s$, ale veľkosť úsečky s nebudeme viazať podmienkou: $s = |P_1P_4|$. Posuvník „imaginárne“ rozdelíme na tri zhodné časti, ktoré priradíme úsečkám/intervalom P_iP_{i+1} , pre $i = 1, 2, 3$.
- Pomocou funkcie SCALE (x, a, b) určíme polomer

$$r_i = \text{scale}\left(t, \frac{s \cdot i}{3}, \frac{s \cdot (i+1)}{3}\right) * d(P_{i+1}P_{i+2}) + \xi, \text{ pre } i = 0, 1, 2.$$

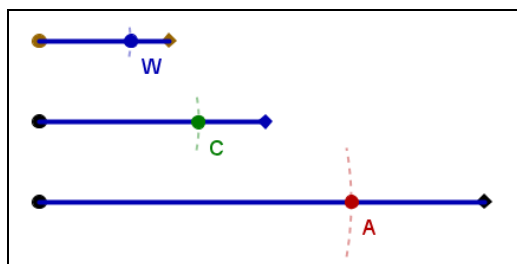
Takto definovaný polomer umožní transformáciu „imaginárnych“ častí posuvníka na „reálne“ intervaly P_iP_{i+1} . To znamená, že ak vektor t bude ležať v intervale:

- $\left(0, \frac{s}{3}\right)$, bude sa bod W pohybovať po úsečke P_1P_2 ,
- $\left(\frac{s}{3}, \frac{2s}{3}\right)$, bude sa bod C pohybovať po úsečke P_2P_3 ,
- $\left(\frac{2s}{3}, s\right)$, bude sa bod A pohybovať po úsečke P_3P_4 .

Nakoniec stačí spustiť animáciu pre vektor t (časovo rovnomernú zmenu t v posuvníku s). Tieto animačné zmeny determinujú pohyb bodov W, C, A v prislúchajúcich intervaloch P_iP_{i+1} . Keďže čas potrebný na posunutie každého z týchto bodov od bodu P_i do bodu P_{i+1} je v danom intervale rovnaký ($1/3$ času animácie), bude sa pohyb týchto bodov uskutočňovať rôznymi rýchlosťami.



Obr. 4 Rôzne rýchlosti - sekvenčne



Obr. 5 Rôzne rýchlosti - paralelne

Poznámka 2:

Konštanta ξ je veľmi malá kladná veličina, ktorá zabezpečí spojitý prechod medzi intervalmi.

Poznámka 3:

Intervaly $P_i P_{i+1}$ sú vzhľadom na ich vzájomnú polohu nezávislé. Môžeme ich umiestniť v ľubovoľnej časti roviny. Z toho vyplýva, že interpretáciu rôznych rýchlostí formou appletu môžeme uskutočniť buď sekvenčne (obr. 4) alebo paralelne (obr. 5) prípadne inak.

Procedúru z predchádzajúceho príkladu môžeme zovšeobecniť na rôzne merateľné geometrické útvary. Napríklad úsečku $P_i P_{i+1}$ môžeme nahradiť uhlom, časťou kružnice a pod. Takýmto zovšeobecnením sa použitie funkcie $scale(x, a, b)$ rozšíri na aplikácie nielen v geometrii ale i v iných matematických disciplínach prípadne vo fyzike pri učive o pohybe.

5. Využitie appletov vo vyučovaní

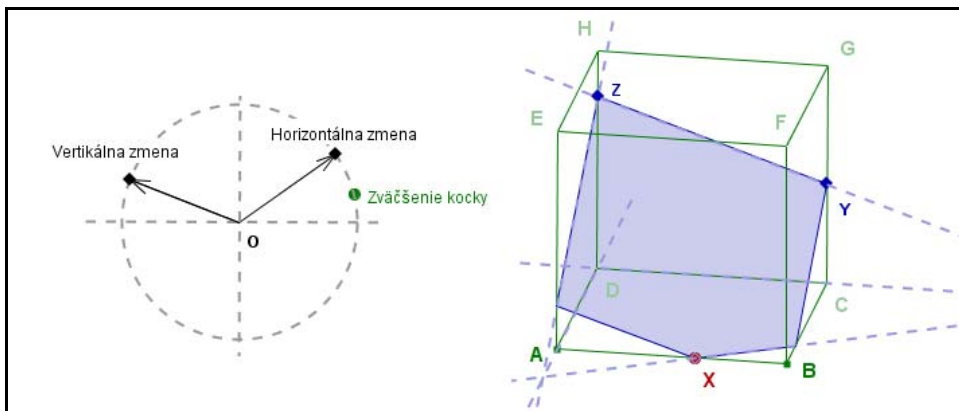
Učiteľ matematiky by sa mal oboznámiť s tvorbou appletov a mal by dokázať sám vytvoriť jednoduché applety. Elementárna geometria umožňuje realizáciu takejto požiadavky. Práca [4] zdôrazňuje, že tvorba appletov zároveň zvyšuje informačnú gramotnosť učiteľov matematiky, ktorá sa ukazuje nevyhnutnou práve v období implementácie IKT do vzdelávania. Prax nám naznačila, že aktivita študentov na seminároch z matematiky sa podstatne zvýšila, keď mali možnosť pracovať interaktívne s appletmi. Študenti sa postupne zbavovali príznačného „strachu“ z matematiky a pracovali uvoľnene.

Program C.a.R. má vlastný podprogram, ktorý automaticky vytvorí applet. Tento podprogram transformuje vytvorenú konštrukciu do jednoduchej HTML. Celý proces vytvorenia appletu pozostáva z dvoch krokov.

Najskôr musíme zostrojiť konštrukciu, ktorú plánujeme prezentovať na webe. Konštrukciu zostrojíme pomocou nástrojov programu C.a.R, kde osobitne zvýrazníme počiatočné fixné a voľné prvky. Počiatočné voľné prvky umožnia meniť charakter resp. tvar útvarov, ktoré budú animované. Ďalej je nutné stanoviť dráhu (jednoparametrický útvar PQ – najčastejšie je to úsečka), po ktorej sa bude pohybovať kľúčový bod X vyjadrujúci časovo rovnomernú zmenu. Dĺžka dráhy $d = |PQ|$ bude predstavovať nezávislú premennú a odpovedajúca numerická hodnota pre kľúčový bod $d = |PX|$ závislé premennú pre animáciu.

Príklad 2.

Zostrojte rez kocky $ABCDEFGH$ rovinou, ktorá je určená bodmi X , Y , Z . Konštrukciu urobte tak, aby body Y , Z boli voľné prvky konštrukcie a bod X bol kľúčový bod animácie.



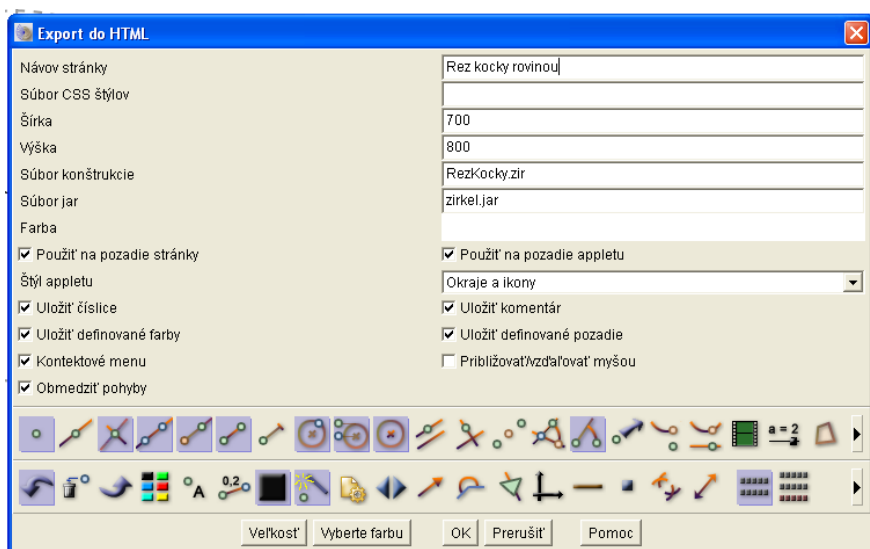
Obr. 7 Rez kocky

Pri riešení sme využili konštrukciu kocky, ktorú je možné otáčať okolo vertikálnej a horizontálnej osi. Túto konštrukciu dodáva autor grafického softvéru C.a.R.

Fixné prvky konštrukcie sú vrcholy kocky a počiatočné voľné prvky predstavujú body označené ako „Horizontálna zmena, Vertikálna zmena a Zväčšenie kocky“. Voľba ďalších voľných prvkov vyplýva zo zadania príkladu. Po ukončení geometrickej konštrukcie (zostrojenie rezu kocky) spustíme animáciu bodu X po úsečke AB . Bežiacu animáciu uložíme napríklad v tvare *RezKocky.zir* do vhodného adresára. Druhý krok vytvorenia appletu spočíva v aktivovaní podprogramu *Create on HTML file*. Pred jeho spustením musíme pomocou formulára znázorneného na obrázku 8 zadať parametre appletu:

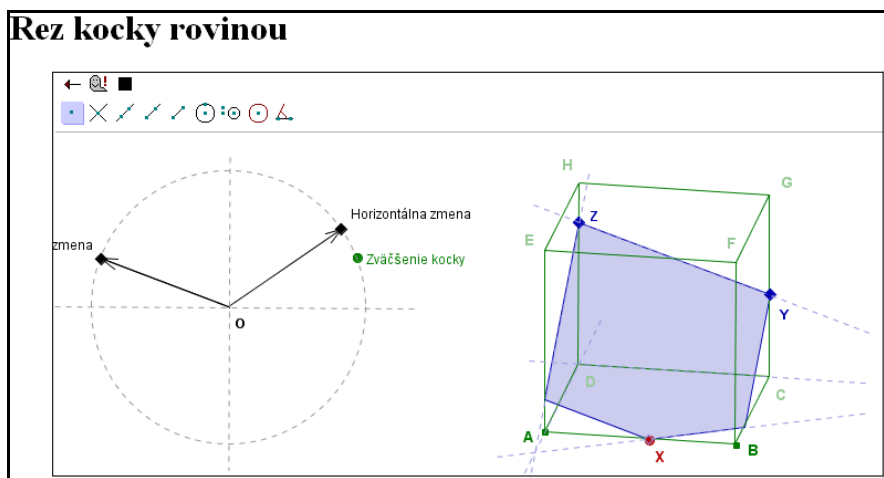
- názov stránky, ktorý sa zobrazí na prezentovanej HTML stránke
- šírku a výšku, ktoré vymedzia oblasť zobrazovanej stránky
- názov zdrojovej konštrukcie (*RezKocky.zir*)
- voliteľné charakteristiky appletu – formát, štýl a pod.

Vo formulári je nutné zadať aj názov riadiaceho programu pre applet. V našom prípade je to program *zirkel.jar*, ktorý je súčasťou softvéru C.a.R. Po aktivovaní tlačidla OK sa objaví ponuka, kde chceme applet uložiť. Musíme ho uložiť do toho istého adresára, kde je zdrojový súbor *RezKocky.zir*. Do tohto adresára je nutné skopírovať aj riadiaci program *zirkel.jar*. Bez neho applet nebude bežať.



Obr. 8 Formulár appletu

Obrázok 9 zobrazuje výslednú HTML stránku, na ktorej applet z príkladu 2 bude bežať.



Obr. 9 HTML stránka appletu

O ďalších možnostiach využitia appletov v iných matematických disciplínach sa čitateľ môže oboznámiť v prácach [1] a [3], kde autori prezentujú ukážky appletov elementárnych matematických funkcií. Z dôvodu, že v tlačenej forme nie je možné plne poukázať na možnosti, ktoré applety prinášajú, odkazujeme čitateľa na www stránky uvádzané v článku. Demonštrácia appletov bude prezentovaná na konferencii v Olomouci.

6. Záver

V súčasnosti sú veľmi intenzívne snahy o zlepšenie matematického vzdelávania pomocou moderných technických prostriedkov. Významné sa ukazuje predovšetkým využívanie PC techniky v univerzitnom vzdelávaní. Snaha dosiahnuť skvalitnenie vzdelávania kladie dôraz aj na posilňovanie experimentálnej zložky vo vyučovaní. Vyučujúci matematiky na vysokých školách sa vyrovnávajú s touto požiadavkou zavádzaním rôznych interaktívnych metód priamo do vyučovania. Východiskom je na jednej strane využiť informačné technológie a technické prostriedky a na druhej strane zmeniť prístup ku koncipovaniu didaktického systému v matematike. Úlohou súčasnej didaktiky matematiky je tieto skutočnosti podchytiť a vhodne využiť, aby sa vyučovanie stalo efektívnejším a primeraným dnešnej dobe a jej požiadavkám. V matematike máme k dispozícii veľké možnosti, ktoré poskytuje počítačom podporovaný experiment. Umožňuje vykonávať časovo nenáročné a veľmi názorné experimenty aj pri samostatnej práci študentov na cvičeniach.

Literatura

1. HANZEL, P., MAJOVSKÁ, R.: *Nové prístupy ve vyučování matematiky na ekonomických fakultách*, ACTA MATHEMATICA 9, FPM UKF Nitra, 2006, ISBN 80-8094-036-3
2. KLENOVČAN, P.: *Autenticnosť a bádanie vo vyučovaní matematiky*, OZ Pedagóg UMB, Banská Bystrica, 2007, 87 s., ISBN 978-80-8083-516-3
3. MAJOVSKÁ, R.: *Grafická podpora při výuce určitého integrálu v kombinovanom studiu*, In: ERIE 2006, Praha, 2006, ISBN 80-213-1349-8
4. MAJOVSKÁ, R.: *Nová role vysokoškolského učitele v eLearningovém kurzu*, In: DIVAI 2006 - Dištančné vzdelávanie v aplikovanej informatike, Nitra 2006, ISBN 80-8050-975-1
5. KOVÁČIK, Š.: *Vybrané prednášky z didaktiky matematiky 2. časť*, Banská Bystrica: Pedagogická fakulta UMB, 2000, 72 s. ISBN 80-8055-360-2

Kontaktní adresa

Prof. RNDr. Pavol Hanzel, CSc.
Katedra matematiky
Pedagogická fakulta
Univerzita Mateja Bela
Ružová 13
SK – 974 11 Banská Bystrica
E-mail: phanzel@pdf.umb.sk

E-LEARNING AKO EFEKTÍVNY NÁSTROJ V MATEMATICKEJ PRÍPRAVE BUDÚCICH UČITEĽOV NA 1. STUPNI ZŠ

Pavel HÍC, Milan POKORNÝ

Abstrakt

Článok sa zaoberá použitím e-learningu v matematickej príprave študentov študijného programu „Predškolská a elementárna pedagogika“. Študenti tohto programu majú počas svojho štúdia ako povinne voliteľné aj predmety „Logika, množiny, relácie“ a „Základy štatistického spracovania údajov“. Autori v článku opisujú experiment zameraný na zistenie vhodnosti e-learningových kurzov „Logika“, „Množiny“ a „Relácie“, z výsledkov ktorého vyplýva, že tieto kurzy sú vhodnou metódou pre prípravu budúcich učiteľov 1. stupňa ZŠ. V druhej časti článku autori stručne charakterizujú nový kurz „Opisná štatistika“, ktorý ešte nebol odskúšaný vo vzdelávacom procese.

E-LEARNING AS AN EFFECTIVE TOOL IN MATHEMATICAL PREPARATION OF FUTURE PRIMARY SCHOOL TEACHERS

Abstract

The paper deals with e-learning in the mathematical preparation of students who study 'Pre-school and Elementary Pedagogy'. These students have to successfully complete courses 'Logic, Sets, and Binary Relations' and 'Basics of Mathematical Statistics'. The authors describe an experiment which focused on suitability of e-learning courses 'Logic', 'Sets', and 'Binary Relations'. The results of the experiment show that the courses represent a suitable and effective method for preparation of future primary school teachers. In the second part of the paper a new course which was designed by authors and which focuses on basics of mathematical statistics is characterised.

1. Úvod

Modernizácia spôsobu vzdelávania študentov vysokých škôl je v súčasnosti veľmi diskutovanou témou, ktorej sa venuje množstvo pedagógov v rámci svojej výukovej činnosti aj v rámci riešenia rôznych grantových úloh. Existuje veľa možností, ako modernizovať vzdelávací proces na vysokých školách. Jednou z týchto možností je aj využitie výdobytkov modernej techniky, najmä moderných informačných a komunikačných technológií. (pozri napríklad [8], [9])

Spôsob využitia moderných informačných a komunikačných technológií sa v ostatných desiatich rokoch prudko menil a vyvíjal. Zatiaľ čo pred desiatimi rokmi boli počítače najmä objektom vzdelávacieho procesu, postupom času začali slúžiť čoraz viac ako prostriedok na dosiahnutie vzdelávacích cieľov v iných oblastiach a predmetoch,

najmä prírodovedne zameraných alebo zameraných na encyklopedické vedomosti. V počítačom podporovanom vzdelávaní slúžili počítače najmä pri vysvetľovaní novej látky, pri jej precvičovaní a pri overovaní vedomostí študentov. S postupom času však už mnohí pedagógovia neboli spokojní s takouto obmedzenou formou využitia IKT vo vzdelávacom procese. Výsledkom bolo, že mnohé fakulty začali využívať „learning management systémy“ (LMS), ktoré im navyše poskytli napríklad možnosť kontroly a monitorovania študijných aktivít študentov, štatistické spracovanie a vyhodnocovanie rôznych údajov o štúdiu, možnosť synchrónnej a asynchrónnej komunikácie medzi pedagógmi a študentami a medzi študentami navzájom. (pozri napríklad [2], [3], [7])

Na Trnavskej univerzite bol po prvý raz nainštalovaný LMS v roku 2003. Išlo o EKPTM, ktorý je používaný dodnes. Zároveň všetci študenti prvého ročníka dennej formy štúdia sa v rámci predmetu IKT vo vzdelávaní naučia pracovať s týmto systémom, čím sa vytvoria predpoklady pre použitie e-learningových kurzov aj v iných predmetoch ich štúdia na fakulte. Na katedre matematiky a informatiky PdF TU sme zatiaľ pripravili päť e-learningových kurzov z oblasti matematiky, ktoré sú umiestnené v LMS:

1. Grafové algoritmy v školskej praxi.
2. Binárne relácie.
3. Logika.
4. Množiny.
5. Opisná štatistika.

2. E-learning v rámci predmetu Logika, množiny, relácie

Jedným z predmetov, ktorý zabezpečuje katedra matematiky a informatiky v študijnom programe „Predškolská a elementárna pedagogika“ je predmet „Logika, množiny, relácie“. Tento predmet každoročne absolvuje približne 45-60 študentov dennej formy štúdia a 80-100 študentov externej formy štúdia. Uvedený počet študentov bol pre nás dostatočný, aby sme sa pokúsili pripraviť e-learningové kurzy, ktorými by sme pokryli vyučovanie uvedeného predmetu.

Postupne sme pripravili tri kurzy: Logika, Množiny a Relácie (pozri [4], [5], [6]). Tieto kurzy sme pripravili v on-line a off-line forme. Študenti dennej formy štúdia majú totiž počas štúdia predmet, na ktorom sa naučia pracovať s LMS a e-learningovými kurzami, takže môžu využívať podobné kurzy v LMS aj pri vyučovaní iných predmetov. Pre študentov externej formy štúdia je vhodnejší off-line kurz na CD.

Aby sme overili vhodnosť pripravených e-learningových kurzov vo vzdelávacom procese, rozhodli sme sa urobiť experiment so študentami denného štúdia. 45 študentov, ktorí si zapisali predmet Logika, množiny, relácie, bolo rozdelených náhodným spôsobom už pri zápise do troch krúžkov. Rozhodli sme sa, že prvý krúžok bude tvoriť kontrolnú skupinu, ktorá sa bude učiť klasickým spôsobom. Študenti kontrolnej skupiny mali k dispozícii tlačene materiály používané pred vytvorením kurzov. Počas semestra mali študenti kontrolnej skupiny 24 kontaktných hodín typu cvičenia s vyučujúcim, kde podrobne prebrali určenú látku. Druhý a tretí krúžok tvorili experimentálnu skupinu. Študenti experimentálnej skupiny mali k dispozícii e-learningové kurzy Logika, Množiny a Relácie v off-line podobe a mali k nim prístup cez LMS v on-line podobe. Väčšinou však používali off-line verzie na CD. Počas semestra mali študenti oboch experimentálnych skupín spoločne 12 kontaktných hodín typu cvičenia s vyučujúcim, kde zrýchleným tempom prebrali určenú látku a vysvetlili si, čo a akým spôsobom je vhodné doštudovať si pomocou kurzov.

Na začiatku experimentu sme neoverovali vstupné vedomosti študentov oboch skupín ani z matematiky, ani z oblasti problematiky preberanej v rámci predmetu Logika, množiny, relácie. Skupiny sme na začiatku považovali za rovnocenné na základe toho, že boli vybrané náhodným výberom, ako aj na základe skúseností z predchádzajúcich ročníkov, kde sme medzi jednotlivými skupinami v rámci ročníka nebadali významné rozdiely.

V polovici semestra študenti kontrolnej aj experimentálnej skupiny písali test z oblastí Logika a Množiny a na konci semestra test z oblasti Binárne relácie. Oba testy boli 50-bodové a celkové hodnotenie predmetu záviselo od súčtu získaných bodov v oboch testoch. Výsledné súčty z testov sú uvedené v tabuľke.

Študent	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Exper. skupina	56	57	59	61	62	64	70	70	71	72	72	75	78	80	80
Študent	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Exper. skupina	83	83	84	86	88	89	89	91	91	93	93	93	94	94	95
Študent	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Kontr. skupina	52	53	55	59	63	67	68	68	73	76	78	81	85	90	92

Tabuľka 1: Výsledky záverečného testu

Z výsledkov vyplýva, že priemerné skóre experimentálnej skupiny je približne 79,1, zatiaľ čo priemerné skóre kontrolnej skupiny je 70,7. Aby sme zistili, nakoľko je tento rozdiel skóre ovplyvnený náhodnými vplyvmi, rozhodli sme sa použiť aj nástroje testovacej štatistiky. Vzhľadom na malý rozsah vzorky, najmä v kontrolnej skupine, sme si nezvolili t-test, ktorý je parametrický, ale rozhodli sme sa použiť U-test (pozri [1]). Postupovali sme nasledovne:

1. Sformulovali sme nulovú a alternatívnu hypotézu.

H_0 : Medzi výsledkami kontrolnej a experimentálnej skupiny nie je významný rozdiel.

H_1 : Medzi výsledkami kontrolnej a experimentálnej skupiny je významný rozdiel.

2. Zvolili sme si pravdepodobnosť omylu $\alpha = 5\%$.

3. Pre každú skupinu sme určili súčet poradí. Zistili sme, že súčet poradí kontrolnej skupiny je $R_1 = 260$. Pomocou vzťahov

$$\mu = \frac{n_1 n_2}{2}, \quad N = n_1 + n_2, \quad \sigma_{kor} = \sqrt{\frac{n_1 n_2}{N(N-1)} \left(\frac{N^3 - N}{12} - \sum_{j=1}^m \frac{t_j^3 - t_j}{12} \right)}, \quad U = R_1 - \frac{n_1(n_1 + 1)}{2}$$

sme vypočítali, že $\mu = 225$, $N = 45$, $\sigma_{kor} \doteq 41,06$, $U = 140$.

Napokon sme podľa vzťahu $u = \left| \frac{U - \mu}{\sigma_{kor}} \right|$ vypočítali, že $u \doteq 2,07$.

4. Z tabuľky sme zistili kritickú hodnotu $u_\alpha = 1,96$.

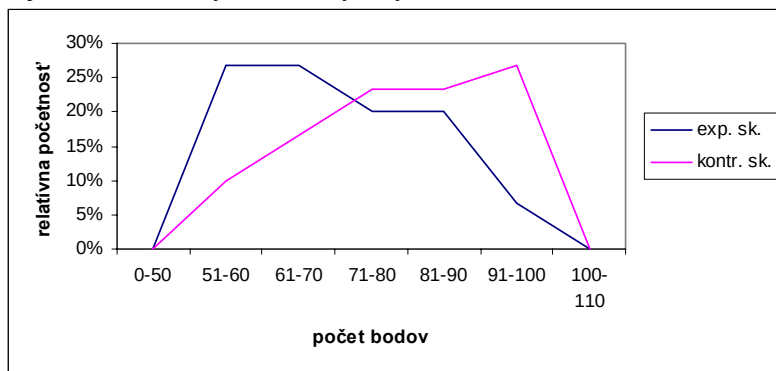
5. Pretože

Ak $u \geq u_\alpha$, nulovú hypotézu sme zamietli. Prijali sme teda alternatívnu hypotézu, že medzi výsledkami kontrolnej a experimentálnej skupiny je významný rozdiel.

Za hlavné prínosy kurzov Logika, Množiny, Relácie považujeme:

1. Ich použitím sa zníži počet kontaktných hodín z 24 na 12, čo v prípade troch krúžkov predstavuje úsporu 60 kontaktných hodín.
2. Napriek zníženiu počtu kontaktných hodín sa výsledky študentov nezhoršia, práve naopak.

- Kurzy predstavujú kvalitný študijný materiál pre externých študentov, ktorí majú iba 8 kontaktných hodín výučby.



Graf č. 1: Polygón početnosti pre výsledky experimentálnej a kontrolnej skupiny

3. Kurz Opisná štatistika

Pozitívne skúsenosti so zavedením e-learningových kurzov z oblasti matematiky do vzdelávacieho procesu nás viedli k tomu, aby sme pripravili kurz zameraný na štatistické metódy, ktoré potrebuje prevažná väčšina našich študentov pri spracovávaní záverečných či diplomových prác. Túto problematiku sme si rozdelili do dvoch častí: opisná štatistika a štatistické testovacie metódy.

Ako prvý sme pripravili kurz „Opisná štatistika“. Tento kurz je primárne určený pre študentov PdF TU vo všetkých študijných programoch. Špeciálne pokrýva časť predmetu „Základy štatistického spracovania údajov“. Nakoľko sa jedná hlavne o študentov, ktorí nie sú špecializovaní na matematiku, prispôbili sme tomu úroveň, obsah i spracovanie kurzu. Kurz sa snaží jednoduchým, pochopiteľným a praktickým spôsobom vysvetliť základné pojmy a prostriedky opisnej štatistiky tak, aby ich študujúci vedeli efektívne použiť pri spracovaní a prezentácii výsledkov v rámci ich záverečných či diplomových prác. V kurze sa snažíme maximálne využiť možnosti programu Excel, ktorý je na vzhľadom na obsah i ciele kurzu úplne postačujúci a nainštalovaný takmer na každom PC (na rozdiel od komerčných štatistických programov). Kurz sa zameriava najmä na ilustráciu pojmov a postupov na veľkom množstve riešených príkladov a úloh.

Kurz sa skladá zo šiestich modulov:

- Základné pojmy.
- Prezentácia údajov formou tabuľky (početnosť, relatívna početnosť, kumulatívna početnosť, intervalové početnosti).
- Grafická prezentácia údajov (histogram, polygón početnosti, kruhový a stĺpcový diagram).
- Stredné hodnoty a miery variability (aritmetický, geometrický a harmonický priemer, modus, medián, kvartily a percentily, variačné rozpätie, priemerná odchýlka, smerodajná odchýlka, rozptyl, Pearsonov variačný koeficient).
- Dvojrozmerné rozdelenia (súvislosť medzi dvoma premennými, korelácia, regresia, korelačný koeficient, regresné priamky).
- Autotest.

Pretože kurz bol vyrobený až koncom roka 2007, nestihli sme ho zatiaľ odskúšať vo vzdelávacom procese. Veríme však, že bude rovnako úspešný ako doteraz vyrobené kurzy.

4. Záver

Modernizácia vzdelávania je veľmi náročná oblasť. Veríme, že aj nami vytvorené kurzy a ich použitie vo vzdelávacom procese budú aspoň malým prínosom k zatraktívneniu vyučovania matematiky pre študentov.

Literatura

1. CLAUSS, G., EBNER, H. *Základy štatistiky pre psychológov, pedagógov a sociológov*. Bratislava: SPN 1998.
2. FULIER, J., MICHALIČKA P. *Informačné a komunikačné technológie vo vzdelávaní v matematike*. Nitra: FPV UKF, 2005, s. 5-15. ISBN 80-8050-925-5
3. HANZEL, P., KLENOVČAN, P. *Distančné vzdelávanie na PF UMB*. In: Inovácie v škole. Zborník z medzinárodnej konferencie. Podbanské 2003, s. 33 – 37. ISBN 80-968664-5-1
4. HÍC, P., POKORNÝ, M. *Kurz Logika*. Sborník príspevků z konference a soutěže eLearning 2007. Hradec Králové: Gaudeamus 2007, s. 68-74. ISBN 978-80-7041-573-3
5. HÍC, P., POKORNÝ, M. *Kurz Množiny*. Sborník príspevků z konference a soutěže eLearning 2007. Hradec Králové: Gaudeamus 2007, s. 75-80. ISBN 978-80-7041-573-3
6. HÍC, P., POKORNÝ, M. *Skúsenosti s e-learningom pri príprave budúcich učiteľov ZŠ*. Acta Universitatis Palackianae Olomucensis, Facultas Paedagogica 2006, Mathematica V. Olomouc: 2006, s. 87-91. ISBN 80-244-1311-6
7. HORVÁTH, R., MIŠÚT, M. *The New Improvements of E-leaning System at Trnava University*. In: ICETA 2005 – 4nd International Conference on Emerging Telecommunications Technologies and Applications. Košice: 2005, s.157-160, ISBN 80-8086-016-6
8. ŽILKOVÁ, K.: *Technológia zdieľania súborov v sieti a jej aplikácie vo vyučovaní elementárnej matematiky*. In: Matematika V - Elektronické médiá vo vyučovaní matematiky. Bratislava: UK, 2007, 115 s. ISBN 978-80-223-2367-3.
9. ŽILKOVÁ, K.: *Dynamika obrazovej informácie v matematike*. In: Didactic Conference in Žilina with international participation Didza. Žilina: Fakulta prírodných vied ŽU, 2007. ISBN 978-80-8070-688-3.

Tento článok vznikol vďaka podpore grantu KEGA 3/4149/06.

Kontaktná adresa

doc. RNDr. Pavel Híc, CSc.

Katedra matematiky a informatiky, Pedagogická fakulta, Trnavská univerzita

Priemyselná 4, P.O.BOX 9, 918 43 Trnava, Slovenská republika

Telefon: +421 33 5514618

E-mail: phic@truni.sk

PaedDr. Milan Pokorný, PhD.

Katedra matematiky a informatiky, Pedagogická fakulta, Trnavská univerzita

Priemyselná 4, P.O.BOX 9, 918 43 Trnava, Slovenská republika

Telefon: +421 33 5514 618

E-mail: mpokorny@truni.sk

ANALÝZA VÝSLEDKŮ INTEGRACE ENVIRONMENTÁLNÍ VÝCHOVY DO VYUČOVÁNÍ MATEMATIKY NA 1. STUPNI ZŠ

Drahomira HOLUBOVÁ

Abstrakt

Příspěvek pohlédne do problematiky školních vzdělávacích programů a vyhodnotí, jak lze průřezové téma „Environmentální výchova“ vhodným způsobem začlenit do vyučování matematiky.

OUTCOME ANALYSIS OF INTEGRATION OF ENVIRONMENTAL STUDIES INTO MATHS LESSONS AT 1-ST LEVEL OF PRIMARY SCHOOL

Abstract

The article deals with issue of school educative programmes and gives guidance of how „Environmental studies“ multidisciplinary subject can be integrated into maths lessons in a suitable way.

1. Úvod

Jeden z hlavních cílů vyučování matematice je naučit žáky využívat teoretické poznatky v praktickém životě. To znamená, že již v MŠ a dále pak na ZŠ je potřeba vytvářet a navozovat s dětmi v matematice takové (modelové) situace, které ukazují pravdivě odraz našeho životního prostředí, jeho ekologické problémy a naznačují možná řešení matematickými prostředky v reálných situacích.

Protože RVP ZV, který na ZŠ platí od roku 2007 a současní studenti a budoucí učitelé již podle schváleného RVP ZV začnou učit, předpokládá, že se ve školách bude více času věnovat environmentální výchově, řešení aktuálních problémových otázek současného ekologického světa nejen v samostatných předmětech ekologie, ale i v rámci jednotlivých vyučovacích předmětů (tzn. také v matematice).

2. Analýza výzkumu

Obrátili jsme se na několik škol v celé České republice. Na dotazník odpovědělo celkem 89 učitelů, z toho 8 mužů a 81 žen ze 34 škol.

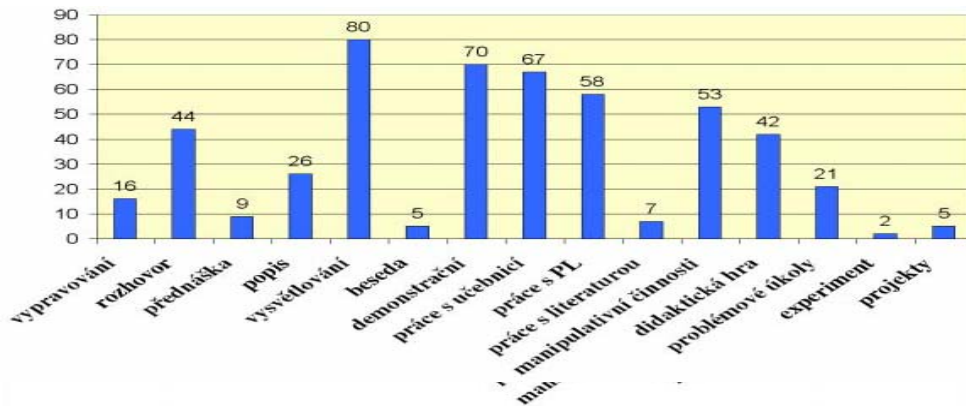
Podle odpovědí v dotazníku ve vyučování matematiky učitelé nejčastěji preferují metodu slovní - vysvětlování (80), metodu demonstrační (70), metodu práce s textem - s učebnicí (67), s pracovními listy (58) a metody manipulativní (53). Občas využívají téměř všechny metody, zvláště pak metody heuristického charakteru - problémové úkoly (61), projekty (46), metody práce s textem (55) a metodu slovní - popis (47). Téměř vůbec nebo jen zřídka používají slovní metody - vypravování, přednášku a besedu. Z dotazníků vyplynulo, že se nijak neliší preference

různých metod u učitelů, kteří působí ve venkovské nebo městské škole, malé či velké škole. Nerozhoduje ani délka praxe učitelů. Tabulka č. 1 zobrazuje, které metody výuky v matematice učitelé používají velmi často, občas, zřídka nebo nikdy. Graf č. 1 znázorňuje, které metody výuky v matematice používají učitelé nejčastěji a graf č. 2, které metody výuky používají občas.

Tabulka č. 1

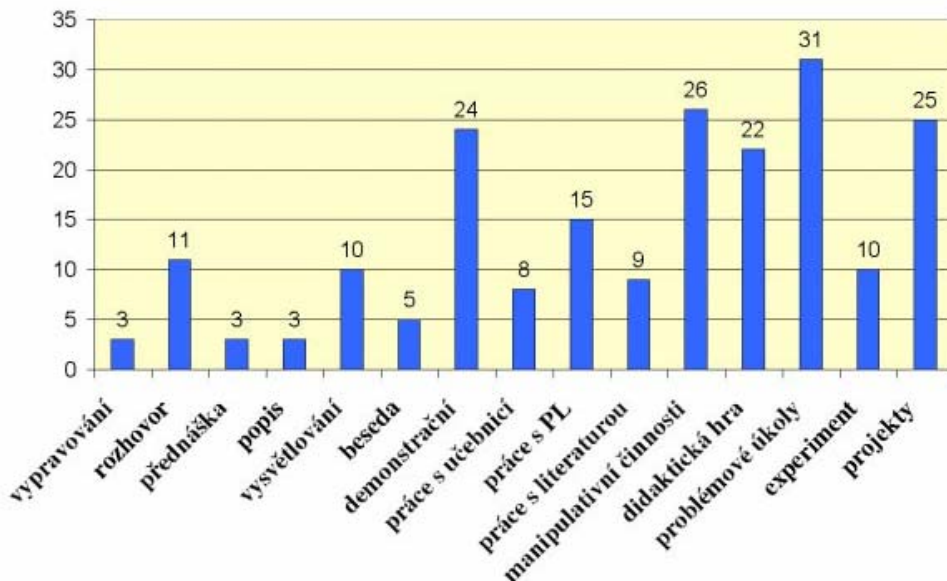
metody	velmi často	občas	zřídka	nikdy
vypravování	16	35	34	3
rozhovor	44	35	9	0
přednáška	9	28	26	21
popis	26	47	10	3
vysvětlování	80	8	0	0
beseda	5	38	26	11
demonstrační	70	14	3	0
práce s učebnicí	67	17	2	0
práce s PL	58	26	4	0
práce s literaturou	7	55	25	0
manipulativní činnosti	53	29	3	0
didaktická hra	42	38	5	0
problémové úkoly	21	61	5	0
experiment	2	42	39	3
projekty	5	46	29	5

Graf č. 1: metody výuky v matematice používané nejčastěji



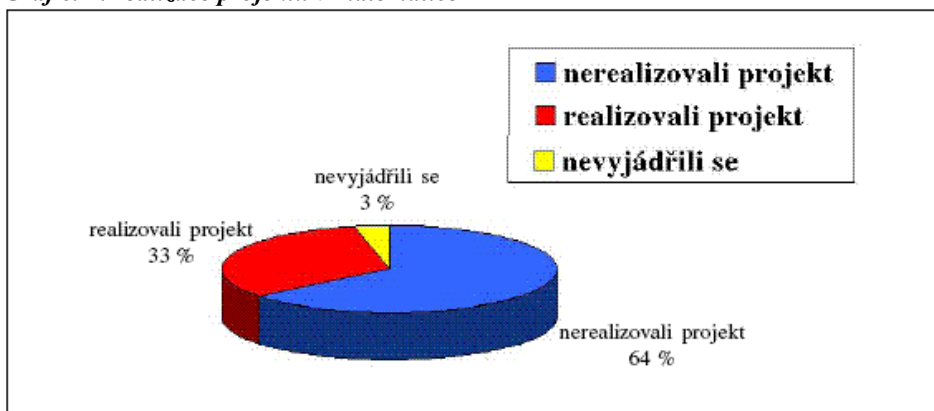
Za nejpřínosnější metodu z hlediska individuálního rozvoje žáka učitelé považují problémové úkoly (31), manipulativní činnosti (26), projekty (25), demonstrační metody (24) a didaktické hry (22). Přehled nejpřínosnějších metod znázorňuje graf č. 3.

Graf č. 3: nejpřínosnější metody z hlediska individuálního rozvoje žáka

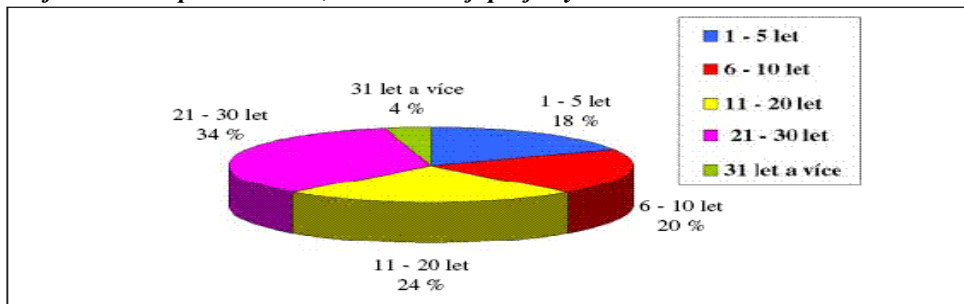


Ve vyučování matematiky realizovalo projekt na libovolné téma celkem 57 učitelů z 89, tj. 64 % všech dotázaných. 29 učitelů (33 %) se o projekt v matematice nikdy nepokoušelo, 3 učitelé (3 %) se k této otázce nevyjádřili (viz graf č. 4). Nejvíce učitelů, kteří používají v matematice projektovou metodu mají délku praxe v rozmezí od 21 do 30 let, nejméně praktikují projekty učitelé s praxí 31 a více let (viz graf č. 5).

Graf č. 4: realizace projektů v matematice

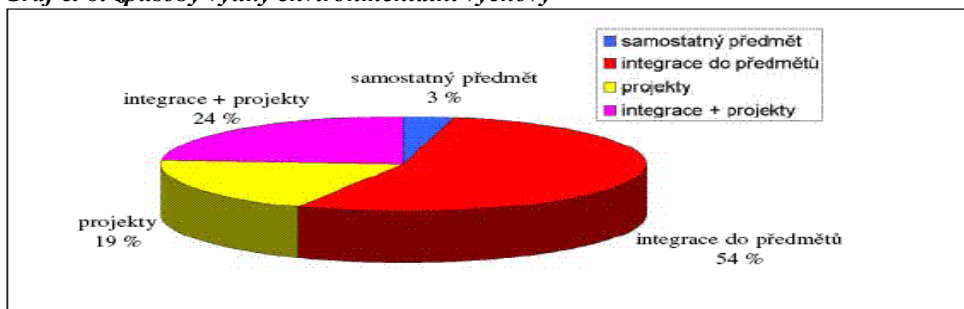


Graf č. 5: délka praxe učitelů, kteří realizují projekty v matematice

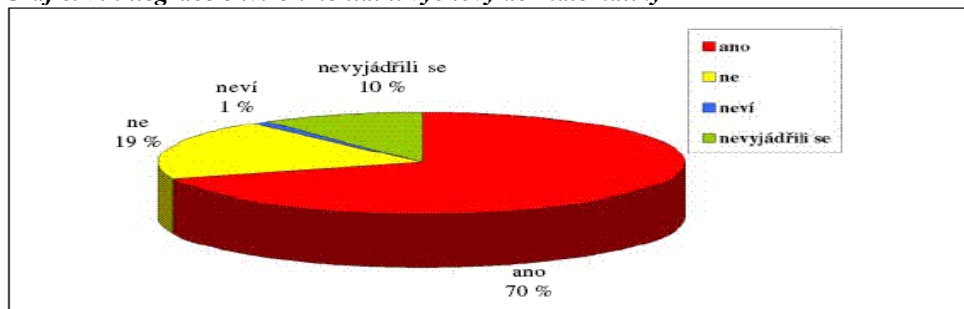


Kterému způsobu vyučování průřezového tématu „Environmentální výchova“ dávají učitelé přednost ukazuje graf č. 6. Z průzkumu vyplynulo, že nejsou výraznější rozdíly mezi malými a velkými školami, ani mezi městskými nebo venkovskými školami. Graf č. 7 znázorňuje, že většina učitelů považuje za přínosné integrovat environmentální výchovu do výuky matematiky. A to z těchto důvodů: učení je propojeno s reálným životem, prakticky ověřuje některé poznatky, řeší se problém, který se dítěte bezprostředně týká, žáci spojují poznatky do souvislostí, environmentální výchova poskytuje zajímavá témata pro matematické úkoly, matematika, stejně jako environmentální výchova je součástí života, slovní úlohy s ekologickou tematikou mohou svými přesnými výpočty přesvědčit o smyslu ekologického chování, objevil se i názor, že bez matematiky nelze ekologické problémy řešit.

Graf č. 6: způsoby výuky environmentální výchovy



Graf č. 7: integrace environmentální výchovy do matematiky



Projekty v matematice zaměřené na environmentální výchovu si alespoň jednou vyzkoušelo 23 učitelů ze všech respondentů dotazníku. Projekty realizují většinou ve 4. nebo 5. ročníku na tato témata: Voda, Ekosystémy, Ochrana životního prostředí, Čistota ovzduší, Kácení deštných pralesů, Doprava, Šetříme elektrickou energii, Odpad, Třídění odpadků atd. Ani jeden projekt nebyl realizován v 1. ročníku ZŠ.

Většina respondentů uvádí, že i když je příprava projektů časově velmi náročná, je projektová metoda pro žáky atraktivní, zajímavá, poučná a přínosná. Žáky projekty baví, berou ji jako zájmovou aktivitu, přistupují k ní zodpovědněji, učí se rychleji, pamatují si více, mají zážitky. To vše stojí za to, projekty připravovat a realizovat je.

3. Projekty s ekologickou tematikou

Nově formulované úkoly vzdělávání pro 21. století kladou důraz na rozvíjení všech stránek osobnosti tak, aby žáci lépe porozuměli světu, v němž žijí, získali znalosti a dovednosti důležité pro život v rychle se měnícím světě. Umožňují zavádět do vyučování matematiky různé nové formy, především projektovou výuku.

Důležitým požadavkem environmentální výchovy v matematice je propojení rozptýlených poznatků a utváření integrovaného pohledu na danou problematiku. Matematika by měla poskytovat žákům jednoduché a názorné prostředky k popisu kvantitativních stránek světa, jak ho poznávají v běžném životě i v ostatních vyučovacích předmětech. Učí samostatně pozorovat a popisovat okolní prostředí, vztahy lidí k prostředí, získávat a třídit informace týkající se ekologické problematiky, získané poznatky kriticky zvažovat v jejich souvislostech, domýšlet možné důsledky různých lidských aktivit (pozitivních i negativních), nápaditostí a tvořivostí podněcuje zájem o způsoby řešení ekologických problémů. Matematika tak vede žáky k tomu, aby se aktivně podíleli na ochraně životního prostředí.

Literatura

1. GAVORA, P.: *Úvod do pedagogického výzkumu*. Brno: Paido, 2000, 207 s.
2. HOLUBOVÁ, D.: *Environmentální výchova ve vyučování matematice*. 1. vydání, Brno: MU v Brně, 2004, 66 s.
3. Ministerstvo životního prostředí ČR: *Statistická ročenka životního prostředí České republiky 2006*. 1. vydání, Praha: MŽP ČR, 2006, 541 s.
4. *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*. Praha: Výzkumný ústav pedagogický, 2004, 113 s.

Kontaktní adresa

RNDr. Mgr. Drahomíra Holubová
Katedra matematiky Pedagogické fakulty MU v Brně
Poříčí 31, Brno, 603 00, ČR
Telefon: + 420 549 491 670
E-mail: drahol@mail.muni.cz

SMASH ANEB HLEDÁNÍ MOSTŮ MEZI ŠKOLOU A RODINOU

Antonín Jančařík, Kateřina Jančaříková

Abstrakt

Téma spolupráce rodiny a školy nabývá spolu se vzrůstajícími nároky na žáky v moderní společnosti na důležitosti. Mnozí rodiče mají zájem svým dětem pomáhat a nevědí jak, na druhé straně učitelé nevědí, jak pomoc rodičů efektivně využívat. Příspěvek mapuje základní metody, kterými se mohou rodiče na vzdělávání svých dětí v součinnosti se školou podílet. Článek představuje projekt SMASH (Support Math And Science at Home), na kterém spolupracují partnerské organizace z Kypru, Řecka, Španělska, České republiky a Skotska. Cílem tohoto projektu je pomoc rodičům podporovat jejich děti v matematice a v přírodních vědách.

SMASH OR BRIDGING THE GAP BETWEEN SCHOOL AND FAMILY

Abstract

With an increase in the demands on the pupils, the importance of cooperation between the school and the family increases. Many parents want to help their children, but don't know how; many teachers don't know how to utilize the parents' help. This paper maps the basic methods involving parents in their children's education: homework help, revising work, pre-learning, broadening the covered skills and general motivation. The paper introduces the SMASH (Support Math And Science at Home), an international project of agencies from Cyprus, Greece, Spain, Czech Republic and Scotland. The aim of this project is to help parents support their children in mathematics and science.

1. Úvod

V České republice mají všechny děti ústavně zaručené právo na vzdělávání. Toto právo je realizované prostřednictvím povinné školní docházky. Když odmyslíme zhruba od tři sta padesáti dětí, které jsou vzdělávány v rámci domácího vzdělávání a několika desítek dalších dětí, které nemohou školu navštěvovat z nejrůznějších důvodů a jejich výuka je realizována prostřednictvím individuálních vzdělávacích plánů, všechny děti navštěvují školu. Škola je institucí, která by měla dětem zprostředkovat vzdělávání.

Dítě se ovšem nezačíná vzdělávat v šesti (resp. sedmi) letech, tedy tehdy, když mu začíná povinná školní docházka, také s ukončením povinné školní docházky (doufejme) vzdělávání nekončí. Dítě se vzdělává a rozvíjí od narození a těmi, kdo tento proces na prvním místě ovlivňují, jsou jeho rodiče. Rodiče zprostředkovávají dítěti první informace o světě a vědomě či nevědomě dítěti předávají svoje znalosti, zkušenosti, dovednosti a postoje. Role rodičů se nástupem do školy nemění. Postupně se škola stává stále významnějším kanálem, kterým k dítěti proudí informace. Ale na poli formování

postojů a zkušeností resp. zprostředkování zážitků mají ale i ve vyšším školním věku větší vliv rodiče a prarodiče (citace Jančaříková, 2008).

Vzhledem k nezastupitelné roli rodiny v procesu osobnostního formování a vzdělávání dítěte je vhodné, aby škola a rodiče spolupracovali, a to v maximální možné míře. Tato spolupráce klade na učitele zvýšené nároky. A tématu „jak spolupracovat s rodiči“ není v pregraduální přípravě učitelů bohužel věnována dostatečná pozornost. Didaktika je často, především v učebních textech, vztahována především k potřebám školních institucí (srovnej např. Skalková 2007). Hledání cest, jak zapojit rodiče do vzdělávání dětí, je tak otevřeným tématem, které stále nabývá na důležitosti.

2. Project SMASH

Jedním z projektů, které se této problematice věnují, je program SMASH (Support Math And Science at Home). Na tomto projektu spolupracují partnerské organizace z Kypru, Řecka, Španělska, České republiky a Skotska. Cílem projektu je pomoc rodičům podporovat jejich děti v matematice a přírodních vědách (Helping Parents to Help Their Children Excel in Math and Science). Tato podpora bude realizovaná jednak tvorbou materiálů pro rodiče a také přípravou lektorů, kteří se budou podpoře rodičů věnovat. Tito lektori (Parent Trainers) se v partnerských zemích formují jak z řad učitelů, tak z řad rodičů a specialistů na jednotlivé obory.

V České republice máme velice zajímavou zkušenost se zapojováním rodičů do vzdělávacího procesu. Mezi rodiči, kteří vzdělávali své děti doma, byl totiž zaznamenán trend podpory reformního dění ve školství. Někteří z těchto rodičů začali pracovat jako metodici domácího vzdělávání na školách, mnozí se podílí na organizaci seminářů pro rodiče v rámci Asociace pro domácí vzdělávání nebo RWCT, kurzů Montessori nebo Respektovat a být respektován. (Jančaříková, 2007). Angažovanost rodičů do procesu vzdělávání zaznamenává i zahraniční studie (Ray, 2005/2006) a jiné.

3. Jak se mohou rodiče do procesu vzdělávání svých dětí zapojit?

Existují tři základní způsoby zapojení rodičů do vzdělávání dětí, které plní povinou školní docházku. Jedná se o

1. pomoc s domácími úkoly
2. doučování
3. „předučování“
4. rozšiřování probíraného učiva
5. tvorbu podnětného prostředí.

Pokusíme se tyto základní způsoby podpory dětí blíže popsat. Hranice mezi jednotlivými způsoby podpory nemusí a v mnoha případech ani není jasně vymezena. V mnoha případech rodiče volí kombinaci dvou nebo i všech tří způsobů, kterými mohou své děti podporovat.

3.1. Pomoc s domácími úkoly

Patrně nejrozšířenější formou rodičovské pomoci je právě pomoc s domácími úkoly. Domácí úkoly zadává učitel v kontextu probírané látky a jejich vypracování je povinné nebo minimálně žádoucí.

Málokteré dítě si se všemi domácími úkoly poradí samo. Potřebuje obvykle jak podporu organizační (aby na úkol nezapomnělo, resp. aby na nich pracovalo ve vhodnou dobu), odbornou (poradit s vypracováním úkolu) i formální (úprava úkolu).

Kompetentní učitel domácími úkoly děti nepřetěžuje, zadává je po zralé úvaze tak, aby rodiče přiměřeně zapojoval do procesu vzdělávání.

Kompetentní rodič by měl využívat příležitost domácích úkolů k rozvoji svého dítěte (učit ho samostatnosti, organizaci práce, apod.) a také ke kontrole toho, jestli dítě zvládá ve škole probíranou látku.

Nezvládnutí práce na domácím úkolu upozorňuje na potřebu doučování.

3.2. Doučování

Pod pojmem „doučování“ rozumíme aktivity, které směřují ke zvládnutí učiva probíraného ve škole. Rodič (nebo rodičem najatá osoba) se žákem znovu probírá stejnou látku jako učitel ve škole. Do doučování zařazujeme i přezkušování z probírané látky a zadávání doplňujících úloh k procvičování. K doučování obvykle dochází v reakci na problém (špatnou známku). Skutečnost, že jsou k doučování (rodič i dítě) obvykle školním neúspěchem nebo neúspěchy donuceni, působí na domácí vzdělávací proces negativně. Proto by mělo být prvním krokem při doučování „zpracování školního neúspěchu“.

Při doučování obvykle rodič výklad intuitivně přizpůsobuje individualitě svého dítěte (postupuje ideálním tempem, využívá jeho tzv. learning style, aj. pokrokových metod).

Nevýhodou doučování je, že probíhá obvykle v odpoledních a večerních hodinách, kdy jsou dítě i rodič již unavení a že obvykle probíhá pod tlakem (nutnost opravit známku, připravit na písemku, zvládnut domácí úkol).

Doučování je patrně druhou nejčastější metodou, kterou rodiče pro podporu svých dětí volí.

Kompetentní učitel věnuje pozornost i procesu doučování, dohlédne na to, aby doučování nezabíralo veškerý volný čas žáka, doporučí metody, povzbudí a ocení snahu žáka i rodiče.

Kompetentní rodič doučování naplánuje tak, aby žák nebyl přetížen, pokusí se navázat efektivní spolupráci s učitelem (např. si založí „doučovací portfolio“, aby učiteli doložil domácí práci navíc) a v případě, že žákovi problémy jsou trvalé, vyhledá odbornou pomoc (pracovníka pedagogicko-psychologické poradny) a zváží např. další řešení (přechod na lehčí typ školy).

3.3. Předučování

Pod tímto pojmem rozumíme doučování v předstihu. Rodič probírá učivo doma s dítětem o vyučovací hodinu nebo o několik vyučovacích hodin dříve, než tutéž látku probírá učitel ve škole. K předučování dochází v rodinách, ve kterých rodiče o děti dbají a ve kterých se rodiče obávají o školní úspěch svých dětí (např. adoptivní rodina, ve které rodiče s vysokou inteligencí adoptovali dítě průměrné, nebo pečující rodina s dítětem se specifickými poruchami učení).

Dítě předučované při výkladu s učitelem spolupracuje a buduje si tak kladné nálepky („ten je chytrý“, „má dobré nápady“ apod.). Předučované dítě je učitelem lépe hodnoceno, než dítě doučované. A lze očekávat, že je vyšší i jeho sebehodnocení.

Předučování je tedy vždy výhodnější, než doučování, ale vyžaduje vyšší „pracovní morálku“ rodičů i dítěte.

Stejně jako při doučování, používá v předučování rodič výklad přizpůsobený individuálním potřebám svého dítěte. Při předučování se dítě (ani rodič) nemusí vyrovnávat s traumatem z neúspěchu (špatné známky).

Učitel o předučování obvykle neví, protože rodiče z pochopitelných důvodů, ho o tomto procesu neinformují. Předučování, ačkoli může konkrétnímu dítěti pomoci, nemůžeme chápat pozitivně, protože zasahuje do procesu výkladu (ostatní žáci jsou znevýhodněni nebo dokonce rušeni). Kompetentní učitel, pokud se o pravidelném

předučování dozví, by měl vyvinout snahu, aby jednak zbavil rodiče strachu z případného „neúspěchu“ žáka, vysvětlil jim nevýhody tohoto počínání (žák slyší výklad dvakrát, ztrácí čas) a dále je motivovat k tomu, aby domácí pedagogický proces vhodně modifikovali.

3.4. Rozšiřování probíraného studia

Pečující rodiče, kteří nejsou okolnostmi nuceni řešit aktuální školní problémy (doučování), mohou ve škole probírané učivo rozšiřovat. Rozšiřování nebo obohacování učiva (enrichment) je jednou z doporučených metod pro práci s nadanými dětmi (např. Holligworthová, 1942). Rozšiřování učiva poskytuje značnou volnost ve výběru témat (využívá se zájmu dítěte i rodiče), umožňuje věnovat se některému tématu do hloubky.

Rozšiřování učiva obvykle neprobíhá jen v domácnosti, u stolu, ale v divadle, koncertní síni, muzeu, skanzenu, ve vysokoškolské laboratoři, botanické či zoologické zahradě.

Jednou z forem rozšiřování učiva jsou některé mimoškolní aktivity (výtvarné, taneční a hudební obory Základních uměleckých škol, Sněm dětí ČR pro životní prostředí, atd.).

Teoreticky by bylo ideální obohacovat učivo všem žákům, v praxi je ale obohacování učiva poskytováno obvykle jen nadaným žákům s pečujícími a vzdělanými rodiči.

Kompetentní učitel doporučí rodičům jak obohacovat učivo konkrétnímu žákovi (doporučí literaturu, metody, zájmové útvary, exkurze atd.). Kompetentní učitel zve do své třídy odborníky z různých oborů (často z řad rodičů), aby umožnil žákům setkat se s experty z různých profesí. Nejedná se ovšem jen o profese akademické, ale i o profese dělnické a řemeslnické, např. umělecký kovář, řezbář apod. (srov. Gardner, 1993).

Kompetentní rodič přemýšlí o tom, jak zábavnou a nenásilnou formou obohatit probírané učivo a v tomto kontextu plánuje společný volný čas. Rodiče nadaných dětí, kteří o obohacování učiva svých dětí usilují, se sdružují v různých klubech a sdruženích (např. ECHA), které jim umožňují výměnu zkušeností a získání inspirace. Pro většinu rodičů je ale metoda obohacování učiva z mnoha důvodů příliš náročná a proto k ní, pokud vůbec, přistupují nesystematicky.

3.5. Tvorba podnětného prostředí

Mnohem jednodušší a také velice efektivní metodou je tzv. informální vzdělávání nebo výchova prostředím (např. Holt, 1989).

Dítě se v přírodním (dostatečně podnětném, vlídném, sofistikovaném) prostředí vychovává a vzdělává „samo“. Holt (2003) např. popisuje, autentickou zkušenost, jak využíval pro výuku fyziky rovnoramenné váhy. Po několika letech dospěl k závěru, že nejefektivnější didaktickou metodou je, nechat váhy dětem, aby si s „nimi pohrály“ a odejít ze třídy. Žáci, kterým tuto možnost poskytl, nejlépe formulovali zákonitosti ohledně délky ramene a hmotnosti tělesa.

Marie Montessori založila svou úspěšnou metodu také na vytvoření podnětného prostředí. Kromě prostředí do vzdělávacího procesu přispívá také „svoboda“ dítěte – možnost vybrat si z nabízených aktivit, postupovat vlastním tempem, kontrolovat sám sebe, nebýt srovnávám s ostatními apod. Do krajnosti rozvádí tyto myšlenky tzv. postpedagogika (např. Schoenebeck, 1997), která vychází z antipedagogiky Ekharda von Braunmühla (1975). Podnětné prostředí by mělo děti provázet od jejich narození až do dospělosti. Ale ví rodiče, jaké podněty potřebují jejich dospívající děti? Mají na pořízení těchto podnětů (jednoduché stroje, laboratoře apod.) prostředky?

Kompetentní učitel by měl umět rodičům poradit, jak upravit domácí prostředí resp., kam děti vzít na návštěvu či exkurzi. Školy by měly rodinám nákladnější pomůcky, sbírky půjčovat.

Kompetentní rodiče budou sledovat školní látku a ve svém domově a v jeho okolí vhodně rozmísťovat příhodné předměty (lupy, mikroskopy, barvy, výtvarné potřeby, nástroje a materiály, metry, váhy, závaží, odměrky, zkumavky, roztoky, apod.). Kompetentní rodiče využívají vhodným způsobem všední každodenní činnosti (nákup, vaření, pečení, vyplňování daňového přiznání) k nenápadnému opakování učiva.

4. Závěr

Spolupráce školy, rodičů a dětí na společné cestě ke vzdělání je téma nové, avšak velmi aktuální. Projekt SMASH, který se této problematice věnuje, je zatím na samém počátku. V současné době probíhá mapování potřeb rodičů a metodiků. V průběhu dvou let očekáváme vytvoření podpůrných a výukových materiálů, které budou nabízeny jak volně přes internet, tak i v rámci speciálních kurzů v rámci projektu Grundtvig.

Literatura

1. GARDNER, H. *Multiple Intelligences : The theory in Practise*. USA, New Yourk : Basic books, 1993. 304s. ISBN 0-465-01822-X.
2. HOLT, J. *Proč děti neprospívají*. Volary : Stehlik, 2003. 2. vyd. Přeložil Jiří Tůma. Ilustrovaly děti z domácího vzdělávání. 207s . ISBN 80-902707-6-X.
3. HOLLIGWORTHOVÁ, L. S. *Children above 180 IQ : Standart-Binet-origin and development*. New Yourk : World Book, 1942.
4. HOLT, J. *Teach your own*. New York : Dell publishing, 1989.
5. JANČAŘÍKOVÁ, K. *Domácí vzdělávání v kontextu reformy českého školství*. in Učiteléské listy : Česká škola. (Převzatá seminární práce zveřejněná dříve na www.pdf.cuni.cz). Dostupné na World Wide Web: <http://ucitelske-listy.ceskaskola.cz/Ucitelskelisty/Ar.asp?ARI=102655&CAI=2149.>>
6. JANČAŘÍKOVÁ, K. *Role učitele a rodičů při realizaci nekognitivních cílů environmentální výchovy žáků základní školy*. Sborník mezinárodní konference „Cesty demokracie vo výchove a vzdelávaní“, 2008 (v tisku).
7. RAY, B. D. *Worldwide guide to homeschooling : facts and stats on the benifit of homeschool*. Nashville, Tennessee : Brodman&Homan Publishers, 2005/2006. ISBN 080542610-8.
8. SCHOENEBECK, H. *Život s dětmi bez výchovy*. Vyd. 1. Pardubice : Univerzita Pardubice, 1997. 20 s. ISBN 80-7194-107-7.
9. SKALKOVÁ, J. *Obecná didaktika*, Praha : Grada, 2007, ISBN 80-247-0815-9.

Příspěvek byl vypracován s podporou projektu 134262-CY-GRUNDTVIG-GMP.

Kontaktní adresa

RNDr. Antonín Jančařík, Ph.D.
Univerzita Karlova v Praze
Pedagogická fakulta
M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1
Telefon: +420 221 900 252
E-mail: Antonin.Jancarik@pdf.cuni.cz

Mgr. Kateřina Jančaříková
Univerzita Karlova v Praze
Pedagogická fakulta
M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1
Telefon: +420 221 900 252
E-mail: mailto:jancarikova@post.cz

VNÍMÁNÍ A VYJADŘOVÁNÍ KVANTITY U 5 – 7 LETÝCH DĚTÍ

Michaela KASLOVÁ

Abstrakt

Kvantita je tradičně spojována s použitím čísla. Jak vnímají a vyjadřují kvantitu děti, žáci v různých kontextech? Závisí zpřesňování informací o kvantitě pouze na zrání dítěte? Které nástroje používá dítě k vyjádření kvantity vnímaných objektů?

HOW DO FROM 5 TO 7 YEARS OLD CHILDREN PERCEAVE AND EXPRESSE QUANTITY

Abstract

Quantity is expressed traditionally by numbers. How is the quantity perceived and expressed by children? Does the specification of quantitativ informations depends only on child evolution? Which instruments are used by children to express the quantity of object?

Motto: *Problémy, které vznikají špatným chápáním našich řečových forem, mají charakter něčeho hlubšího. Jsou to hluboce zneklidňující problémy.* L. Wittgenstein (14, s.64)

1. Úvod

Počátek devadesátých let minulého století přinesl řadu informací nejen o tom, jak dítě chápe číslo při vstupu do školy, ale i jak pojem variuje a jak u dítěte dále pojmotvorný proces dozrává. Číslo zde bylo prezentováno jako kategorie, která může nabývat jak významu kvantity, tak může zaujímat role jiné.

Podívejme se na **vyjadřování kvantity** pod jiným úhlem. Z jazykového hlediska je jedna určitá kvantita vyjádřena slovně v rámci mluvy určitou číslovkou nebo skupinou určitých číslovek, ke kterým obecně lze řadit i pí, a dle kontextu za určitých podmínek i písmena např. a, x, případně i uspořádané entice tiskacích písmen $C + C = AB$, kde písmena zastupují číslice (11), graficky číslicí/emí, či jinou reprezentací. Jednotlivé způsoby jsou za určitých podmínek vzájemně zaměnitelné: jeden znak v rámci určitého komunikačního kódu je nahrazen znakem jiným náležícím jiné kódové komunikační soustavě. Tato zaměnitelnost je součástí kapitoly Numerace při poznávání každého nového číselného oboru, tedy jde o proces, který se během školní docházky opakuje. Komunikace dítěte na počátku školní docházky je postupně obohacována a přechází především z gestického nebo orálního kódu do kódu grafického (ikonického nebo matematické symboliky). Tato situace je prezentována jako transfer dětské zkušenosti do písemného jazyka matematiky. Jaká je však zkušenost dítěte s vyjadřováním kvantity z období před vstupem do školy? Jak je na takovou situaci připraven učitel?

2. Vyjádření kvantity

Numeralia slouží jako druh vyjadřující kvantovost, a to buď počítanou, určitou, vyjádřenou čísly, nebo nepočítanou, neurčitou, čísly nevyjádřenou (1, s. 301). Aplikujeme-li v souladu i s didaktickými materiály tuto definici, zdá se, že jinak než číslovkou určitou kvantitu vyjádřit nelze. I další jazykové materiály uvádějí, že **kvantitu** lze slovně vyjádřit **číslovkou určitou**: zpravidla základní, řidčeji násobnou (chápeme-li sdělení typu „třikrát si dřepl“ jako ekvivalent „udělal tři dřepy“), nebo **neurčitou** (mnoho, málo, několik), i jinými slovy hromada, fůra, moře, (1, s.302).

Je-li **číslovka určitá** ve spojení se jménem (podstatným, zájmenem, případně slovesem), které má význam počítané jednotky, mluvíme o **počtu** (kusů, dějů, jednotek měření). Avšak **určitou kvantitu**, která není vyjádřena číslovkou, přestože je ekvivalentem použití určité číslovky, lze vyjádřit **i jinak**; např. jednotným číslem slovesným nebo jmenným (singulár jde, kolečko – ekvivalent jeden), nebo duálem (pohyboval rukama, koulel očima- ekvivalent dvou) či specifickými slovy /souslovími jako např. sám, střed, král, vítěz zpravidla spojená s určitou jedinečnou rolí (ekvivalent jedné), pár lyží, manželé Novákoví, dvojčata (ekvivalent dvou) a podobně (podrobněji Kaslová 5, 6, 7). Zvláštní pozici mají následující slova: a) číslovka oba (dva ze dvou) – jako ekvivalent dvou, b) zájmena záporná nikdo, žádný a vazba ani jeden (určující, jaká je to část z nám známého, určeného definičního oboru), tedy slova, která se pojí se slovesem se záporkou, mají v daném kontextu význam nuly, c) podstatná jména jako trojice, kvartet jsou rovněž nositeli kvantitativního významu, d) opakováním jmen (podstatných jmen, zájmen, citoslovcí) se i v naší kultuře dá vyjádřit kvantita (je tu krabice a zase krabice, půjdeš ty, ty a ty; a zajíček hop-hop, ozvalo se píp a podobně). Zde má opakování slova roli reprezentace čísla.

Kvantitu lze vyjádřit i **neurčitě**, pak mluvíme o **množství**. Například vyjádření neurčité kvantity bývá tradičně spojováno s neurčitou číslovkou hodně, málo, avšak lze ji vyjádřit i jinak: u sloves nebo jmen množným číslem (děti zpívaly – byly nejméně dvě). Obdobou slova oba, kdy je množství vztahováno k definičnímu oboru, jsou zájmena všichni, každý (z nám známých, určených). Zde se slovo pojí se slovesem bez záporky. I pokud je definiční obor znám, ještě to nezaručuje, že je v představě kvantita uložena přesně, určitě. Užití určité číslovky nezaručuje nutně určité vyjádření kvantity, lze ji vyjádřit i neurčitou kvantitou, záleží na kontextu, například: sto chutí, miliony korálků, miliardy komárů. Specifické postavení má číslovka tři, která nemusí vždy znamenat přesně tři, či dokonce magické tři, avšak přeneseně hodně daleko (šel přes tři hory a přes tři řeky). Z výše uvedeného plyne, že situace je poněkud složitější, než jak se prezentuje učitelům vyjádření kvantity v orální komunikaci. Studium jazyka, pohádek pro předškolní děti a sondy, ve kterých se vyjadřování kvantity přímo, či necíleně sledovalo, ukázaly na nutnost se tímto problémem systematictěji zabývat.

3. Kvantita a komunikace

3.1 Vnímání kvantity

Vnímání kvantity může být na úrovni, podle našich pozorování, a) spíše emocionální – ovládané potřebami, přáními dítěte, b) více racionální – podněcované úkoly, sociálním kontextem. Nesouhlasíme zde s některými americkými psychology, kteří tvrdí, že dítě již v období batolecím počítá (překlad Koukolík), avšak souhlasíme s tím, že dítě kvantitu a její změny vnímá a reaguje na ně adekvátně svému vývoji. Souhlasíme s tím, že pojmotvorný proces u pojmu přirozené číslo startuje poměrně brzy, tedy před nástupem dítěte do školy (např. 2, 5, 13), na druhé straně (5) dlouhodobé sledování dětí od jejich 2 či 3 let po 15 či 20 let věku ukazuje, že je rozdíl

mezi úrovní pochopení čísla (do 5 či 10) a tím, jak je dítě v mluvě dospělého registruje (8) a jak je užívá v ústní komunikaci. Nedomníváme se, že by při vnímání kvantity a při zpracování vjemů nebo představ muselo jít vždy o vnímání určité kvantity, pro což hovoří jednak gestalt vnímání, kontext, rozlišovací schopnosti, jednak i podnětnost komunikačního prostředí (viz Bc a D práce).

3.2 Sledování komunikace

Jak se promítá vnímání kvantity do komunikace? Kvantitu je možno v rámci komunikačních kódů vyjádřit nejen ústně (oral code), nebo gestickým či kinetickým kódem, nebo na úrovni reprezentace reálnými objekty, či grafickým kódem (na úrovni psaných slov, nebo matematických symbolů nebo obrazové reprezentace). Pro danou věkovou skupinu je typické **užívání smíšených komunikačních kódů**, kde není výjimkou dublování informace. Je to i v případě vnímání a zpracování kvantitativních informací? Dítě kvantitu vnímá, je však otázka, zda a jak ji zpracovává. Jak dítě komunikuje kvantitu? Jakými nástroji a v jakých situacích? Uvedené otázky byly součástí několika experimentů a dlouhodobých pozorování, která byla vedena jednak autorkou, jednak studenty (bakalářské a diplomové práce).

Sledování komunikace probíhalo na dvou úrovních: 1) pozorování hry dětí v mateřských školách v různých lokalitách ČR (pozorování nejméně 2 hodiny /den spontánních aktivit dětí i aktivit řízených učitelkou); 2) dlouhodobé pozorování vybraných dětí ve speciálních spontánních aktivitách či ve speciálních situacích (na procházce, během jídla).

Sledování týkající se **vyjádření určité kvantity** ukázala tři zásadní skutečnosti: A) Dítě je více než v 50 % učitelkami považováno za jedince, který si určité kvantity nevšímá, nebo který se příliš v číslech neorientuje, pokud **v orální komunikaci nepoužívá k vyjádření číslovky určité** („...on je hravý, o množství se moc nezajímá...“). Naopak dítě, které častěji v komunikaci s učitelkou používá číslovky, je charakterizováno jako zralé, chytré, někdy dokonce označováno jako nadprůměrné (10). Podobně i neurčité vyjádření kvantity bývá někdy učitelkami spojováno s nedozrálým pojmem čísla, tedy raným stádiem pojmotvorného procesu, nebo s neschopností tvořit jasné představy. K této skutečnosti dochází vlivem vytrhávání slov z kontextu situace či mluvního projevu. B) Dítě **vyjadřuje kvantitu odlišně v orální komunikaci s dospělým (autoritou) na rozdíl od komunikace s ostatními dětmi ve spontánní hře**, pokud není autorita v blízkosti (nesleduje je). Znamená to, že **užívání základních číslovek k vyjádření kvantity** je u většiny dětí před vstupem do školy **podmíněno sociálně**. Tato situace přetrvává do jisté míry i v prvním ročníku ZŠ, kdy dítě rozlišuje komunikaci v matematice a mimo ni (např. ve čtení při vyprávění pohádek ani při popisu obrázku se použití základní číslovky téměř nevyskytuje). S tím souvisí i rozdíly mezi situacemi, kdy dítě komunikuje i bez přítomnosti dospělého – zde rozlišujeme situace „nacvičené“ (zavedené dospělým, který určité číslovky používal či vyžadoval) a situace spontánní neovlivněné. U **konstrukčních her**, i když nepatří mezi hry „nacvičené“ či sledované systematiky učitelkami, se číslovky určité vyskytují výrazně častěji než v ostatních spontánních hrách a to i ve významu neurčitosti (D: ... *mám tisíc kousků*...). C) Dítě má daleko **širší škálu slovních prostředků** k vyjádření kvantity (určité i neurčité), než jak nabízí budoucím učitelům odborná literatura. V těch samých situacích bez přítomnosti učitelky či jiné autority dítě volí bohatší prostředky k vyjádření kvantity. Používá nástroje vztahové (k dané či předchozí situaci, k vlastním potřebám, k očekávání danou skupinou, k jinému dítěti, k rituálu či pravidlům) jako například: *jako ty, stejně, to samý, zase tak ...*. Zvláštní skupinu výrazů tvoří slovesa: *přidej, dávej* (dokonavost v daném kontextu znamená 1 a nedokonavost neurčité množství vyjadřující

více než 1, zpravidla víc než 2), *nedávej –nene* a jiná spojení se zápornou ne vyjadřují de facto nulu. V případě potřeby pod určitým časovým či emočním tlakem vytváří novotvary jako nositele významu kvantitativní (*zaprázdňeno* – mám všechno, co potřebuji). Pokud dítě **dubluje slovní kód jiným kódem** pro vyjádření kvantitativní, je to **v situacích, které jsou pro ně významné, emočně vypjatější**. K vyjádření kvantitativní pouze gestickým kódem se vyskytlo pouze u dvou dětí, které preferují nonverbální komunikaci, patří k těm, kteří celkově méně komunikují, představují spíše výjimku.

Spojení **neurčitěho vyjádření kvantitativní** může být spojeno se situacemi, a) kdy dítě počet určit neumí, b) kdy dítě počet vyjádřit nechce (musel by počítat, nepovažuje za nutné), c) jsou-li představy dítěte o následující aktivitě nejasné, d) kdy dítě vidí jednodušší – rychlejší neurčitě vyjádření než použití číslovky určité (může být podmíněno i úrovní kooperujících dětí). Takové situace nastávají i v komunikaci učitele, nemá-li dítě jasno o průběhu aktivity, neurčitost kvantitativní je vyjádřena i pomocí číslovek základních, avšak ve specifických vazbách prezentovaných specifickým tónem, modulací hlasu (U: „*Dám ti dva, nebo tři, nebo čtyři uvidíme, kolik toho bude třeba.*“). Specifickým neurčitým vyjádřením kvantitativní je vyjádření s limitem. Limit může být vyjádřen číslem (číslovkou základní) zpravidla spojeným se slovesem *moci* – *smět*, nebo opisem (D: *Dávej, ... řeknu ti dost.*), limitem může být i kontext (U: *Co budeš dělat? D: Stavět. U: Bude ti to stačit? Jedna krabice? D: Bohatě, jojo.* – bohatě znamená, že nebude ani všechny potřebovat, počet kostek v krabici vyjadřuje horní mez toho, co dítě může použít). V obou případech jde o vyjádření takové kvantitativní, které by nepřipouštělo pro děti jedinou interpretaci. Tyto situace sem řadíme proto, že se dítě musí rozhodovat a že se na daném procesu podílí převážně jiné mechanismy než počítání, případně že se připouští relativita interpretace (situace usedání ke stolkům U1: „*Ke stolu si nemůže sednout pět dětí, kdy jsou tam jen 4 židličky*“ situace v jídelně U2: „*Vem si, kolik sníš.*“ U3: „*Můžeš to dojíst.*“ – ekvivalent vezmi si ten poslední – ještě jeden). Opisem se vyjadřují i některé neurčitě číslovky (např. *nestačilo mi* – je ekvivalentem mám málo). Opakování slov nemusí mít význam určitý, např. *sbírej furt, furt* je zde ekvivalentem seber všechno. Samotné slovo všechno (všichni, všechna, vše) se ukazuje jako obtížné. Děti je užívají zřídka. Klasifikace situací, zda se jedná o vyjádření určité či neurčitě kvantitativní, nebyla vždy snadná, připouštíme i z hlediska individuální nejednoznačnosti zařazení situace. Např. D: „*Dej mi další.*“ Teprve z průběhu další hry bylo jasné, že slovem *další* dítě žádalo o jeden. Pokud bychom sdělení vytrhli z kontextu dalšího pozorování, připouštělo by to i jiné vysvětlení – další jako vyjádření neurčitě kvantitativní ve smyslu množného čísla. Obrat použitý učitelkou „...*všechny děti (kluci) ze třídy*...“ vyvolá v dětech jasnou představu, koho se to týká, avšak ještě není zaručeno, že samy děti vědí, kolik dětí (kluků) je ve třídě, na rozdíl od učitelky. Avšak v některých třídách bylo dětem jasné, o kolik osob se jedná, a dokonce se uměly do daného počtu dopočítat. V jiné situaci se obrat „*vezmi si všechny* (pohádkové) *kostky* (6 kusů)“ může jevit jako exaktní, když dítě hru zná, umí počítat do 6, ale dialog s učitelkou ukazuje, že ani zde tomu tak být nemusí a dítě se v komunikaci uchýlí k neurčitě vyjádření kvantitativní. (D: „*To mi asi nebude stačit, je jich málo.*“ U: „*A kolik bys jich tak potřeboval?*“ D: *Krčí rameny* U: „*Kolik ti jich mám přidat (z jiné hry)?*“ D: „*Něco. To se uvidí.*“). Podobné situace nastávají i v prvním ročníku nejen mimo matematiku například v pracovních činnostech, při psaní nebo výtvarné výchově, ale i v matematice (U: „*Dokresli tam je až do konce řádku.*“ D: „*Se tam nevejdou*“ interpretujeme v kontextu situace – vejde se jen jeden).

Je evidentní, že dítě **necítí potřebu v řadě momentů používat k vyjádření určité kvantitativní číslovku určitou**. To by mohlo být i dalším vysvětlením, proč má dítě

na počátku školní docházky obtíže zaregistrovat k ústním projevu – poslechu zadání slovní úlohy – číselné údaje (8,10).

4. Závěr

Cílem je uvést hlavní body závěrů, nelze vyčerpat všechny roviny, které jsme sledovali, prezentovat všechny detaily týkající se užitých jazykových nástrojů. Význam našeho šetření spatřujeme především v tom, že ukazuje na bohatost dětské komunikace a do jisté míry mění náš pohled na dítě vstupující do školy. Je otázka, zda bychom místo pojmu číslo neměli sledovat: **pojem kvantity** se zvláštním zřetelem ke kvantitě určité (počtu) a neurčité (množství), **situace**, kdy dítě **přechází** od jednoho typu vyjádření k druhému, což by mohlo vysvětlit i obtíže v řešení slovních úloh v 1. a 2. r. (4, 8, 9).

Literatura

1. GREPL, M. a kol. *Příruční mluvnice češtiny*. Brno: NLN, 1995. ISBN 80-7106-134-4
 2. HEJNÝ, M., STEHLÍKOVÁ, N. *Číselné představy dětí*. Praha, PedF UK, 1999. ISBN: 80-86039-98-6
 3. JIRÁK, J.-KÖPPLOVÁ, B. *Média a společnost*. Praha: Portál 2003. ISBN 80-7178-697-7
 4. KASLOVÁ, M. *Příprava dítěte na školní matematiku – perspektivy, mýty a realita*. In *Idea a realita vysokoškolského vzdělání učitelek mateřských škol na pedagogické fakultě*. Ed. Jana Kropáčková, Praha: UK v Praze Pedf, 2007. s. 118 - 122. ISBN 978-80-7290-9.
 5. KASLOVÁ, M. *Číslo I*. Praha: Metodické listy pro předškolní vzdělávání-RAABík. Praha: RAABE, 2001. 20 stran .(ISBN neznámé autorovi)
 6. KASLOVÁ, M. *Číslo II*. Praha: Metodické listy pro předškolní vzdělávání - RAABík. Praha: RAABE, 2002. 20 stran .(ISBN neznámé autorovi)
 7. KASLOVÁ, M. *Číslo a literatura*. Praha: Metodické listy pro 1. stupeň, RAABE 2003.
 8. KASLOVÁ, M. *Zpracování kvantitativních údajů při řešení slovních úloh na počátku školní docházky*. In ICPM'05. Eds. Jana Přívratská, Jana Příhonská, Dana Andrejsová, Liberec: TU v Liberci, 2006. s. 121-128. ISBN 80-7372-055-8
 9. KASLOVÁ, M. *The codification of multiplication numerals by pupils form 5 to 7 years old*. In SEMT 05 Ed. J. Novotná Praha: UK Pedf. s.353. ISBN 80-7290-220-2
 10. KASLOVÁ, M. *Žák vstupující do školy*. In 2 dny s didaktikou matematiky. Eds. Darina Jirotková. Praha: Pedf, 2004. s. 101-105 ISBN 80-7290-173-7
 11. KASLOVÁ, M. Communication and Interpretation of The solution <http://www.icme-organisers.dk/tsg25/subgroups/kaslova>, 2004
 12. Language and Communication in the classroom. Eds. Heinz Steinbring, Maria Bartolini Bussi, Anna Sierpinska. NCTM, Reston, Virginia, 1998. ISBN 0-87353-441-7
 13. STOPPARDOVÁ, M. *Otestujte své dítě*. 1. vyd. Martin: Neografia, 1992. ISBN 80-85186-49-7
 14. WITTGENSTEIN, L. *Filosofická zkoumání*. Praha: FÚ AV ČR, 1993. ISBN 80-7007-040-4
- Bakalářské a diplomové práce vedené M. Kaslovou
J. Dvořáková 2007, Z. Kopecká 2003, A. Nováková 2006, M. Štolcová 2008

Kontaktní adresa

PhDr. Michaela Kaslová

UK v Praze, Pedf - KMDM

Rettigové 4, 116 39 Praha 1

E-mail: michaela.kaslova@pedf.cuni.cz

MATEMATICKÁ PŘÍPRAVA UČITELŮ PRO 1. STUPEŇ ZŠ OČIMA UČITELE FP TUL

Alena KOPÁČKOVÁ

Abstrakt

Příspěvek se zabývá smyslem matematického vzdělávání studentů oboru Učitelství pro 1. stupeň základní školy. Na základě vlastní více než patnáctileté zkušenosti s výukou pro tento učitelský obor na Fakultě pedagogické (FP) Technické univerzity v Liberci (TUL) se budeme snažit vystihnout specifika tohoto typu učitelského vzdělávání ve srovnání s jinými typy vysokoškolského studia. Úvahy budou doplněny některými autentickými ukázkami práce se studenty.

MATHEMATICAL EDUCATION IN PRIMARY SCHOOL TEACHER TRAINING COURSES FROM THE POINT OF VIEW OF A TEACHER

Abstract

The contribution deals with a sense of mathematical education in primary school teacher training courses. We try to reflect our more than 15-year-long experience in teaching at Faculty of Education of Technical University of Liberec and to describe the specifics of this type of study in the comparison with other kinds of studies. The considerations are appended by some authentic illustrations of the work with students.

1. Učitelské vzdělávání pro 1. stupeň ZŠ na FP TUL

Fakulta pedagogická TUL vznikla v rámci tehdejší Vysoké školy strojní a textilní (později přejmenované na Technickou univerzitu v Liberci) v r. 1990 jako její třetí fakulta. Univerzita tak navázala na předchozí tradici učitelského vzdělávání v Liberci. Původní záměr věnovat se pouze učitelství pro 2. stupeň, a to zejména v kombinacích těch oborů, pro něž bylo na tehdejší VŠST zázemí (matematika, fyzika, chemie, tělesná výchova, cizí jazyky), byl rychle překonán. Vedle rozšiřování do dalších učitelských, ale i neučitelských oborů byla jako přímá reakce na nedostatek učitelů na 1. stupni základní školy brzy zahájena i výuka v oboru Učitelství pro 1. stupeň základní školy. Potřeba učitelů pro 1. stupeň škol a postoj regionálních školských institucí způsobily, že učitelské studium pro 1. stupeň škol na FP TUL bylo zpočátku realizováno jako bakalářské s tím, že jeho absolventi si budou moci později magisterský stupeň doplnit. Bylo však možné odejít i přímo do učitelské praxe; liberecký region tehdy zaručoval absolventům stejné platové zařazení jako absolventům magisterských programů. FP TUL byla tak v 90. letech 20. století pravděpodobně jedinou pedagogickou fakultou v tehdejší Československu, na níž bylo učitelské vzdělávání pro 1. stupeň ZŠ koncipováno jako bakalářské. Bakalářské studium oboru Učitelství pro 1. stupeň ZŠ

školy však nemělo na FP TUL dlouhé trvání a po krátké zkušenosti bylo nahrazeno čtyřletým a od akademického roku 2007/08 již pětiletým magisterským studiem.

2. Výuka matematiky v oboru Učitelství pro 1. stupeň ZŠ na FP TUL

Rozsah i obsah matematických předmětů vyučovaných na oboru Učitelství pro 1. stupeň ZŠ na FP TUL jsou v podstatě srovnatelné s ostatními pedagogickými fakultami v České republice; podrobné studijní plány a sylaby je možné nalézt na <http://www.fp.tul.cz/>. Vedle geometrie se v matematice jedná zejména o základy aritmetiky a algebry a elementární poznatky o funkcích, zejména lineární, kvadratické, lineární lomené, absolutní hodnotě, aritmetické a geometrické posloupnosti, pozornost je věnována výrokové logice a intuitivní teorii množin. Kromě základního kurzu matematiky a geometrie mají studenti možnost rozšířit si své matematické znalosti v rámci tzv. prohloubeného studia předmětu Matematika (volba jednoho ze sedmi nabízených prohloubených předmětů je povinná). Počet studentů, kteří si volí po prvních 2 letech studia Matematiku za svůj prohloubený studijní program, je však mizivý, v některých letech si tento program dokonce nezvolí žádný student. Většina studentů dává přednost rozšířenému studiu předmětů Specifické poruchy učení a chování, popř. výchov (hudební či výtvarné). Stejně tak jen malé procento studentů si za téma své diplomové práce volí téma matematické.

3. Vlastní zkušenost s výchovou učitelů elementaristů

Autorka působí na katedře matematiky (dnes Katedra matematiky a didaktiky matematiky) liberecké vysoké školy od r. 1985 a od počátku existence Fakulty pedagogické se podílí vedle výuky matematiky na technických fakultách (a později i na nově vzniklé fakultě ekonomicky zaměřené) také na výchově budoucích učitelů všech stupňů škol. Pro studenty primárního vzdělávání v prezenční i kombinované formě vyučuje jednak třísemestrální kurz Elementární aritmetika 1 – 3, dále úvodní předmět Matematický proseminář, jehož cílem je zopakovat středoškolskou algebru a úvod učiva o funkcích, a dále garantuje v rámci prohloubeného studia matematiky předmět Základy matematické analýzy. Vzhledem k vyučování na různých fakultách TUL měla autorka mnoho let možnost všimnout si specifík jednotlivých skupin studentů a zamýšlet se hlouběji nad smyslem matematického vzdělávání pro jednotlivé skupiny. Autorka nabyla přesvědčení, že její dlouholeté pedagogické působení v rámci několika fakult různého zaměření (a to v jazyce českém i anglickém) jí i přes mnohé obtíže plynoucí z této nehomogenosti nakonec umožnilo lépe vnímat problémy jednotlivých typů studentů různých typů studia včetně učitelského (a to nejen ve vztahu k matematice) z potřebného odstupu a s větším porozuměním pro jednotlivé studenty a že i ji samotnou obohatilo. Obrázek studentů vytvářený během působení v učitelské roli jí je již několik let umožněno doplňovat i v rámci činností ve funkci proděkanky pro studijní záležitosti; setkává se zde se studenty učitelství pro 1., 2. i 3. stupeň škol v mnoha dalších situacích a má tak možnost poznat i jejich osobní problémy a motivace hlouběji, než je to možné v hodinách matematiky. Čím se tedy podle naší zkušenosti vyznačují studenti učitelství pro 1. stupeň základní školy, a to zejména ve vztahu k matematice? Je i ve výuce pro ně třeba volit nějaké specifické postupy?

4. Studenti oboru Učitelství pro 1. stupeň ZŠ a matematika

Podle naší zkušenosti se ve srovnání se studenty dalších studijních oborů u studentů učitelství pro 1. stupeň ZŠ výrazněji projevuje to, z jakého typu střední školy přicházejí. Absolventi, resp. absolventky středních pedagogických škol jsou většinou ve srovnání

s absolventy gymnázií v nevýhodě, co se týče úrovně jejich matematických znalostí i schopností; tento rozdíl bývá patrný i po mnoha letech uplynulých od maturity (u posluchačů kombinovaného typu studia).¹ Nehomogenost studijních skupin zde často působí pedagogovi, ale i posluchačům problémy; máme např. zkušenost, že jsme byli studentkami, které svůj matematický handicap pociťovaly zvlášť výrazně, požádání, zda bychom pro ně nevytvořili speciální skupinu pro začátečníky v matematice. To je samozřejmě na vysoké škole těžko představitelné i realizovatelné. Tím však neříkáme, že absolventi středních pedagogických škol nemají šanci studium úspěšně dokončit. Jde však o to, aby si včas svůj handicap uvědomili, začali na doplnění svých matematických vědomostí pracovat a nečekali, že zdárné absolvování matematických předmětů bude nakonec výsledkem náhody a slabé chvilky pedagoga, který nakonec rezignuje. Absolventi středních pedagogických škol jsou ve srovnání s absolventy gymnázií lépe vybaveni v oblasti dovednostních disciplín a pedagogiky a psychologie.

Lze shrnout, že studenti učitelství pro 1. stupeň základní školy se obecně vyznačují spíše negativním vztahem k matematice a že matematika není takřka jistě prioritou jejich zájmů; kdyby tomu tak bylo, pravděpodobně by volili jiný obor studia. Jednou z vlastností studentů elementaristů, které jsme za léta pedagogického působení vyzorovali, je poměrně nízká schopnost abstrakce a zobecňování; to je však často kompenzováno (např. ve srovnání se studenty technických oborů) vyššími paměťovými schopnostmi a pilností.

5. Přístup učitele matematiky při vzdělávání elementaristů

Specifika studijního oboru vyžadují i specifický přístup od učitelů. Po letech pedagogických zkušeností víme, že např. čerstvý absolvent vysoké školy – matematik nebude pravděpodobně ideálním pedagogem pro obor Učitelství pro 1. stupeň ZŠ.² Je třeba mnoha let zkušeností, trpělivého pozorování, vyhodnocování a ujasňování toho, co je důležité a podstatné, aby si učitel - matematik vypracoval postoj k tomuto typu studia a došel k určité velkorysosti a nadhledu. Tím nechceme naznačit, že by se mělo zcela rezignovat na přesnost a správnost, ale kritérium *správně/nesprávně* by se nemělo stát rozhodně jediným kritériem hodnocení úspěšnosti studentů elementaristů v matematice. Je samozřejmé, že zde ve výuce musíme používat více názorný přístup, ilustrovat pojmy konkrétními příklady, využívat více modelů. Osobní zkušenost s českou základní školou i z pozice rodiče, popř. prarodiče je zde pro učitele velkou výhodou. Myslíme si, že učitel na 1. stupni ZŠ by měl mít především dobrý vztah k dětem, měl by být osobnostně vyzrálý, pevný a psychicky odolný, měl by být schopen reflexe a sebereflexe. Učitel nemusí umět všechno, ale měl by svým žákům umožnit se dostatečně a bez bázně projevit a myšlenkově rozvinout. Po letech výuky studentů elementaristů jsme nabyli přesvědčení, že *méně je někdy více*; není třeba studenty zahlcovat množstvím složitých pojmů a vztahů, cennější pro ně a jejich vztah k matematice, který budou přenášet i na své žáky, je porozumění a důvěrné poznání menšího množství matematických objektů a jejich průvodních jevů. Stejně tak jsou pro poznání studenta bezcenné z paměti naučené definice, daleko důležitější je, zda si pod pojmem ve své mysli student příslušný objekt opravdu buduje (a je schopen o něm třeba vlastními, méně přesnými slovy hovořit) – to by měl učitel vždy sledovat. Můžeme

¹ Střední pedagogické školy a gymnázia jsou nejčastější střední školy, z nichž se posluchači tohoto typu učitelství rekrutují.

² I autorka se před lety jako absolventka MFF UK (a navíc v neučitelském oboru) domnívala, že jediný možný výklad matematických disciplín spočívá v dodržování posloupnosti definice – věta – důkaz.

doufat, že to, jak my působíme na své studenty a na co my klademe v matematice důraz, budou oni později působit na své žáky a vidět jako podstatné.

6. Příklady a situace z výuky

Ilustrujme nyní naše úvahy na konkrétních situacích a příkladech vybraných ze studentských prací a z komunikace se studenty při výuce. Zdrojem poučení jsou nám většinou chyby ve studentských řešeních a chybné postupy a úvahy studentů.

Př. 1 Studenti 2. ročníku dostali v r. 2008 na zkoušce z Elementární aritmetiky za úkol písemně definovat binární relaci v množině A . Poznamenejme, že na přednášce jsme nejprve vymezili pojem binární relace v množině M , později jsme přidali binární relaci z množiny A do množiny B . U dvou studentek jsme si všimli formulace: „*Binární relace v množině M je jakákoliv podmnožina kteréhokoliv součinu $M \times M$.*“³ Jiná studentka na tutéž otázku odpověděla: „*Relace R je definována jako podmnožina kardinálního součinu $R \times R$* “, další: „*Binární relací z množiny A do množiny B rozumíme libovolnou podmnožinu kartézského součinu*“. Častou odpovědí bylo toto: „*Binární relace je jakákoliv podmnožina kartézského součinu $M \times M$.*“

Př. 2 Během r. 07/08 jsme zadali skupině 20 studentů 1. ročníku následující úlohu. *Je dána množina $F = \{o, m, b, j, p, v\}$, kde F – family – je rodina Nováková (všichni mají stejné příjmení a předpokládáme tradiční zvyklost, že děti mají příjmení po svých rodičích), kde o značí otce, m matku, b babičku, j, p, v , jsou sourozenci Jan, Petr a Veronika. Na množině F je dána relace R takto: $R = \{[x, y] \in F \times F; x \text{ je rodič } y\}$. Zapište prvky relace R a popište slovy relaci R^{-1} k ní inverzní.* Zatímco první úkol nedělal studentům potíže, druhý úkol zvládla jediná studentka. Ta definovala inverzní relaci správně, a to dokonce bez toho, aniž by si musela nejprve její prvky vypsat. Nepoužila sice obecnější termín *dítě*, ale bylo zřejmé, že úkol pochopila, neboť vedle správné formulace relace i správně pomocí matematické symboliky zapsala, a to i se standardním pořadím proměnných: $R^{-1} = \{[x, y] \in F \times F; x \text{ je syn/ dcera } y\}$. Tato reakce však byla zcela výjimečná; většina studentů úkol vynechávala; při dalším ojedinělém pokusu o řešení došla jiná studentka k závěru, že příslušník x rodiny Novákových je si sám sobě dítětem i rodičem (možná si zde vzpomínala na vlastnost reflexivity relace).

Př. 3 Při procvičování výrokové logiky pravidelně zařazujeme úlohy typu: *K dané implikaci utvořte obrácenou, obměněnou, popř. negaci.* Studentům po několikerém procvičení nedělá potíže úkol zvládnout symbolicky, ale jsou bezradní, volíme-li věty z běžné praxe.⁴ Pro zajímavost uvedme některé z implikací použitých v roce 2007/08. *Bude-li pršet, prádlo neuschne.*
Bude-li vítr, závody na můstku se neuskuteční. (Konání SP 2008 ve skocích v Liberci.)
Máš-li mne rád, pochopíš to. (Den testu byl na Sv. Valentýna)
Budeš-li hodný, pojedeme k babičce. Nebudeš-li hodný, zůstaneš doma.
Nebude-li pršet, nezmoknem(e). (To považují studenti za zvláště zákeřný výrok.)
Není zde prostor na uvádění autentických odpovědí studentů, shrňme jen, že podobné úlohy jsou pro studenty velmi náročné a bývají v nich opakovaně neúspěšné. Potíže jim

³ U jedné z těchto dvou studentek jsme později našli „tahák“ v mikroskopickém provedení, z něhož tuto formulaci opsala. Obě chybující na náš dotaz později přiznaly, že se učily společně.

⁴ Vymýšlíme rádi takové implikace – reagujeme tak často i na aktuální události z reálného světa.

působí nejen sama výzva přetvořit předepsaným způsobem implikaci, ale zejména spojovací výraz *-li*.

Př. 4 Ve výrokové logice pracujeme i s kvantifikátory. Zadáme-li úkol negovat výrok *Všechny prvky množiny M mají vlastnost V*, častou chybnou odpovědí je *Zádný prvek množiny M vlastnost V nemá* (tj. *Všechny prvky množiny M vlastnost V nemají*). Např. výrok *Všichni přišli* je často chybně negován jako *Nikdo nepřišel*.

7. Komentář

Reakce studentů v příkladu 1 prozrazují formální přístup ke studiu. Studenti, resp. studentky leckdy zvládnou naučit se i delší složité definice, ale příklady ukazují, že jde pouze o formální znalost naučenou z paměti a že slova použitá v definici jsou prázdnými pojmy. Potíže způsobené malou záměnou písmen oproti těm, která jsme použili při zavádění pojmu, i použití neadekvátních slov (*kteréhokoliv*, *kardinálního*), prozrazují povrchnost naučeného. (Pozn. Pojem relace ilustrujeme při výuce nejprve na příkladech a studentům je předvedeno, že v řeči relací hovoří de facto již i malé dítě, když se vyjadřuje o vztazích mezi objekty, které jsou mu blízké: *někdo je něčí kamarád, bratr, někdo má/nemá někoho rád, někdo/něco je větší, popř. stejný jako jiný člověk/věc* atd.)

Formálnost naučeného prozrazuje i situace popsaná v příkladu 2. Studenti jsou zaskočeni, mají-li aplikovat matematickou znalost v reálné situaci. Přitom by jistě pomohlo úlohu s hledáním inverzní relace vyřešit, kdyby si student nejdříve ryze formálně zapsal prvky relace R^{-1} , pak by se pravděpodobně prozkoumáním získaných dvojic již podařilo vztah odpovídající relaci R^{-1} pojmenovat.

Příklad 3 ukazuje, že mezi studenty upadá schopnost používat mateřský jazyk a rozumět mu. I když v mnoha situacích je používání matematické symboliky pro studenty překážkou, zde je tomu naopak. Studenti získají větší vhled do situace, opřou-li se o formalismus, o „vzorec“ a přeloží-li si nejprve implikaci do kostrbatého *Jestliže (když) bude pršet, pak prádlo neuschne* (a obdobně u dalších implikací) a po označení výroků proměnnými pracují se symbolickým zápisem $p \Rightarrow q$.

Umožnit studentům získat větší vhled do výroků s kvantifikátory a jejich negací lze tak, že přejdeme k reálné situaci, z níž vytvoříme model, který si student lehce vybaví. Lze to provést např. takto: uvedeme výrok, jehož nepravdivost je zjevná, např. *Všichni lidé na světě mají černou barvu vlasů* a dotážíme se studentů, jak by snadno malé dítě tento výrok vyvrátilo a dokázalo, že to není pravda. Vždy se najde několik posluchačů, kteří přijdou na to, že dítě pravděpodobně ukáže na nejbližšího člověka v okolí (maminku, sourozence), který černé vlasy nemá. Od této odpovědi je již krůček k formálnímu zápisu negace výroku $\forall x \in M; V(x): \exists x \in M; V'(x)$. Obdobně můžeme studenty dovést i k negaci výroku s existenčním kvantifikátorem.

Literatura

1. HEJNÝ, M. – KUŘINA, F. *Dítě, škola a matematika*. 1.vyd. Praha: Portál, 2001. 192 s. ISBN 80-7178-581-4.

Kontaktní adresa

RNDr. Alena Kopáčková, Ph.D.

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Fakulta pedagogická, Technická univerzita v Liberci, Studentská 2, 461 17 Liberec 1

Telefon: +420 485 352 307, +420 485 352 428, e-mail: alena.kopackova@tul.cz

ŘEŠENÍ PROBLÉMŮ A ZKOUMÁNÍ VE ŠKOLSKÉ MATEMATICE

Jan KOPKA

Abstrakt

Řešení problémů je velmi důležitou součástí školské matematiky. Můžeme říci, že problémy budou ve školské matematice i v budoucnu, kdy se tato disciplína změní. Výzkumný přístup při výuce pomáhá nejen problémy řešit, ale také je vytvářet.

PROBLEM SOLVING AND INVESTIGATION IN SCHOOL MATHEMATICS

Abstract

Problem solving is very important part of school mathematics. We can say, that problems will be in school mathematics also in the future when this subject will be changed. Investigative approach helps to solve problems and also creates others.

Změny školské matematiky

Chceme-li ve škole žákům ukázat, co je to matematika, pak nejlepším způsobem je řešit s nimi problémy. Tyto problémy by měly být dostatečně zajímavé, přijatelné, obtížné a jejich řešení by mělo odpovídat zvyklostem v matematice.

Podívejme se, jakou roli hrají problémy v „čisté“ matematice? Před časem jsem vyslechl přednášku prof. Netuky. V této přednášce ukázal, jak se Euler stal „přes noc“ slavným, když vyřešil (1734) tzv. Basilejský problém, tj. problém najít součet řady $1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \dots$. Tato událost úzce souvisí s naší otázkou, kterou si trochu upravíme. Z čeho sestává matematika? Jsou to axiomy?, Věty?, Důkazy?, Pojmy?, Definice?, Teorie?, Vzorce?, Formule?, Metody?. Samozřejmě, bez těchto součástí by matematika nemohla existovat. Hlavním důvodem pro existenci matematiky jsou však podle amerického matematika Paula Halmosiho problémy a jejich řešení. Řešení některých velkých problémů trvalo velmi dlouho a některé jsou dosud nevyřešené. Vždy však snaha o jejich řešení obohacovala matematiku. Uvedme ještě některé další slavné matematické problémy. Jsou to např.: Problém dokazatelnosti pátého Euklidova postulátu, Problém čtyř barev, Problém zda prvočíselných dvojčat je nekonečně mnoho, Dokazatelnost velké Fermatovy věty. Tyto a další problémy motivovaly matematiky k vynaložení mimořádného úsilí k jejich vyřešení. Z této zmínky je snad jasné vidět, že ze samotného charakteru matematiky vyplývá opodstatněnost zadávání problémů (samozřejmě na zcela jiné obtížnostní úrovni) a jejich řešení i ve škole.

Žáci a studenti si bohužel většinou myslí, že svět matematiky již byl vytvořen, že má svoje algoritmy a formule. Myslí si, že v tomto světě již není místo pro nové myšlenky, či jinak řečeno, že průměrný student nemá šanci nějakou užitečnou myšlenku

objevit. Naštěstí tomu tak není. Matematika je tvořivá jako umění. **I žáci a studenti všech stupňů škol mají možnost poznat tvůrčí aspekt matematiky, pokud se s ní matematika „dobře dělá“¹.** Matematika by se s žáky i studenty ve škole měla dělat tak, aby tento její tvůrčí aspekt vystoupil do popředí.

Všechno, co se dnes ve škole odehrává, je velmi silně ovlivněno nejen rychle se měnícím světem, ale i situací v naší nemocné společnosti. Dotkněme se obou těchto vlivů. Začneme situací, která nás bezprostředně obklopuje a o níž tak zasvěceně hovoří P. Vopěnka².

Škola má naučit žáky samostatně myslet a řešit problémy. Tato fráze na nás útočí ze všech sdělovacích prostředků a používá ji každý, kdo se snaží do školního vyučování zasahovat. Proti nelze nic namítnout, kdyby ovšem téměř jedním dechem tito sice povolání, nikoliv však vyvolení, koryfeje školské pedagogiky nevolali po snížení počtu hodin matematiky a po zmírnění požadavků v tomto předmětu na žáky kladených. Vysvětlení tohoto schizofrenního chování v naší rovnostářské společnosti nám poskytuje hlas ze starobylé Indie, kde r. 628 v knize Brahmasphutasiddhanta velký indický učenec Brahmagupta napsal:

Stejně jako v září Slunce blednou všechny hvězdy, tak také učenec může v obecném shromáždění zastínit slávu jiných, když předloží – a tím více, když vyřeší – matematické problémy.

Vskutku, matematika svými nároky na schopnost abstraktního a logického uvažování ruší levicovými humanistickými intelektuály prosazovanou všeobecnou rovnost lidí, a to nesrovnatelně nestravitelnějším způsobem než sport nároky na schopnosti tělesné, či umění nárokem na schopnosti estetické. Hledání příčin této výlučnosti matematiky ponechme psychologům.

Uvedený schizofrenní rozpor musí být vyřešen ve prospěch matematiky a nikoliv rozmanitých celebrit, které své intelektuální duševní zaostávání řeší znevažováním schopností, na něž nedosáhnou, a kýčovitých pseudohumanistů, kteří nemilují ani tak děti jako svou vlastní okázalou lásku k dětem.

Stěží lze nalézt jinou činnost, která by svými několika tisíci lety prověřenými zkušenostmi mohla být účinnější pro rozvíjení myšlení, abstrakce, představivosti a schopností řešit problémy, než je pěstování matematiky. Ostatně právě matematické úlohy, jmenovitě pak ty, které zasahují do jiných oborů lidské činnosti, jsou jedinečnou průpravou k provádění dnes tak nesmírně užitečné matematizace různých reálných situací.

Jestliže polovina národa řeší již několik měsíců úlohy sudoku, pak ovšem vystupuje do popředí otázka, proč polovina žáků a studentů neřeší stejně horlivě nesrovnatelně rozmanitější a často mnohem originálnější matematické úlohy. Vinu na tom má především celá naše společnost, a to z důvodu výše uvedeného. Za nezáživost hodin matematiky a za neschopnost srozumitelně vyložit probíranou látku, nese vinu učitel; nikoliv však jen on sám. Nemenší vinu mají ti žáci, kteří zaštiťující se beztrestností a bezduchými celebritami a polovzdělanci, bojkotují a rozkládají vyučovací hodiny, čímž kromě jiného flagrantně porušují právo na vzdělávání těch žáků, kteří se vzdělávat chtějí.

V neposlední řadě se pak na této smutné a svým způsobem velmi nebezpečné situaci podílí i nedostatek a malá dostupnost textů obsahujících vhodné matematické úlohy, jejich řešení, a především pak jejich vytváření. (Konec citace)

¹ Citát z knížky 1

² Citát z textu 3

Jak jsme již uvedli, velmi silně ovlivňuje situaci ve škole i rychle se měnící (především po technické stránce) svět kolem nás. Proto se musí měnit i vzdělávání žáků a studentů od základních škol až po školy vysoké a musí se měnit i vzdělávání dospělých. To se týká vzdělávání obecně, ale samozřejmě i vzdělávání v matematice. Vzdělávání dnes by mělo odpovídat potřebám existence jedince v budoucí společnosti, a přitom se nám mnohdy nedaří ani to, aby odpovídalo dnešku. Potíž je však v tom, že asi nikdo na světě dnes neví, jak by školská matematika v budoucnu měla vypadat, aby skutečně odpovídala potřebám moderní (rozumné) společnosti. Jistě dojde k velkým změnám po stránce obsahové, ale i po stránce používaných výukových a učebních metod. Pravděpodobně prioritu by v současné době měly hrát obsahové změny. Zdá se, že v budoucnu se bude školská matematika mnohem silněji přiklánět k finitní matematice, protože se bude stále více požadovat její aplikovatelnost i mimo rámec matematiky.

Matematika se vyznačuje určitým charakteristickým chováním těch, kteří ji tvoří a to už celá tisíciletí. Vždyť dějiny matematiky jsou vlastně dějinami lidského myšlení. A tuto skutečnost, budeme-li matematiku učit, musíme mít stále na mysli. Dokonce bychom snad mohli říci, že matematika je určitý způsob chování a že příprava na toto chová by měla být podstatnou složkou školské matematiky a to od obecné školy (a možná i před ní) až po školu vysokou. A především učitelé matematiky by si tuto skutečnost měli uvědomovat a měli by ji realizovat při výuce. Toto charakteristické chování bychom měli učit budoucí učitele matematiky a měli bychom ho stále připomínat i učitelům v praxi.

Uveďme příklad ukazující, že před výukou matematiky, a to i na obecné škole, stojí velmi obtížné problémy.

Příklad: Zdá se, že ručnímu sčítání, odčítání, násobení a dělení bychom dnes neměli ve škole věnovat takovou pozornost jako tomu bylo před érou kalkulaček a počítačů. Bylo by nesmyslné, aby školská matematika kalkulačky ignorovala. Dítě by však mělo mít určitou představu o uvedených základních aritmetických operacích. Jinak by se mohlo stát, že na otázku, co to znamená sečíst dvě čísla, bude odpovídat: To znamená zmáčknout tato tlačítka na kalkulačce. Zůstaňme ještě chvíli u nejsložitější z těchto operací, tj. u operace dělení. Před časem jeden z reformátorů matematiky (pravděpodobně úplný laik v tomto oboru) napsal, že se probírá mnoho věcí, které díky počítačům a kalkulačkám jsou zcela zbytečné. Navrhoval, aby se určitě ihned vypustilo dělení dvojciferným číslem. To je samozřejmě možné a třeba i na první pohled rozumné. Operace dělení je však při jejím provádění trochu jiná než ostatní uváděné operace. Zatím co tyto ostatní operace se dají dělat zcela automaticky, je třeba u operace dělení trochu přemýšlet. Tam musíme vždy nejprve odhadnout kolikrát je jedno číslo obsažené v druhém. Dodatečně výpočtem zjistíme, zda náš odhad byl správný. Pokud správný nebyl musíme udělat nový odhad. Toto se opakuje tak dlouho, dokud výpočet nepotvrdí, že náš odhad je správný. Můžeme říci, že žák při dělení využívá důležitou výzkumnou strategii zvanou *odhad – ověření - korekce*. To je důležitá strategie, která se využívá i v jiných vědách. Pokud dělení dvojciferným číslem vypustíme, zbavíme se něčeho, na čem je možné tuto velmi užitečnou strategii trénovat.

Budeme-li tedy některá témata ze školské matematiky odstraňovat a tomu se nevyhneme, musíme si vždy položit otázku, čeho se tím zbavujeme a čím to odstraněné nahradíme. Jinak by se mohlo stát, že některá důležitá fakta a některé důležité postupy se nám ze školské matematiky nenávratně vytráí a nebudou nahrazeny ničím novým a adekvátním.

Výzkumný přístup

V druhé části se věnujeme jedné důležité výukové metodě, která by jistě v budoucnu měla nabývat na důležitosti. Říkejme ji *výzkumný přístup* a demonstrujme ji na konkrétních příkladech ze školské praxe. Popíšeme i názory žáků a učitelů na ni.

Různá zkoumání trojúhelníkových čísel na gymnáziu a u mentálně retardovaných dětí.

Problematika je natolik zajímavá, že se **motivuje** sama. Přesto bychom na úvod mohli uvést, že figurální čísla (čtvercová, trojúhelníková, obdélníková, pětiúhelníková, šestiúhelníková, ...) zkoumali matematikové již v antickém Řecku. Např. na obrázku 1 je obrazec, který si řečtí matematikové udělali z devíti kamínků a který je vedl k tomu, že číslo 9 zařadili mezi tzv. čtvercová čísla. Pokusme se nyní i my začít zkoumat jeden takovýto zajímavý druh čísel a pokládat si podobné otázky, které si pokládal již např. Nicomachus a jeho kolegové žijící kolem roku 100 našeho letopočtu. Podívejme se na obr. 2.



Obr. 1

Obr. 2

První a současně nejmenší trojúhelník se skládá ze tří bodů (hvězdiček), druhý ze šesti bodů a třetí z deseti bodů. Proto budeme čísla 3, 6, 10 počítat mezi tzv. trojúhelníková čísla. Často však začínáme obrázkem, který má pouze jeden bod. Tento bod sice netvoří trojúhelník, přesto budeme říkat (na rozdíl od Řeků), že číslo 1 je první (nejmenší) trojúhelníkové číslo. Dohodněme se, že k označování trojúhelníkových čísel budeme používat písmeno T , a to takto:

$$T_1 = 1, T_2 = 3, T_3 = 6, T_4 = 10.$$

Trojúhelníková čísla můžeme vložit i do tabulky (viz tab.1):

n	1	2	3	4
T_n	1	3	6	10

Tab. 1

Nyní ukážeme několik možných zkoumání těchto zajímavých čísel. Trojúhelníková čísla představují výchozí situaci. Nebudeme určovat cílovou situaci. Zadáme pouze "směr, kterým se mají studenti vydat". Výsledkem zkoumání bude vždy hypotéza, kterou bud' ověříme na dalších příkladech, nebo dokonce dokážeme (pokud na to máme prostředky a schopnosti).

Problém 1 (rutinní): Podívejte se na obr. 2 a vytvořte obdobný trojúhelník, který má v nejnížší vrstvě 5 bodů (hvězdiček). Rozšiřte tabulku 1 a doplňte do ní páté trojúhelníkové číslo.

Problém 2 (zkoumání): Vytvořte několik dalších trojúhelníkových čísel a **zkoumejte**, jak se dá vytvořit další trojúhelníkové číslo, pokud znáte předcházející trojúhelníková čísla. Výsledek formulujte nejprve slovně, a potom se pokuste napsat vzorec

$$T_n = ?$$

Řešení: Budeme experimentovat, tzn. vytvoříme několik dalších trojúhelníkových čísel a pak se pokusíme formulí popsat posloupnost, kterou jsme dostali. Nejsnazší bude popsat tuto posloupnost rekurentně. Dostaneme:

$$T_1 = 1 \text{ a } T_n = T_{n-1} + n \text{ pro } n = 2, 3, 4, \dots \quad (1)$$

Problém 3: Uvažujme prvních pět trojúhelníkových čísel: 1, 3, 6, 10 a 15. Jestliže vynásobíme každé z těchto čísel dvěma, dostaneme po řadě: 2, 6, 12, 20 a 30. První tři z těchto čísel můžeme rozložit následovně:

$$2T_1 = 2 = 1.2$$

$$2T_2 = 6 = 2.3$$

$$2T_3 = 12 = 3.4$$

Zkoumejte, zda i další dvojnásobky trojúhelníkových čísel je možné rozložit obdobným způsobem. Jestliže ano, formulujte výsledek nejprve slovy a potom pomocí vzorce $T_n = ?$.

Řešení:

Experimentování: $2T_4 = 20 = 4.5$, $2T_5 = 30 = 5.6$ a můžeme pokračovat $2T_6 = 42 = 6.7$, ...

Zobecníme (tzn. uděláme indukční úvahu): $2T_n = n(n+1)$, pro $n = 1, 2, 3, \dots$

Hypotéza: Posloupnost trojúhelníkových čísel můžeme popsat následujícím vzorcem:

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ kde } n = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

Na druhém stupni ZŠ můžeme tento vzorec ověřit pro další trojúhelníková čísla. Na SŠ můžeme použít důkaz matematickou indukcí.

Důkaz matematickou indukcí:

1. Pro $n = 1$, jak víme z experimentování, formule platí.

2. Předpokládáme, že vzorec platí pro n -té trojúhelníkové číslo a dokažme, že pak platí i pro $(n+1)$ -ní trojúhelníkové číslo, tzn. budeme dokazovat formuli

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left[T_n = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow T_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \right].$$

Nechť n je libovolné přirozené číslo ≥ 1 , pro které platí indukční předpoklad. Pak

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n^2 + 2n + n + 2}{2} = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = T_n + (n+1) = T_{n+1} \quad \square$$

Poslední rovnost jsme získali použitím vzorce (1). Nyní můžeme hypotézu přejmenovat na **větu**.

Ke vzorci (2) jsme dospěli pomocí experimentování a následného zobecnění.

Problém 4: $1 + 3 = 4$ je součet dvou sousedních trojúhelníkových čísel.

$6 + 10 = 16$ je také součet dvou sousedních trojúhelníkových čísel.

Zkoumejte součty sousedních trojúhelníkových čísel.

Experimentování (systematické):

$$1 + 3 = 4 \qquad 10 + 15 = 25$$

$$\begin{array}{ll} 3 + 6 = 9 & 15 + 21 = 36 \\ 6 + 10 = 16 & 21 + 28 = 49 \end{array}$$

Je vidět, že součtem je vždy čtvercové číslo. Pokračujme v experimentování:

$$\begin{array}{l} T_1 + T_2 = 4 = 2^2 \\ T_2 + T_3 = 9 = 3^2 \\ T_3 + T_4 = 16 = 4^2 \\ \dots\dots\dots \end{array}$$

Zřejmě platí: $T_n + T_{n+1} = (n+1)^2$

Hypotéza: Pro libovolné přirozené číslo n platí, že součet n -tého a $(n+1)$ -ho trojúhelníkového čísla se rovná $(n+1)$ -mu čtvercovému číslu.

Označíme-li n -té čtvercové číslo C_n , pak můžeme hypotézu zapsat **symbolicky** následovně:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) T_n + T_{n+1} = C_{n+1}. \quad (3)$$

Důkaz: K důkazu stačí výpočet, při němž využijeme vzorec (2).

Nechť n je libovolné přirozené číslo. Pak

$$T_n + T_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 = C_{n+1} \quad \square$$

Na druhém stupni můžeme důkaz nahradit ověřením hypotézy na několika dalších příkladech. Ať již hypotézu dokážeme nebo pouze ověříme, je vhodné ji potom přejmenovat na **větu**.

Další zkoumání trojúhelníkových čísel najde čtenář v knížce 2.

Výše uvedená zkoumání trojúhelníkových čísel a některá další jsme dělali se studenty gymnázia v Ústí nad Labem. Tento způsob práce je naplno „pohltil“. Později nás napadlo pokusit se dělat podobná zkoumání se žáky prvního stupně ZŠ. Dokonce jsme riskantně zvolili třídu mentálně retardovaných dětí, o kterých se v literatuře píše, že nejsou schopny logického myšlení. Ukažme opět kousek řízeného zkoumání, které jsme s těmito dětmi dělali.

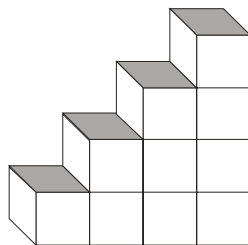
Schody

Žáci z kostiček stavěli schody. První schod byl vytvořen z jedné kostičky, druhý schod ze dvou kostiček nad sebou, třetí schod ze tří kostiček nad sebou, atd. (viz obr. 3). Pokud spočítáme všechny použité kostičky odpovídající po řadě schodištím s jedním, dvěma, třemi, čtyřmi a pěti schody, dostaneme čísla: 1, 3, 6, 10, 15. To je právě prvních pět trojúhelníkových čísel.

Žáci brzy, právě pomocí manipulace s kostičkami (experimentování s konkrétními objekty), objevili ideu, že chtějí-li přistavět šestý schod, budou k tomu potřebovat šest kostiček, ..., chtějí-li přistavět desátý schod, budou k tomu potřebovat deset kostiček atd. V konkrétní rovině objevili, že další schod vždy vyžaduje tolik kostiček, kolikátý schod to je. Žáci si tak začali uvědomovat možné zobecnění. Budeme-li trojúhelníková čísla značit stejně jako výše, můžeme tuto objevenou ideu zapsat pomocí vzorce (1) (viz výše).

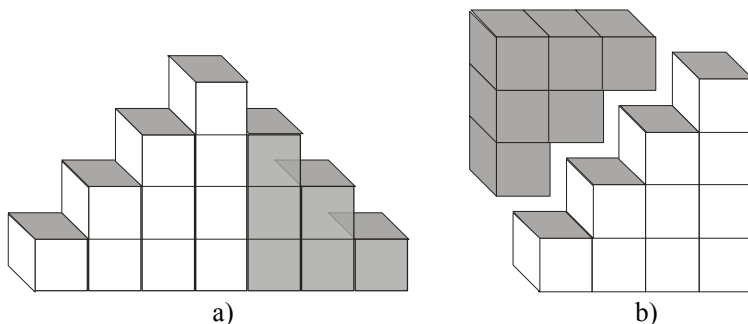
Po určité době jsme s žáky začali stavět schody nahoru a následně dolů (viz obr. 4 a)). S tímto schodištěm pak žáci manipulovali. Aby se jim lépe pracovalo, začali

schody stavět ne ve svislé (jak si autor představoval), ale ve vodorovné poloze – schodiště sklopili na podlahu. To byl jejich velmi praktický nápad.



Obr. 3

Žáci brzy objevili, že počet kostiček takového oboustranného schodiště odpovídá dvěma za sebou jdoucím trojúhelníkovým číslům. Při dalším manipulování pak zjistili, že je možné přemístěním šedých kostiček získat čtvercový útvar (viz obr. 4 b)). Jakmile řekli: „A takhle to bude vždycky“, začali si uvědomovat možné zobecnění. Žáci tak objevili ideu, která je vtělena do vzorce (3) (viz výše).



Obr. 4

Za největší úspěch tohoto výzkumného přístupu jsme považovali řešení jednoho z posledních úkolů, který žáci dostali. Zněl: Řekněte, kolik schodů můžete postavit, pokud dostanete 8 kostiček. Většina žáků řešila tuto úlohu opět manipulativně. Kostičky jim vystačily na postavení tří schodů a dvě zbyly. Objevili se však i žáci, kteří tento příklad již řešili z paměti. Jejich představa jednotlivých trojúhelníkových čísel (pomocí schodů) byla natolik silná a správná, že dokázali nahradit fyzickou manipulaci s kostičkami operacemi myšlenkovými a úlohu pomocí nich správně vyřešit.

Žáci byli tímto způsobem práce přímo nadšeni. Měli pocit, že si hrají, a ne že dělají skutečně solidní matematiku. Ač je školská matematika pro mnoho lidí královskou vědou pro vytváření komplexů, dařilo se nám právě pomocí výzkumného přístupu komplexu mentálně retardovaných dětí léčit. Ukázalo se, jak důležité je, jakým způsobem se matematika s dětmi dělá. Idea vtělená do vzorce (3) byla objevena jak gymnaziálními studenty, tak i mentálně retardovanými dětmi a oběma skupinám přinesl tento objev silný zážitek. Vždy jsme však pracovali v jiné rovině.

Uveďme několik postřehů paní učitelky, která prováděla výše uvedená a některá další zkoumání s žáky zvláštní školy:

Žáci brali práci jako hru, která je plně zaujala.

Při práci měli řadu nesprávných návrhů, ale většinu svých nesprávností sami objevili a dokonce dodatečně i zdůvodnili, proč jsou nesprávné. Velmi rychle se přestali bát přiznat se k omylu. Tento způsob práce brali jako jinou matematiku.

Po několika různých návrzích se obvykle později objevil ten správný – žáci se k němu postupně dopracovali.

Žáci sami chápali podstatu problematiky mnohem rychleji, než jsem si předem představovala.

Žáky jsem „taktně“ vedla, a to především formou otázek.

Na konci každé vyučovací hodiny chtěli žáci vědět, co bude příště. Jak budou pokračovat? Dávali tak jasně najevo svoji zaujatost pro věc.

Žáci okolních tříd se dožadovali, aby dělali matematiku také takto.

Když náš experiment skončil, ptali se žáci, proč i dál nemohou dělat matematiku stejným způsobem.

*Na tomto místě si neodpustíme následující **poznámku**. Pokud skutečně chceme žáky a studenty naučit určité chování charakteristické pro tvůrčí matematickou činnost – a to je pravděpodobně jedna z nejcennějších věcí, kterou matematika může žákům a studentům dát, pak bychom mohli **využívat i starověkou nebo i středověkou matematiku** (např. figurální čísla nebo Fibonacciho čísla). To byla matematika ještě velmi průhledná a zajímavá, neboť řešila mnoho praktických problémů. Musíme však při tom samozřejmě užívat dnešní jazyk a navíc musíme s touto matematikou zacházet způsobem, který odpovídá dnešku.*

Zkoumání v číselné tabulce s žáky obecné školy

Podějme ještě malou ukázkou řízeného zkoumání, které jsme dělali s „normálními“ žáky čtvrté a páté třídy. Předpokládáme, že žáci znají čísla do 100, či lépe do 200, a že v tomto oboru umí sčítat. Budeme potřebovat několik tabulek znázorněných na obr. 5 a dále

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Obr. 5

pastelky na vyznačování obdélníků. Pokud budeme zadávat příklady v dolní části tabulky, bude třeba naši tabulku rozšířit až do 200.

Vyznačte si v tabulce číselný obdélník

4	5	6
14	15	16

. Sečtěte čísla v protilehlých

rozích.

Jaké součty dostanete? $14 + 6 = 20$ a $4 + 16 = 20$. Oba součty jsou stejné.

1. Rozšiřte zadaný obdélník o jeden sloupeček vlevo a jeden sloupeček vpravo.

Dostaneme obdélník

3	4	5	6	7
13	14	15	16	17

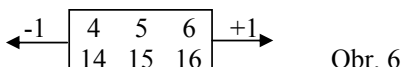
. Spočítejte součty protilehlých rohových čísel.

Rozšiřte tento obdélník opět o jeden sloupeček vlevo a jeden sloupeček vpravo a spočítejte součty protilehlých rohových čísel.

Po dalším **experimentování** je možné vyslovit:

Hypotéza (domněnka): Rozšíříme-li obdélník o jeden sloupeček vlevo a současně o jeden sloupeček vpravo, součty protilehlých rohových čísel se nezmění.

Zdůvodnění hypotézy: Rozšířením obdélníku doleva se levá rohová čísla zmenší o 1 a současným rozšířením obdélníka o jeden sloupeček doprava se pravá rohová čísla zvětší o 1. Proto součty zůstanou stejné (viz obr. 6).



Obr. 6

2. Opakujte zkoumání z předchozího příkladu 1 na obdélník:

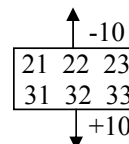
21	22	23
31	32	33

. Tentokrát musíme obdélník rozšiřovat nahoru a dolů.

Hypotéza na závěr **experimentování**: Vždy, když rozšíříme obdélník o jeden řádek nahoru a současně o jeden řádek dolů, dostaneme obdélník se stejnými součty protilehlých rohových čísel.

Zdůvodnění: Přidáme-li horní řádek, zmenší se horní rohová čísla o 10. Pokud přidáme dolní řádek, zvětší se dolní rohová čísla o 10. Celkový součet se tak skutečně nezmění (viz obr. 7)

Takto můžeme v experimentování pokračovat. Později lze obdélník rozšiřovat a zužovat současně jak ve vodorovném, tak i svislém směru.



Obr. 7

Způsob zkoumání, jehož část jsme právě ukázali, můžeme označit jako **geometrický**. My bychom však k dané problematice mohli přistupovat také **aritmeticky**. Každý obdélník vlastně představuje rozklad daného čísla na dva součty protilehlých rohových čísel. Např.:

$$20 = 1 + 19 = 2 + 18 = 3 + 17 = \underline{4 + 16} \text{ (viz obr. 6)} = \dots = \underline{14 + 6} \text{ (viz obr. 6)} = \dots$$

S tabulkou znázorněnou na obr. 5 můžeme dělat mnoho dalších zkoumání.

Poznámka: Když žáci pochopili, proč se součty protilehlých rohových čísel při vodorovném rozšiřování nebo zužování obdélníku nemění, přistoupila paní učitelka ke svislému rozšiřování a zužování (viz výše). Po prvním experimentu jedna žákyně vykřikla: „Zase to vychází!“. Na to ji jeden spolužák (žák čtvrté třídy) řekl: „**To může být náhoda. Víš, že se to má nejdřív mockrát zkusit, a když to vychází, tak se má přijít na to, proč to vychází.**“ Tato doslovná citace hezky ukazuje, že žák na své úrovni dobře pochopil, co je to výzkumný přístup při pronikání do matematiky.

Na závěr uvedme několik názorů z diplomových prací³ tří studentek kombinovaného studia pro první stupeň ZŠ. Všechny se zabývaly tím, jak do matematiky pronikat pomocí zkoumání.

Pro mě pak bylo největším přínosem to, že jsem se dokázala oprostit od zavedených a osvědčených metod a forem práce, které jsou mi po patnácti letech praxe vlastní.

Při práci na diplomovém úkolu jsem si ověřila, že pro žáky je výzkumný přístup aktivizujícím a efektivním prostředkem k získávání nových dovedností, a proto bych jej i v budoucnu chtěla ve své pedagogické činnosti využívat.

Libily se mi i spontánní reakce dětí. Např. při úplném dopsání kalendářové tabulky a barevném rozlišení⁴ Lucka s úžasem řekla: „To je krásný.“ Ano, bylo, ale hlavně to, že to dokázaly, a že práce „výzkum“ jak si ji samy pojmenovaly, se jim zdařila. Důležitá byla i chuť s jakou k práci přistupovaly. Tento způsob výuky určitě využijeme, a to nejenom v hodinách matematiky.

Literatura

1. Kopka, J. *Výzkumný přístup při výuce matematiky*. 1.vyd. Ústí nad Labem: UJEP, 2007. 169 s. ISBN 978-80-7044-926-4.
2. Kopka, J. *Hrozny problémů ve školské matematice..* 1.vyd. Ústí nad Labem: UJEP, 1999. 194 s. ISBN 80-7044-247-6.
3. Vopěnka, P. *Předmluva k textu J. Kopky: Metody řešení matematických úloh*
Dostupné na World Wide Web:
http://www.katmatprf.ujepurkyne.com/materialy/KMA_projektyrozvojeFRVS1.pdf
3. Diplomové práce A. Vojtěchovské, J. Selepové, H. Amlerové.

Kontaktní adresa

Jméno Prof. RNDr. Jan Kopka, CSc.

katedra matematiky Přírodovědecká fakulta UJEP

Adresa pracoviště České mládeže 8, Ústí nad Labem 400 96

Telefon: +420 475 583 361

E-mail: kopkaj@sci.ujep.cz

³ Diplomové práce 4

⁴ Výzkum zvaný Počítání pomocí kalendáře.

AUTOKOREKTÍVNE KARTY Z POHLADU ŽIAKOV A UČITEĽOV

Štefan KOVÁČIK

Abstrakt

Učebnice, pracovné zošity a zbierky úloh poskytujú dostatok úloh na vytvorenie počtárskych zručností a zvládnutie učiva. Už zriedkavejšie sa v nich vyskytuje dostatok úloh pre nadaných žiakov. Využitie tvorivého potenciálu učiteľov na tvorbu učebníc je nereálne. Naproti tomu tvorba autokorektívnych kariet je vynikajúcim priestorom pre tvorivú prácu učiteľa, ktorý zlepši jeho pedagogické zručnosti, a zároveň zvýši efektívnosť vyučovania najmä starostlivosťou o nadaných žiakov.

AUTOCORRECTED CARDS FROM VIEW OF PUPILS AND THEIR TEACHERS

Abstract

Textbooks, workbooks and collections of problems give plenty problems for creation of arithmetical skills and mastering of subject matter. The number of problems for gifted pupils is mostly low. It is unreal to use creative abilities of teachers for creation of textbooks. On the other hand the creation of autocorrected cards is an excellent chance for creative work of teachers. It will improve their pedagogical skills and will increase effective teaching, too, mainly carefulness about gifted pupils.

Úvod

Použitie autokorektívnych kariet (skratka AK) nevyžaduje zásadnú zmeny v štruktúre vyučovacej hodiny. Pozrime sa na pojmovotvorný proces z pohľadu etáp tvorby pojmov, skúmame možnosti využitia autokorektívnych kariet..

1. **etapa:** Vytváranie *predstáv*, pojmov a zovšeobecnení. Vysvetlenie pojmu – názorný výklad nového učiva. Jeho nedeliteľnou súčasťou by mali byť názorné učebné pomôcky, alebo aspoň ich modely a obrazy. Napríklad učiteľ pomocou aplikácii na magnetickej tabuli vysvetlí prečo je $3 \cdot 4 = 12$.
2. **etapa:** Upevňovanie pojmov a nacvičovanie *zručností* – tu sa pre lepšie porozumenie využívajú symboly a schémy. Násobenie môže učiteľ vysvetliť na číselnej osi ako opakované sčítanie rovnakých sčítancov, alebo na štvorcovej sieti, prípadne na počítadle.
3. **etapa:** Zautomatizovanie a vytvorenie *návykov* – je potrebné vypočítať veľké množstvo spojov, aby žiak vedel povedať výsledok bezchybne a za veľmi krátky čas. Tu použitie učebných pomôcok brzdí nácvik počítania.

4. etapa: Využitie zručností a návykov pri teoretickom rozvoji učiva a jeho *abstrakcii*. Doplnenie poznatkov o ďalšie súvislosti a riešenie praktických úloh.

Ak by všetci žiaci postupovali (pri plnom pracovnom tempe) presne rovnako, podľa jednotlivých etáp, učiteľ by stanovoval prechod medzi jednotlivými etapami a učil by vysoko efektívne. V praxi takéto homogénne triedy neexistujú. Takéto skúsenosti má aj Gerová (2001, s. 82) „V každej triede sú takí žiaci, ktorí pracujú (alebo sú schopní pracovať) za hranicami noriem stanovených v matematike pre ich ročník.“ V triedach tak vznikajú tak tri skupiny žiakov: zaostávajúci, priemer a šikovní, čím sa vytvoril priestor pre diferencované vyučovania.

Najmä žiaci, ktorí rýchlo počítajú a dostali sa ako prví do 4. etapy potrebujú vhodné náročnejšie úlohy. Toto je priestor pre použitie autokorektívnych kariet.

1. Autokorektívna karta

Pod autokorektívnou kartou rozumieme kartu s úlohou, ktorú si môže žiak vybrať a samostatne vyriešiť. V praxi sa osvedčilo ak karty spĺňali nasledovné požiadavky:

- A. Zadanie úlohy na karte je také, aby si nevyžadovalo od učiteľa dodatočné vysvetlenie a pomoc pri porozumení. Text zadania môže byť dlhší ako v učebnicových úlohách.
- B. Karta je vytvorená tak, aby žiak do nej nezasahoval a teda, aby bolo možné kartu opakovanne použiť.
- C. Žiak má možnosť samokontroly (bez učiteľa). Ak je správne riešenie na opaku karty so zadaním úlohy, vyžaduje to od žiakov veľkú sebadisciplínu, čo zvedavosť mnohým žiakom nedovolí. Iným riešením je umiestnenie výsledkov na inej karte, alebo hárku.
- D. Úlohy môžu byť zadané tradične (napríklad textom), alebo netradične (obrázkom, schémou...). Obrázok je vítaným motivačným doplnkom karty.
- E. Je osožné, ak karta obsahuje pointu, poučenie, prípadne odhalenie nejakého nového poznatku. Zvyšuje to motiváciu a lákavosť karty.
- F. Karta má byť stručná, aby ju žiak stihol vyriešiť na hodine. Na druhej strane, niektorým učiteľom sa osvedčilo dokončovanie úloh na kartičkách doma.
- G. Osvedčilo sa označenie kariet podľa náročnosti – napríklad hviezdikami, kde najnáročnejšie karty mali tri, alebo štyri hviezdčky.
- H. Pri zostavení rozsiahlejšej kartotéky je potrebné označiť karty podľa ročníkov a tematických celkov, značenie doplniť účelným číslovaním.

2. Autokorektívne karty v učiteľskej príprave

V predmete didaktika matematiky vypracúvajú študenti seminárnu prácu: „Autokorektívne karty“. V nej vytvoria 20 kariet. Za cenný doplnok seminárnej práce považujeme ich použitie na vyučovaní počas praxe. Hoci mnohé z kariet nespĺňajú požiadavky kladené na dobrú autokorektívnu kartu, považujeme seminárnu prácu za osožnú súčasť prípravy budúcich učiteľov.

Jednou z ponúkaných tém diplomových a záverečných prác je tvorba autokorektívnych kariet z matematiky, ale v zozname diplomových fakulty prác som našiel AK aj v iných disciplínach.

3. Trochu štatistiky

V šiestich diplomových prácach [1], [2], [5], [6], [7], [8] ich autori vykonali pedagogický výskum na vzorke 202 žiakov. (Výsledky siedmej práce sme nevedeli

použiť.) Hoci každý z autorov práce si vytvoril vlastné hypotézy a vlastný prístup ku skúmaniu problematiky, podarilo sa výsledky interpretovať v spoločnej tabuľke. Z nej čítame, že napriek tomu že sa do výskumu zapojili najlepší žiaci, 14,7 % z nich malo problém so samostatným porozumením textu. Zo všetkých skúmaných žiakov len 23 žiakov (11,3 %) nedokázalo vyriešiť ľahko (bez problémov) vybrané úlohy. Toto nepovažujeme za nedostatok, lebo úlohy boli určené pre nadaných žiakov. Iba piatim žiakom, čo je 2,5 %, sa autokorektívne karty nepáčili, ostatní ich hodnotili kladne.

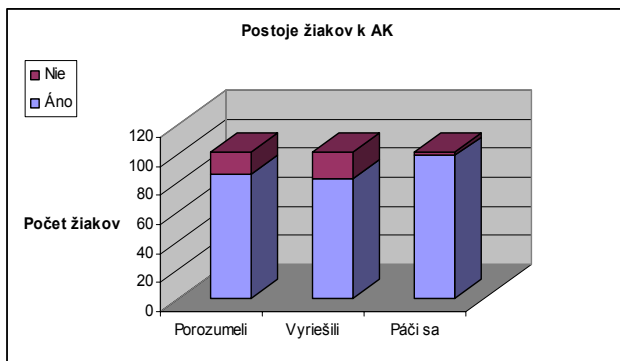
Zo slovného hodnotenia autorov záverečných a diplomových prác parafrázujem. „Je to výborný spôsob ako zamestnať šikovných žiakov a pritom ich učiť. Učiteľ má v tom čase voľné ruky a môže sa venovať slabším žiakom, ktorí ho potrebujú.“

Tabuľka č. 1.

Autor	Základná škola	Počet žiakov	Porozumeli text		Vyriešili ľahko		Páči sa deťom	
			áno	nie	áno	nie	áno	nie
Szilárdy	Ožďany 1.st.	18	14	4	14	4	18	0
Homolová	Revúca 1. st.	60	47	13	42	5	59	1
Bujnová	Fiaľkovo 1. st.	11	10	1	9	2	11	0
Babišová	Staškov 1. st.	12	11	1	9	2	10*	2*
Mariašová	6. ročník	20	20	0	15*	5*	18	2
Rybárová	5. ročník	81	70*	11*	76	5	81*	0*
	Spolu	202	172	30	165	37*	197	5
	V percentách	100%	85,2%	14,8%	81,6%	11,4%	97,5%	2,5%

Výsledky výskumu autokorektívnych kariet.

Graf č. 1.



** Poznámka:
Číselné údaje s (*) sú iba vypočítané. Autori týchto prác ponúkli deťom škálované odpovede s viacerými možnosťami. Žiakov so strednými odpoveďami sme rozdelili do dvoch jednoznačných skupín áno/nie.*

Výsledky výskumu autokorektívnych kariet

4. Autokorektívna karta z pohľadu učiteľa a žiakov

Informácie sme čerpali od učiteľov na praxi, učiteľov – študentov diaľkového štúdia, a študentov denného štúdia, ktorí počas súvislej praxe pracovali s AK. Niektorí učitelia si po určitom čase vytvorili databázu AK ku každému tematickému celku.

Je dôležité, aby sa žiaci naučili s kartami samostatne pracovať. Počiatočné problémy s porozumením úloh sa pomerne rýchlo stratili. Učitelia konštatovali, že sa zdokonalila zručnosť žiakov čítať s porozumením. Žiaci riešili úlohy z AK v zošitoch,

alebo na papier, kde si vytvorili podklad, nakreslili tabuľky, načrtli schému, alebo zápis na čistom papieri. To žiakov viedlo ku zdokonaľovaniu grafických zručností.

Učiteľ má možnosť pri výbere kartičiek niekedy žiakom poradiť. Tým sa autokorektívnosť čiastočne stráca. Ak žiak vyrieši najprv ľahšiu úlohu, obvyčajne potom dokáže vyriešiť jej náročnejšiu obmenu úlohy.

Pôvodným zámerom bolo vytvoriť autokorektívne karty len pre šikovných žiakov, ktorí učivo zvládli veľmi rýchlo a majú voľný čas. Takéto karty svojím obsahom patria do tretej a štvrtej etapy. Ak právo riešiť úlohy z kartičiek mali len lepší žiaci – považovali to za svoju výsadu. Slabší žiaci sa tiež domáhali tejto výsady a chceli riešiť úlohy z kartičiek. Často veľmi usilovne a húževnato riešili aj tie najťažšie. Ak ich nestihli vyriešiť počas hodiny, brali si kartičky domov. Kartičky zvýšili záujem žiakov o matematiku.

Objavili sa aj prípady, že žiaci považovali AK za trest a prácu navyše. Učitelia dokázali postoj žiakov zmeniť najmä tým, že do kariet vkladali prvky zábavnej matematiky.

Gerová a Klenovčan (2007, s. 49) pri skúmaní zvládnutia učiva na vysokoškolských identifikovali podobné javy (záujem o prácu navyše a schopnosť zvládnutia): „Za dôležitý nástroj pre rozvoj matematickej gramotnosti považujeme úlohy poskytnuté v položke *Prémiové úlohy*. ... Túto možnosť na prezentáciu aspoň jednej úlohy využilo 47 študentov z celkového počtu 101 študentov.“

Učebné osnovy stanovujú povinnosť slabších žiakov zvládnuť základné učivo. Toto bol priestor pre vytvorenie AK pre slabších žiakov. Ich obsahom sú najmä činnosti z druhej a tretej etapy, ktoré obsahujú úlohy na zdokonaľovanie základných počtárskych zručností.

Zaznamenali sme aj úspešný pokus použitia AK pomocou počítača. Jeden z diplomantov (študent diaľkového štúdia) vytvoril v PowerPointe prezentáciu zadávajúcu AK. Žiaci, ktorí s programom pracovali riešili úlohy do zošita. S týmto programom pracovalo len 18 žiakov. O program mali žiaci veľký záujem.

Záver

Ak zhrnieme klady a nedostatky autokorektívnych kariet, konštatujeme, že autokorektívne karty:

- sú jedným z prostriedkov zvyšovania efektívnosti vyučovania,
- ich vedľajším pozitívnym efektom je zdokonaľovanie čítania s porozumením,
- umožňujú zdokonaľovať grafické zručnosti žiakov, na ktoré v požívaných pracovných zošitoch je nedostatok priestoru,
- vytvárajú priestor pre efektívne diferencované vyučovanie,
- posilňujú motiváciu a pestujú kladný vzťah k matematike.

Jediným nedostatkom bola časová náročnosť na prácu učiteľov. Za úváženie by stála distribúcia najlepších kariet (na papieri) aj do iných tried a škôl. Určite efektívnejšie by bolo vytvorenie sady AK pre počítač, tieto by sa mohli šíriť pomocou internetu.

Literatúra:

1. BABIŠOVÁ, H.: Autokorektívne karty z matematiky. Diplomová práca, PF UMB 2005.
2. BUJNOVÁ, M.: Autokorektívne karty z matematiky pre 1. až 4. ročník ZŠ. Diplomová práca, PF UMB, 2006.

3. GEROVÁ, Ľ.: *Niektoré stratégie riešenia matematických problémových úloh na 1. stupni základnej školy*. In.: Zborník príspevkov z konferencie Matematika v škole dnes a zajtra, PF KU Ružomberok, 2001.
4. GEROVÁ, Ľ., KLENOVČAN, P.: *Rozvíjanie matematickej gramotnosti budúcich učiteľov elementaristov*. In.: Zborník z konferencie Vyučování matematice z pohledu kompetenci žáka a učitele 1. stupně základního vzdělávání – Srní 2007. ISBN 978-80-7043-548-9
5. HOMOLOVÁ, K.: Autokorektívne karty z matematiky pre 1. stupeň ZŠ. Diplomová práca, PF UMB, 2006.
6. MARIAŠOVÁ, S.: Autokorektívne karty z matematiky pre 6. ročník ZŠ. Závěrečná práce, PF UMB, 2005.
7. RYBÁROVÁ, M.: Autokorektívne karty z matematiky pre 5. ZŠ. Závěrečná práce, PF UMB, 2005.
8. SZILÁRDY, G.: Autokorektívne karty z matematiky pre 1. stupeň ZŠ. Diplomová práca, PF UMB 2006.

Kontaktná adresa

*RNDr. Štefan Kováčik, PhD.
katedra matematiky, PF UMB
Ružová 13, Banská Bystrica
Telefón: +421 48/436 4411
E-mail: skovacik@pdf.umb.sk*

STRATEGIE ŘEŠENÍ SLOVNÍCH ÚLOH V 1. - 3. ROČNÍKU ZÁKLADNÍ ŠKOLY

Alena KRATOCHVÍLOVÁ, Šárka PĚCHOUČKOVÁ

Abstrakt

V prvním, druhém a třetím ročníku základní školy probíhaly experimenty, jejichž cílem bylo zmapovat strategie řešení slovních úloh. Z průzkumu jsme zjistili, že žáci při řešení slovních úloh nejvíce využívali aritmetické strategie. Méně děti řešily slovní úlohu pomocí vizualizace struktury slovní úlohy nebo kombinací obou strategií.

SOLUTION STRATEGY OF VERBAL PROBLEMS IN THE 1ST – 3RD CLASS OF PRIMARY SCHOOL

Abstract

The first grade pupils, the second grade pupils and the third grade pupils participated in experiments. The goal was to map the solution strategies of verbal problems. From the research we have elicited that most pupils solved verbal problems using the arithmetical strategies. Less children solved the verbal problem using visualisation of the structure of the verbal problems or using combination of these strategies.

1. Úvod

V hodinách matematiky by nemělo jít o pouhé numerické počítání, ale především o rozvíjení myšlení žáků a propojení matematických poznatků s ostatními předměty. Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (Jeřábek a kol., 2005) v tomto smyslu zdůrazňuje, že vzdělávací oblast matematika a její aplikace je založena především na aktivních činnostech, které jsou typické pro práci s matematickými objekty a pro užití matematiky v reálných situacích. Proto jedním z výstupů tématického okruhu Číslo a početní operace je řešení úloh, ve kterých žák aplikuje osvojené početní operace. Rovněž tématický okruh Nestandardní aplikační úlohy se zaměřuje na řešení jednoduchých praktických slovních úloh.

Vzhledem k tomu, že najít správné řešení dané slovní úlohy není vždy pro žáky jednoduchou záležitostí, staly se slovní úlohy předmětem mnoha zkoumání. Výzkumy se zaměřily na text slovní úlohy, na proces uchopování i strategie řešení.

Sonda, která bude v následujícím textu popsána, si dala za cíl zjistit právě různé strategie, které používají žáci prvních, druhých a třetích ročníků základní školy při řešení slovních úloh.

2. Vymezení základních pojmů

Slovní úlohou budeme rozumět obvykle úlohu z praxe, ve které je popsána určitá reálná situace, jež vyúsťuje v problém. Ten je možné řešit buď v realitě, nebo matematicky (Divíšek, 1989).

Pojem strategie zavedl do didaktiky G. Polya, jenž zkoumal řešitelskou strategii jako plán toho, jak budeme řešit nějaký problém. Autoři Hejný, Michalcová (2001) vymezují strategii jako plán, podle kterého člověk uskutečňuje nebo zamýšlí uskutečnit cíl sledující činnost. Přitom nepožadují, aby plán byl detailní, a za strategii nepovažují schopnost tvořit plán činnosti. Strategie nemusí být promyšlená, člověk může postupovat spontánně, nemusí vědět, že používá tu či onu strategii.

Při klasifikaci strategií řešení slovních úloh jsme vycházeli z Novotné (2000), ale její typologii jsme upravili s ohledem na zkoumání dětí mladšího školního věku. Strategie jsme rozdělili na tyto typy:

1. strategie pokus – omyl
2. strategie aritmetická: řešitel nepoužívá pro výpočet výsledku úlohy rovnici
3. strategie algebraická: při řešení úlohy je používána jedna nebo více rovnic
4. strategie využívající vzhled do problému: žáci vyhledávají vlastní postupy, které nejsou typicky školské
5. strategie využívající vizualizaci struktury slovní úlohy: žáci řeší slovní úlohu pomocí znázornění
6. kombinace uvedených strategií

3. Zkoumání na základní škole

Během školního roku 2005/2006 probíhaly na základních školách sondy, jejichž úkolem bylo:

- a) zjistit, jaké strategie používají děti mladšího školního věku (prvního, druhého a třetího ročníku základní školy) při řešení slovních úloh
- b) zjistit, zda žáci prvního ročníku používají jiné strategie než žáci druhého, resp. třetího ročníku
- c) porovnat úspěšnost řešení daných úloh v uvedených ročnících.

Zvolili jsme formu testů, které jsme zadali žákům prvních, druhých a třetích ročníků na základních školách v Plzni a v Sušici. Celkově se sondy zúčastnilo 81 žáků prvních ročníků, 82 žáků druhých ročníků a 85 žáků třetích ročníků. Vzhledem k tomu, že testy v jednotlivých třídách zadávali sami vyučující, byly pro ně připraveny pokyny k zadání práce s charakteristikami jednotlivých slovních úloh.

Slovní úlohy v testech byly řazeny od nejjednodušších po složitější, aby hned na začátku nebyli žáci odrazeni případným neúspěchem při řešení náročné slovní úlohy. Zároveň úspěch motivoval k další práci. V každém testu byla tedy jednoduchá slovní úloha, u které jsme předpokládali, že ji zvládnou všechny děti. Test byl rozpracován do několika částí, aby žáci nemuseli celou vyučovací hodinu řešit pouze slovní úlohy a aby vyučující mohli zařadit slovní úlohu podle potřeby výuky, aniž by byl narušen jejich styl vedení vyučovací hodiny.

3.1 Test pro první ročník

Test byl složen z pěti slovních úloh. Rozhodli jsme se pro takové úlohy, jejichž textům by žáci plně porozuměli a slova užitá v zadání odpovídala jejich čtenářským dovednostem v polovině prvního ročníku. Tři z úloh byly jednoduché na sčítání resp. odčítání v oboru přirozených čísel do deseti. Jedna úloha měla více otázek a poslední

úloha byla slovní úloha s porovnáváním a skládala se ze dvou jednoduchých slovních úloh. Test byl zadán v únoru.

1. Míla má 2 pastelky. Pavel má 3 pastelky. Kolik pastelek mají dohromady?
2. Jana dostala 5 bonbónů. 3 bonbony dala Evě. Kolik bonbónů Janě zbylo?
3. Honzík si hrál s autíčky. Měl jich 5, ale jedno se mu rozbilo. Kolik autíček mu zůstalo?
4. Maminka připravila pro Alenku a Pavlíka snídani. Alenka snědla 1 rohlík a Pavlík snědl 2 rohlíky.
 - a) Kdo snědl více? Porovnej.
 - b) Kolik rohlíků snědli dohromady?
 - c) Kolik rohlíků maminka koupila, když na míse ještě dva rohlíky zbyly?
5. Tom postavil 4 autíčka. Letadel postavil o 2 méně.
 - a) Kolik složil Tom letadel?
 - b) Kolik složil autíček a letadel dohromady?

Při řešení slovních úloh většina dětí používala aritmetickou strategii, tedy úlohu řešily pomocí příkladu. U úloh 1, 2, 3 se u deseti dětí objevila také strategie využívající vizualizaci struktury slovní úlohy a u šesti dětí kombinace aritmetické strategie s vizualizací struktury slovní úlohy. Sedmnáct dětí došlo k výsledku úlohy 5 na základě strategie pokus – omyl; pouze dosazovaly čísla do odpovědi.

Nejnáročnější slovní úlohou byla úloha 4c), vyřešilo ji správně pouze 16 dětí. Ostatní nezískali vhled do její struktury. Slovo „zbyly“ chápaly děti jako signální slovo k použití operace odčítání a došlo k chybnému uchopení úlohy. Příčinou mohlo být to, že děti v této době ještě neměly dostatek zkušeností s řešením slovních úloh obsahujících antisignál. Problémy dělala žákům také skutečnost, že v části úlohy 4c) byl zadán pouze jeden údaj, druhý musely převzít z části předchozí.

3.2 Test pro druhý ročník

Při sestavování testu jsme vycházeli z praktických činností, se kterými se žáci mohou setkat. Test obsahoval čtyři slovní úlohy – jednoduchou slovní úlohu se třemi otázkami na sčítání, resp. odčítání bez přechodu desítky, jednoduchou slovní úlohu se dvěma otázkami na odčítání s přechodem desítky, resp. sčítání bez přechodu desítky, jednoduchou slovní úlohu na odčítání s přechodem desítky a složenou slovní úlohu typu o n více se dvěma otázkami. Součástí poslední úlohy byl i výtvarný úkol.

- 1
 - a) Tomáš dostal od tatínka 12 korun na svačinu. Maminka mu ještě pětikorunu přidala. Kolik korun měl Tomáš?
 - b) Na svačinu si koupil koláček za 7 korun. Kolik korun ještě Tomášovi zbylo?
 - c) Ze zbývajících peněz koupil své sestřičce lízátko za 3 koruny. Kolik korun Tomášovi ještě zůstalo?
 - d) Co by sis ty koupil za zbývajcí peníze?
- 2
 - a) Hanička vypočítala 8 příkladů. Jirka vypočítal o 3 příklady více. Kolik příkladů vypočítal Jirka?
 - b) Kolik příkladů vypočítali dohromady?
3. Katka dostala knihu, která má 16 stran. První den přečetla 9 stránek. Kolik stránek jí zbývá přečíst?

- 4 a) Tatínek našel 7 hřibů a 2 bedly. Maminka našla o 4 hříby více, ale žádnou další houbu. Kdo našel více hub?
- b) Kolik hub našli dohromady?
- c) Sbíráš také houby? Víš, jak vypadá hříbek? Pokud ano, nakresli ho.

Při řešení slovních úloh 2 a 4 použily děti pouze aritmetickou strategii. Jedna čtvrtina žáků řešila slovní úlohu 1 a také slovní úlohu 3 na základě kombinace strategie využívající vizualizaci struktury slovní úlohy a strategie aritmetické. Mimo dva žáky se jednalo o děti jedné třídy ze základní školy v Sušici. Po konzultaci s jejich paní učitelkou jsme zjistili, že při řešení jednoduchých slovních úloh je od žáků jako součást procesu řešení vyžadováno znázornění. Uvedenou strategii mají tedy děti „zautomatizovanou“ z hodin matematiky.

Největší problémy dělalo žákům řešení slovní úlohy 4a), u většiny došlo k chybnému uchopení slovní úlohy. Tři číselné údaje v zadání vedly děti k sečtení těchto čísel a nesprávnému zjištění, že maminka našla 13 hub. Z výsledku této části pak vyplynulo chybné řešení další části, ačkoliv řada dětí již zde uchopila slovní úlohu správně.

3.3 Test pro třetí ročník

Test obsahuje nejen slovní úlohy na sčítání a odčítání, jak tomu bylo v předchozích ročnících, ale také slovní úlohy s operacemi násobení a dělení. Zadání je tvořeno jednoduchou slovní úlohou na násobení v oboru násobílek, slovní úlohou typu n krát méně se dvěma otázkami, slovní úlohou se dvěma otázkami na sčítání a odčítání v oboru do 100, složenou slovní úlohou využívající vztahu přímé úměrnosti a složenou slovní úlohou na sčítání a odčítání v oboru do 100.

1. O prázdninách byly děti na třítydenním pobytu u moře. Kolik dnů trval tento pobyt?
2. Rumcajs s Cipískem šli do lesa Řáholce na houby. Rumcajs našel 12 hřibů. Cipísek jich našel 3krát méně než Rumcajs.
 - a) Kolik hřibů našel Cipísek?
 - b) Kolik hřibů našli dohromady?
3. Maminka Starostlivá má 100 korun. Koupila pečivo za 38 Kč, ovoce za 27 Kč a sušenky za 8 Kč.
 - a) Kolik korun maminka za nákup zaplatila?
 - b) Kolik korun jí ještě zbylo?
 - c) Co bys mohl ještě za zbývající peníze koupit?
4. Petra Mlsná si koupila za 18 Kč 6 lízátek. Kolik korun by zaplatila za 10 stejných lízátek?
5. Radka Spořivá měla v pokladničce 37 Kč. Od babičky dostala 56 Kč. Za dárek utratila 27 Kč. Kolik korun má nyní v pokladničce?

Úlohy 1, 2 a 5 řešili žáci pouze použitím aritmetické strategie. U úlohy 3 jsme zaznamenali dva typy strategií. Aritmetickou strategii použilo 76 žáků, 9 dětí kombinovalo strategii využívající vzhled do problému a strategii aritmetickou. V úloze 4 se kromě aritmetické strategie u 81 dítěte objevila u 4 žáků kombinace strategie pokus – omyl a strategie aritmetické.

Největší potíže měly děti podle předpokladu s úlohou 4. Většina nezískala vzhled do struktury slovní úlohy a následně ji nesprávně uchopila. Neúspěch při řešení byl způsoben zejména tím, že s uvedeným typem slovní úlohy se žáci neměli možnost blíže

seznámit, neboť je zařazen do učebnic pro 4. ročník. Pouze 9 žáků vyřešilo první část příkladem $18 : 6 = 3$, s druhou částí si neporadil nikdo.

4. Závěr

Ve všech třech ročnících používali žáci při řešení uvedených slovních úloh nejvíce aritmetickou strategii. V prvním a druhém ročníku jsme se také ve více případech setkali s použitím strategie využívající vizualizaci struktury slovní úlohy nebo s kombinací této strategie a strategie aritmetické, ve třetím ročníku však děti již slovní úlohy neznázorňovaly. To mohlo být způsobeno tím, že se domnívaly, že „znázornění již nepotřebují“, nebo i vyšším číselným oborem, ve kterém pracovaly. V tomto ročníku došlo naopak k mírnému posunu ke strategii využívající vzhled do problému.

I když řešení slovních úloh je poněkud náročnější než pouhé počítání příkladů, zadané testy nevykazovaly příliš velkou neúspěšnost řešení. Problematickými se pro žáky všech ročníků staly slovní úlohy, s nimiž se zatím příliš nesetkali. Ukázalo se, že děti mají často naučené určité postupy, které zatím u nového typu úloh neznají, a nedovedou samy vytvořit vlastní, například na základě logické úvahy.

Na uvedenou sondu navázaly ve školním roce 2006/2007 experimenty, které se zaměřily na zkoumání strategií, jež používají při řešení slovních úloh žáci 4. a 5. ročníku základní školy, abychom mohli kompletně zmapovat strategie řešení slovních úloh na celém prvním stupni.

Literatura

1. DIVÍŠEK, J. *Didaktika matematiky pro učitelství 1. stupně ZŠ*. 1. vyd. Praha: SPN, 1989. 269 s. ISBN 80-04-20433-3.
2. GRAY, E. M. Tackling the Problems: An Explanation For Success and Failure. In HEJNÝ, M.; NOVOTNÁ, J. (ed.) *Proceedings of SEMT*. Prague: Charles University, 1999. s. 8 – 13. ISBN 80-86039-86-2.
3. HEJNÝ, M.; MICHALCOVÁ, A. *Skúmanie matematického riešiteľského postupu*. 1. vyd. Bratislava: Metodické centrum, 2001. s. 187. ISBN 80-8052-085-2.
4. JERÁBEK, J. A KOL. *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*. 1. vyd. Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze, 2005. 92 s.
5. NOVOTNÁ, J. *Analýza řešení slovních úloh*. 1. vyd. Praha: Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta, 2000. s. 123. ISBN 80-7290-011-0.

Kontaktní adresa

Mgr. Alena Kratochvílová

ZŠ a MŠ Dlouhá Ves

342 01 Dlouhá Ves 107

Telefon: +420 376 526 028

E-mail: alena.kratochvilova@centrum.cz

Mgr. Šárka Pěchoučková, Ph.D.

FPE ZČU v Plzni

KMT FPE, Klatovská 51, 306 14 Plzeň

Telefon: +420 377 636 274

E-mail: pechouck@kmt.zcu.cz

STOCHASTICKÝ GRAF JAKO HRACÍ PLÁTNO K NÁHODNÉ HŘE A JAKO PROSTŘEDEK MATEMATICKÉ ARGUMENTACE

Ireneusz KRECH

Abstrakt

Tento článek se zabývá stochastickým grafem jako hracím plátnem k náhodné hře, jeho konstrukcí jako matematickým problémem a jeho rolí v matematické argumentaci. Článek je zaměřený na didaktiku matematiky, jeho předmětem je organizace fází matematizace, výpočtů a interpretace v matematice pro každého.

STOCHASTIC GRAPH AS A CHART TO A RANDOM GAME AND AS A MEANS OF MATHEMATICAL ARGUMENTATION

Abstract

In this paper we concern with a stochastic graph as a chart to a random game, his construction as mathematical task and his role in mathematical argumentation. It is the paper on didactics of mathematics. The organization of a phase of mathematization, a phase of calculation and a phase of interpretation in mathematics for everyone are the subject of this article.

1. Orientovaný graf neboli digraf, stochastický graf

Orientovaným grafem neboli digrafem nazýváme dvojici $[W, K]$, kde W je libovolná neprázdná množina a K je neprázdná podmnožina kartézského součinu $W \times W$. Prvkům množiny W se říká *uzly* a prvky množiny K nazýváme *hrany*. Je-li (x, y) hrana orientovaného grafu $[W, K]$, říkáme, že x je *počáteční uzel* a y *koncový uzel* hrany. Hranu (x, y) někdy též stručně označujeme $x \rightarrow y$. Hranu (x, x) , kde $x \in W$ nazýváme *petlice*.

Digrafy se zpravidla znázorňují obrázkem, v němž uzlům odpovídají body v rovině a hrany jsou spojnice příslušných bodů. Na orientovaném grafu se hrana opatřuje šipkou směřující od počátečního ke koncovému uzlu.

Pokud je každé hraně digrafu $[W, K]$ přiřazeno kladné reálné číslo, přičemž součet čísel přiřazených hranám se společným počátečním uzlem se rovná 1, pak digraf nazýváme *stochastický graf*. Číslo přiřazené hraně nazýváme *vahou této hrany*. Pokud váha petlice (x, x) je rovna 1, pak x nazýváme *hraničním* nebo *okrajovým uzlem*. Takovou petlici nebudeme v grafu vyznačovat.

V práci ukážeme, že:

- hracím plátnem k náhodné hře je stochastický graf,
- jeho konstrukce je zvláštní matematická úloha,
- tento graf je prostředkem matematizace,

- tento graf je prostředkem argumentace (jde o důkaz, že některé jevy jsou stejně pravděpodobné, že jeden jev je víc pravděpodobný než druhý),
- graf je prostředkem objevování jistých symetrií a současně usuzování pomocí těchto symetrií.

2. Série rubů a líců – Penneyovy hry

Hod mincí, to je náhodný pokus, který má dva možné výsledky:

- padne *líc*, který kódujeme číslicí 0,
- padne *rub*, který kódujeme číslicí 1.

Oba tyto výsledky jsou stejně pravděpodobné a tedy pravděpodobnost každého se rovná $\frac{1}{2}$.

Náhodným pokusem je m -násobný hod mincí. Výsledek m -násobného hodu mincí kódujeme m -člennou variací množiny $\{0, 1\}$ (její j -tý člen je výsledkem j -tého hodu mincí). Je 2^m všech výsledků m -násobného hodu mincí a každý je stejně pravděpodobný, a tedy pravděpodobnost každého výsledku se rovná $\frac{1}{2^m}$, tj. $(\frac{1}{2})^m$.

Každý výsledek m -násobného hodu mincí nazýváme sérií líců a rubů délky m .

Nechť α a β jsou série líců a rubů délky m . Ve hře se opakuje hod mincí tak dlouho, dokud výsledky m posledních hodů neutvoří buď sérii α , tehdy zvítězí hráč H_α , nebo sérii β , pak zvítězí hráč H_β . Takovou náhodnou hru nazýváme *Penneyova hra* a označme $h_{\alpha-\beta}^P$ (viz [2], [5], s. 411 a [6], s. 246).

Náhodný pokus, který se provádí v Penneyově hře $h_{\alpha-\beta}^P$, nazýváme *čekáním na jednu ze dvou sérií α , β líců a rubů*. S tímto pokusem $\delta_{\alpha-\beta}$ spojujeme dva jevy:

$A = \{\text{pokus } \delta_{\alpha-\beta} \text{ skončí získáním série } \alpha\}$

$B = \{\text{pokus } \delta_{\alpha-\beta} \text{ skončí získáním série } \beta\}$

Tyto jevy označujeme: $A = \{\dots\alpha\}$, $B = \{\dots\beta\}$ a jejich pravděpodobnosti:

$P(A) = P(\dots\alpha)$ a $P(B) = P(\dots\beta)$.

Jestliže $P(\dots\alpha) = P(\dots\beta)$, pak hra je spravedlivá (oba hráči mají stejné šance na vítězství). Série α a β nazýváme *stejně dobré*, což zapisujeme $\alpha \approx \beta$.

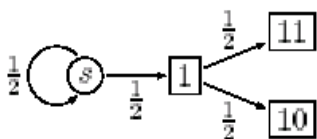
Pokud $P(\dots\alpha) > P(\dots\beta)$, pak série α dává hráči H_α větší šanci na vítězství než série β dává hráči H_β , a tedy sérii α nazýváme *lepší* než sérii β a zapisujeme $\alpha >> \beta$.

3. Graf jako hrací plátno k Penneyově hře a jako prostředek argumentace

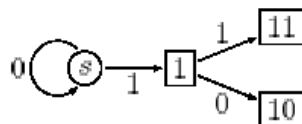
Příklad 1. Nechť $\alpha = 10$ a $\beta = 11$. Rozvažme Penneyovu hru h_{10-11}^P . V této hře se čeká na jednu ze dvou sérií 10, 11 líců a rubů délky 2. Jsou následující stavy tohoto čekání δ_{10-11} :

- $w_1 = s$ – počáteční stav,
- $w_2 = 1$ – padl rub poprvé,
- $w_3 = 10$ – po rubu padl líc (čekání končí, nastal jev $\{\dots 10\}$),
- $w_4 = 11$ – dvakrát za sebou padl rub (čekání končí, nastal jev $\{\dots 11\}$).

Tyto stavy čekání δ_{10-11} interpretujeme jako uzly grafu: $\textcircled{s}$, $\boxed{1}$, $\boxed{10}$, $\boxed{11}$. Nechť $p_{j \rightarrow k}$ označuje pravděpodobnost, s jakou po jednom hodě mincí čekání δ_{10-11} ze stavu w_j přejde do stavu w_k . Pokud $p_{j \rightarrow k} > 0$, pak uzel $\boxed{w_j}$ spojíme s uzlem $\boxed{w_k}$ orientovanou hranou. Číslo $p_{j \rightarrow k}$ připišeme podél hrany $w_j \rightarrow w_k$. Tyto čísla jsou pravděpodobnostmi líce nebo rubu v jednom hodě mincí. Každé hraně je tedy přiřazeno číslo $\frac{1}{2}$. Tento stochastický graf (viz obr. 1) je současně hracím plátnem k Penneyově hře h_{01-11}^P .



Obr. 1 Stochastický graf jako hrací plátno ke hře h^P_{10-11}



Obr. 2 Graf jako hrací plátno k Penneyově hře h^P_{10-11}

Místo tohoto čísla (tj. zlomku $\frac{1}{2}$) jako pravděpodobnosti výsledku hodu mincí přiřazujeme hraně tento výsledek, a tedy číslici 0, která odpovídá líci, nebo číslici 1, která odpovídá rubu. Takto vzniklý graf máme na obr. 2.

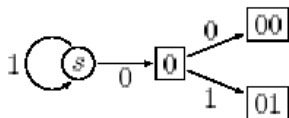
Na začátku hry postavíme figurku do uzlu $\textcircled{0}$. Házíme mincí a po hodu přemístíme figurku podél hrany, které odpovídá výsledek hodu. Hod mincí a přemísťování figurky opakujeme tak dlouho, až se figurka dostane buď do uzlu $\boxed{10}$ (nastane jev $\{\dots 10\}$) a tedy zvítězí hráč H_a) nebo do uzlu $\boxed{11}$ (nastane jev $\{\dots 11\}$) a tedy zvítězí hráč H_b). Uzly $\boxed{10}$ a $\boxed{11}$ jsou cíle.

Tento návrh interpretace průběhu hry (a v podstatě průběhu čekání na jednu ze dvou sérií liců a rubů, tj. náhodného pokusu s náhodným počtem etap), jako náhodné bloudění figurky po stochastickém grafu pochází od Artura Engela (viz [1], [5] a [6], s. 246-252).

Všimněme si, že čekání δ_{10-11} začíná opakováním hodu mincí tak dlouho, až padne rub. V tomto období čekání δ_{10-11} jsou situace obou hráčů stejné). Jakmile se dočkáme rubu (figurka se dostane do uzlu $\boxed{1}$), tak další (následující) hod mincí rozhoduje, který hráč zvítězí (pokud padne líc, pak zvítězí hráč H_a , pokud padne rub, pak zvítězí hráč H_b).

Z uvedených skutečností vyplývá, že figurka se dostane do cíle $\boxed{10}$ se stejnou pravděpodobností jako do cíle $\boxed{11}$. Je tedy $P(\dots 10) = P(\dots 11)$. Tato Penneyova hra h^P_{10-11} je spravedlivá, tedy $10 \approx 11$ (série $\alpha = 10$ a $\beta = 11$ jsou stejně dobré).

Příklad 2. Necht' $\alpha = 01$ a $\beta = 00$. Rozvažme Penneyovu hru h^P_{01-00} . Všimněme si, že pokud na grafu z obr. 2 zaměníme každou číslici 0 na číslici 1 a každou číslici 1 na číslici 0, tak dostaneme graf (viz obr. 3), který je hracím plátnem k Penneyově hře h^P_{01-00} . Hovoříme tady o jistých symetriích, vyplývajících z rolí, jakou v popsané situaci splňují líce (0) a rub (1).

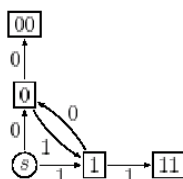


Obr. 3 Graf jako hrací plátno k Penneyově hře h^P_{01-00} .

Penneyova hra h^P_{01-00} je tedy spravedlivá, série $\alpha = 01$ a $\beta = 00$ jsou stejně dobré.

Stochastický graf a jisté symetrie se tedy staly prostředkem argumentace, že dva jevy $\{\dots \alpha\}$ a $\{\dots \beta\}$ jsou stejně pravděpodobné.

Příklad 3. Necht' $\alpha = 00$ a $\beta = 11$. Na obr. 4 máme graf jako hrací plátno k Penneyově hře h^P_{00-11} .

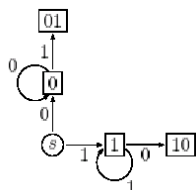


Obr. 4 Graf jako hrací plátno k Penneyově hře h^P_{11-00} .

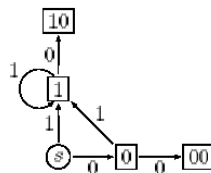
Všimněme si, že pokud na tomto grafu zaměníme role číslic 0 a 1, pak nový graf, který vznikne tímto způsobem, je také hracím plátnem k Penneyově hře h^P_{00-11} . Z těchto symetrií vyplývá, že hra h^P_{00-11} je spravedlivá a tedy že série 00 a 11 jsou stejně dobré ($00 \approx 11$).

Příklad 4. Graf na obr. 5 je hracím plátnem k Penneyově hře h^P_{10-01} . Z obrázku vyplývá, že už výsledek prvního hodu mincí rozhoduje o tom, který z hráčů zvítězí. Z jistých symetrií tohoto grafu vyplývá, že pravděpodobnost, s jakou se figurka dostane do cíle $\boxed{10}$ se rovná pravděpodobnosti, s jakou se figurka dostane do cíle $\boxed{01}$, a tedy $P(\dots 10) = P(\dots 01)$. Série 10 a 01 jsou stejně dobré $10 \approx 01$.

Zdá se, že v případě každých dvou sérií α, β liců a rubů délky 2 je Penneyova hra $h^P_{\alpha-\beta}$ spravedlivá, protože tyto série jsou stejně pravděpodobnými výsledky dvojnásobného hodu mincí. Další příklad je důkazem, že tento intuitivní úsudek je chybný.



Obr. 5 Graf jako hrací plátno k Penneyově hře h^P_{10-01}



Obr. 6 Graf jako hrací plátno k Penneyově hře h^P_{10-00}

Příklad 5. Necht' $\alpha = 10$ a $\beta = 00$. Hrací plátno k Penneyově hře h^P_{10-00} máme na obr. 6. Všimněme si, že:

- pokud se figurka dostane do uzlu $\boxed{1}$, pak dříve, nebo později už se dostane do cíle $\boxed{10}$ (dostat se do cíle 00 z uzlu $\boxed{1}$ není možné),
- figurka se dostane do uzlu $\boxed{00}$ tehdy a jen tehdy, když dvakrát za sebou padne líc,
- pravděpodobnost, že se figurka dostane do uzlu $\boxed{00}$ je rovna $\frac{1}{4}$, tedy $P(\dots 00) = \frac{1}{4}$,
- pravděpodobnost, že se figurka dostane do uzlu 10 je rovna $(1 - \frac{1}{4})$, a tedy $P(\dots 00) = \frac{3}{4}$ (jevy $\{\dots 00\}$ a $\{\dots 10\}$ jsou opačné, a tedy součet jejich pravděpodobností je roven 1),
- série 10 je lepší než série 00, tedy $10 \gg 00$.

Stochastický graf zde byl prostředkem argumentace.

Příklad 6. Necht' $\alpha = 01$ a $\beta = 11$. Hrací plátno ke hře h_{01-11}^P získáme z grafu na obr. 6. Stačí jen každou číslici 1 na tomto obrázku zaměnit za 0 a naopak. Z faktu, že $P(\dots 10) > P(\dots 00)$ a uvedených symetrií vyplývá, že

$$P(\dots 11) = \frac{1}{4}, P(\dots 01) = \frac{3}{4} \text{ a tedy } P(\dots 01) > P(\dots 11).$$

4. Jiné problémy

Všimněme si, že v množině sérií líců a rubů délky 2, a tedy v množině $\{00, 01, 10, 11\}$, jsme určili dvě relace: $\approx$ a $\gg$. Formulování vlastností těchto relací, které vyplývají z představených argumentací, je další matematická činnost. Zdá se, že obě tyto relace jsou tranzitivní. Lze dokázat, že to není pravda. Hledání protipříkladů se tedy stává zvláštní matematickou úlohou.

Zevšeobecníme Penneyovu hru na případ, kdy dvě série líců a rubů nejsou stejné délky (např. jedna je délky 2, druhá délky 3). Vznikají zde otázky:

- Jaké podmínky musí splňovat tyto série, aby hra byla správně určena?
- Může tato hra být spravedlivá?
- Zdá se, že ze dvou sérií líců a rubů různých délek, je vždy série kratší lepší než série delší. Je to pravda?

O jiných zevšeobecněních Penneyových her se hovoří v [2], [3], [5] a [6].

Literatura

1. Engel, A., *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*, Band 1, Ernst Klett Verlag, Stuttgart 1980.
2. Krech, I. *Penneyove hry a ich zovšeobecnenie*, Horizons of mathematics, physics and computer sciences 2/2007, Volume 36, Nitra 2007, s. 1-7.
3. Major, M., Nawolska B., *Matematyzacja, rachunki, dedukcja i interpretacja w zadaniach stochastycznych*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków 1999.
4. Penney, W., *Problem 95: Penney-Ante*, Jurnal of Recreational Mathematics 7 (1974), s. 321.
5. Płocki, A., *Stochastyka dla nauczyciela*, Wydawnictwo Naukowe NOVUM, Płock 2007.
6. Płocki, A., Tlustý, P., *Pravděpodobnost a statistika pro začátečníky a mírně pokročilé*, PROMETHEUS, Praha 2007.

Kontaktní adresa

Dr. Ireneusz Krech
 Instytut Matematyki, Akademia Pedagogiczna
 Ul. Podchorążych 2, 30-084 Kraków
 E-mail: ikrech@ap.krakow.pl

KOOPERATIVNÍ UČENÍ A VYUČOVÁNÍ Z POHLEDU ŽÁKA A UČITELE

Eva KREJČOVÁ

Abstrakt

Příspěvek se zaměřuje na jednu z organizačních forem práce – na skupinové vyučování a učení. Všímá si přístupu učitelů, ale hlavně žáků k tomuto doposud méně rozšířenému vzdělávacímu modelu.

COOPERATIVE LEARNING AND TEACHING FROM THE POINT OF VIEW OF A PUPIL AND OF A TEACHER

Abstract

The paper focuses on one of organisation forms of work - group teaching and learning. It pays attention to teacher attitudes, but mainly to pupil attitudes to this so far not much spread educational model.

Motto 1.

„Nejraději pracuji ve skupince. Navzájem se můžeme poradit a řešení úkolů si společně zkontrolovat. Každý je na něco. Dohromady jsme velká chytrá hlava.“

Michalka (9 let)

Motto 2.

„Skupinové vyučování zařazují téměř každou hodinu matematiky. Děti tuto organizační formu vítají. V menším kolektivu se cítí bezpečněji, jsou otevřenější k vzájemnému dialogu. A také dostávají více příležitostí uplatnit se, pomoci ostatním.“

učitelka Alena K.

Spolupráce, jejímž konkrétním naplňováním ve školské praxi je skupinové vyučování a učení (příp. kooperativní vyučování a učení)¹⁾ patří mezi žádoucí didaktické trendy, jež mohou překonávat meze zatím dominantní frontální výuky. Frontální způsob vyučování u nás převládá. Naznačují to výsledky různých studií, např. Videostudie TIMSS 1999, kde se uvádí, že v české hodině matematiky představuje tato organizační forma 61 % času. I když se jedná o zjištění v 8. ročníku základní školy a také určitý časový odstup, vlastní zkušenosti (dále anketa, rozhovory s učiteli, reflexe studentů z pedagogické praxe) naznačují, že podobná situace je na 1. stupni základní školy.

Proč skupinové vyučování nezaujímá významnější postavení, pokud jde o volbu uplatňovaných forem práce, jsme se částečně dotkli v příspěvku „Kompetence

¹⁾ Srv. Kasíková, H.: Kooperativní učení a vyučování. Praha, Karolinum 2007.

Průcha, J., Walterová, E., Mareš, J.: Pedagogický slovník. Praha, Portál 2003.

a kooperativní učení“ (více viz [4]). Zaměřili jsme se především na postoje učitelů, na to, co jim eventuálně brání v širším zařazování práce ve skupinách.

Na základě anonymního dotazníkového šetření u 72 učitelů 1. – 5. ročníků základní školy doplněného individuálními rozhovory s respondenty lze důvody absence této organizační formy práce ve vyučování vidět především:

- v nedostatku vlastních zkušeností se skupinovou prací v roli žáka, chybí osobní prožitek (příp. není pozitivní)

„Mrzí mě, že jsem se se skupinovým vyučováním jako žačka nikdy nesetkala. Snad jen při laboratorních pracech na 2. stupni ZŠ. A to se nás z důvodu nedostatečného vybavení tísnil kolem jednoho přístroje početný dav. Takové zkušenosti byly spíše negativní. Snad i proto jsem s jeho uplatňováním dlouho váhala.“

učitelka Kateřina H.

- učební texty (pracovní sešity, učebnice, metodické příručky) jsou spíše „stavěny“ na frontální nebo individuální práci

„Ráda bych učila skupinově, chybí ně však potřebná inspirace – návod v metodikách.“

učitelka Věra K.

Tuto okolnost zmiňuje v příspěvku „Moji žáci a já (a matematika) M. Kubínová (více viz [6]).

- náročnější příprava a organizace

„Asi třikrát jsem se pokusila zařadit skupinovou práci. Měla jsem však pocit, že mnou vynaložené úsilí ve fázi přípravy i vlastní realizace nepřinesly očekávané výsledky.“

učitelka Jana S.

- obavy z větší hlučnosti a z nerovnoměrného zapojení žáků do činnosti

„Pro některé z nás přináší skupinová práce díky hodnocení nadřazenými spíše nežádoucí dopad: nezvládneme kázeň.“

učitelka Helena K.

Upřednostňování pořádku před funkční aktivitou žáků a jejím potlačováním, a tedy i přeceňováním role učitele, vnímají oslovení různě. Hodně záleží na zkušenostech, na přístupu pedagoga.

K tomu učitel Petr J.:

„Za každou společnou práci může skupina získat maximálně 3 body: jeden za to, že každý ve skupině pracuje, jeden za to, že skupina nikoho neruší a jeden za splnění úkolu. Děti jsou na tento způsob hodnocení zvyklé. Nemám problémy s kázní, s aktivním zapojením všech členů skupiny.“

Kladně ke skupinovému vyučování a učení, podobně jako učitel Petr J., se přes výše uvedené „potíže“ vyslovuje většina respondentů. Uvědomují si přednosti této organizační formy práce. Spatřují ji především

- ve vzájemné pomoci (na úrovni vrstevnického porozumění) a spolupráci,
- v respektování názorů ostatních,
- ve zvyšování aktivity a výsledné efektivity,
- ve velkém rozsahu podporující interakce,
- v pozitivní vzájemné závislosti, rozvíjení sociálního citění,
- v „bezpečnějším“ klimatu,
- v mnohostranném rozvoji jedince.

Podívejme se nyní na uvedenou problematiku z pozice žáků. Konkrétně: Jaký je jejich zájem o práci ve skupinách? Abychom, alespoň částečně, mohli na uvedenou otázku odpovědět, uskutečnili jsme experimentální šetření. Přitom jsme se zaměřili na předstupeň skupinového vyučování, na práci ve dvojicích.

Experiment proběhl v letním semestru roku 2006/07 v hodinách matematiky 1. – 5. ročníku ZŠ. Jeho hlavními realizátory byli studenti kombinovaného studia oboru učitelství 1. stupně základní školy (III. a IV. ročník). Převážně učí nebo si vyučování domluvili. V rámci řešení seminární práce z didaktiky matematiky zařadili do hodiny matematiky činnost, ke které mohli žáci přistupovat samostatně nebo ve dvojicích – se spolužákem. Dostali možnost svobodné volby co do výběru vyučovací formy, i co do určení případného partnera.

Postup: 1. zadání úkolu,

2. volba formy práce, event. výběr spolužáka,

3. řešení úkolu,

4. kontrola a vyhodnocení,

5. analýza výběru formy (Proč jsem se rozhodl(a) pracovat sám (sama), se spolužákem? Individuální rozhovory s dětmi, písemné odpovědi.).

V práci pak studenti popisovali průběh, charakter matematické činnosti, přístup žáků. Pro potřeby celkového vyhodnocení uváděli požadované statistické údaje a výsledky experimentu. Materiál často doplňovali žákovskou dokumentací a vlastní reflexí.

Do šetření se zapojilo celkem 52 učitelů, kteří uvedeným způsobem oslovili 817 žáků. Jedná se o konečné počty po vyřazení tří seminárních prací, které nebyly z různých důvodů do celkového vyhodnocení zahrnuty ($1 \times$ – neúplné údaje, $1 \times$ – 5. – 7. ročník speciální základní školy, $1 \times$ – atypická situace²⁾).

Pro úplnost dodejme, že vlastnímu experimentálnímu řešení předcházelo zjišťování iniciátorů záměru s cílem posoudit jeho realizovatelnost a stanovit průběh.

Výsledky postojů žáků předkládáme pro přehlednější orientaci, popř. možnost event. porovnání, v podobě tabulky.

Tabulka

Přehled o volbě formy práce: sám (♂) nebo ve dvojici (♂ ♂)

ROČNÍK	CELKOVÝ POČET ŽÁKŮ	♂		♂ ♂		♂ ♂ – ♂ v %
		abs. četnost	v %	abs. četnost	v %	
I.	147	51	34,69	96	65,31	30,62
II.	139	20	14,39	119	85,61	71,22
III.	183	32	17,49	151	82,51	65,02
IV.	158	32	20,25	126	79,75	59,50
V.	190	38	20,00	152	80,00	60,00
celkem	817	173	21,18	644	78,82	57,64

Povšimneme-li si počtu žáků, kteří „reprezentují“ jednotlivé ročníky, vidíme, že jejich zastoupení není zcela vyvážené. Tato okolnost je dána konkrétními možnostmi studentů při řešení seminárního úkolu (kde učí nebo kde měli příležitost zadání

²⁾ Studentka (nyní na mateřské dovolené) uskutečnila hodinu matematiky s požadovaným cílem ve třídě, kde každý žák má svoji lavici (záměr vyučujícího). Žáci jsou zvyklí pracovat pouze samostatně, ve dvojici jen v případě, kdy si někdo zapomene učebnici. Vzájemně si nedůvěřují, domnívají se, že by jim spolužák práci pokazil. Není tedy náhoda, že každý z 23 žáků třídy se rozhodl pracovat samostatně.

vyzkoušet). Největší rozsah dílčích souborů je u žáků 5. ročníku, naopak nejmenší u žáků 2. ročníku.

Tato, ale některé další okolnosti (individuální rozdíly v didaktické interpretaci šetření – motivace, charakter řešeného úkolu, způsob hodnocení, zkušenosti žáků se skupinovým vyučováním aj.) napovídají, že při vyvozování obecněji platnějších závěrů musíme být velice opatrní. I přes tyto eventuality se lze domnívat, že žáci 1. stupně základní školy projevují o párové vyučování (dyády) zájem. Upřednostňují je před možností pracovat individuálně. Téměř 80 % oslovených žáků si zvolilo řešit úkol se spolužákem.

V reflexi na důvod, který je vedl k rozhodnutí pracovat ve dvojici, nejčastěji uváděli:

- příležitost poradit se se spolužákem, ubezpečit se o správnosti řešení

Klárka: „*Chtěla jsem pracovat ve dvojici, abych se mohla ujistit, že to mám správně.*“

- obavy z nezvládnutí, z případné chyby

Dominika: „*Moc tomu nerozumím, bojím se, že udělám chybu. S Luckou si víc věřím.*“

- kamarádské vztahy, vzájemná pomoc

Štěpán: „*Vybral jsem si Honzu, protože je hodný. Je to můj nejlepší kamarád.*“

- každý je na něco, podnětné prostředí

Tereza: „*Já jsem lepší na počítání, Anička to zase umí hezky napsat.*“

Individuálně chtěli pracovat spíše chlapci. Z celkového počtu 173 (tj. 21 % žáků) jich bylo 117. Při výběru formy práce u nich převážně rozhodovaly tyto skutečnosti:

- klid na práci, možnost lépe se soustředit

Radek: „*Já raději pracuji sám, protože mě nikdo neruší a taky se s nikým nemusím dohadovat.*“

- nezpochybnitelnost vlastního podílu; dokázat, že na to mám

Lukáš: „*Myslím, že to umím, chci to udělat sám.*“

Zpravidla se jednalo o žáky, kteří jsou výborní v matematice. Měli pocit, že by je spolužák brzdil, chtěli se prosadit. V této skupině však byli naopak i žáci (podstatně menší počet), kterým matematika tak nejde a nebo jsou kolektivem odmítáni. Klárka na otázku „Proč sama?“ uvedla: „*Nechci, abych to někomu zkazila.*“

Závěr

V příspěvku si všímáme jedné z organizačních forem školní práce, a to kooperativního učení a vyučování (respektive skupinového učení a vyučování) ze zorného úhlu učitelů jako organizátorů, ale hlavně z pohledu žáků jako uživatelů. Stěžejními podklady k prezentování dílčích výstupů bylo anonymní dotazníkové šetření u učitelů a experimentální šetření u žáků 1. – 5. ročníku základní školy. Dále jsme vycházeli z didaktické literatury a vlastních zkušeností.

Pokud jde o náhled učitelů, lze konstatovat, že sice vnímají přednosti skupinového vyučování, ale v jeho (širším) uplatňování jim brání nedostatek vhodných podnětů v učebních textech, náročnější příprava a organizace, obavy z větší hlučnosti a nerovnoměrného vtažení všech účastníků, nedostatek vlastních prožitků a zkušeností. Model, který zažili v roli žáků (frontální vyučování), se pro ně stal jistým vzorem.

Ze strany žáků je skupinové vyučování (konkrétně jeho předstupeň – párové vyučování) žádané, je pro ně přirozenější. Dává jim příležitost aktivněji se zapojit do vyučování, zbavit se obavy z nezvládnutí učiva, najít zázemí v podobě domluvy se spolužákem, a tím se více otevřít dalším informacím a poznatkům.

Literatura

1. Fischer, R.: Učíme děti myslet a učit se. Praha, Portál 1997.
2. Hiebert, J.: Teaching Mathematics in Seven Contries. Washington 2003.
3. Kasíková, H.: Kooperativní učení a vyučování. Praha, Karolinum 2007.
4. Krejčová, E.: Kompetence a kooperativní učení. In: Sborník z konference s mezinárodní účastí Matematika jako prostředí pro rozvoj osobnosti žáka primární školy. Olomouc, UP 2006.
5. Krejčová, E.: Kooperace a její naplňování v matematické přípravě učitelů 1. stupně ZŠ. In: Inovácia v mateamtickej príprave žiakov na 1. stupni UŠ. Trnava, 2007.
6. Kubínová, M.: Moji žáci a já (a matematika). In: Jak učit matematice žáky ve věku 10 – 15 let. Frýdek – Místek 1999.
7. Průcha, J., Walterová, Z., Mareš, J.: Pedagogický slovník. Praha, Portál 2003.

Kontaktní adresa

RNDr. PaedDr. Eva Krejčová, CSc.

Katedra matematiky Pedagogické fakulty Univerzity Hradec Králové

Rokitanského 62

500 03 Hradec Králové

E-mail: eva.krejcova@uhk.cz

MATEMATICKÉ DOMINO

Dita MARYŠKOVÁ

Abstrakt

Matematické domino je hra, která rozvíjí aktivitu žáků a jejich zájem o předmět.

MATHEMATICAL DOMINO

Abstract

Mathematical domino is a game, which develops pupils activity and their interest in the subject.

Hra v matematice

Matematika patří do základního vzdělání již mnoho tisíciletí. Její metody i obsah výuky se mění s rostoucími znalostmi lidstva a také s dostupnou technikou. Již v minulosti si odborníci na vyučování uvědomili, že není příliš efektivní něco žákům jenom vysvětlit, že je nutné, aby sami počítali, hledali způsoby práce a především si poznatky pevně usadili mezi již získanými znalostmi. Zodpovědní učitelé stále hledali a hledají dodnes způsoby, jak učivo předvést ještě zajímavěji.

Před časem se v časopise Moderní vyučování objevilo matematické loto a matematické pexeso^[5], zaměřené na žáky prvního stupně základní školy. V ruské literatuře^[4] jsme našli náznak matematického domina a to nás zaujalo mnohem více. Rozhodnutí jej zařadit do výuky žáků druhého stupně školy padlo téměř okamžitě. Většina z nás si pamatuje na černé obdélníčky s bílými puntíky, které se postupně přikládají k sobě. V matematice jsme v jedné části kostky vytvořili příklad a jeho výsledek jsme umístili do druhé části jiné kostky. Postupně žáci řeší příklady a z kostek skládají lomenou čáru. Pokud jsou příklady vymyšlené správně, vznikne uzavřená lomená čára.

Poprvé jsme použili domino v primě – tedy v 6. ročníku v matematice. Vyzkoušeli jsme schopnost studentů převést zápis římských čísel na arabské číslice a zpět. Domino má obrovskou výhodu v tom, že jej lze napojovat z obou stran. Pokud vidím zadání čísla 99, vím, že musím hledat zápis XCIX. Platí to ovšem i naopak – pokud mám číslo XCIX, hledám 99. Práce je tedy stejná jako u klasického domina. Žáci pracovali ve dvojicích, protože výsledný útvar byl rozložen na celé školní lavici.

Dále jsme pokračovali procvičováním desetinných čísel. Zde se ukázalo, že správné umístění desetinné čárky, je potřeba ještě stále procvičovat. Procvičování formou domina bylo daleko účinnější než tradičním opisováním příkladů z učebnice a počítáním do sešitu. Především v tom, že studenti nemuseli nic psát a mohli se bavit. Čas, který jsme desetinným číslům věnovali se nám vrátil při počítání s celými čísly. Zde se již ukazuje, že lze napojovat pouze z jedné strany – z té druhé je to spíše náhoda.

Hledám-li výsledek násobení $0,5 * 0,4$, musím hledat číslo 0,2. Pokud ovšem vidím výsledek 0,20, nemohu vědět, jestli potřebná dominová kostka bude mít napsané $0,5 * 0,4$ nebo $2 * 0,1$ nebo $100 * 0,002$. Hledání možné je, ale trvá delší dobu.

Přesto si žáci příklady procvičili s chutí a jejich aktivita byla mnohem větší. Domino na sčítání a odčítání celých čísel ukazuje tabulka 1. V levé části je písmenko, které slouží ke kontrole, že je domino sestavené správně, a příklad. V pravé části jsou výsledky příkladů. (Z důvodu úspory místa jsou 2 kostky domina vedle sebe). Pod tabulkou je napsané řešení. Studenti řešení neznají a domino dostanou rozstříhané na proužky. Proužky odpovídají dominovým kamenům. Vhodným uspořádáním je lze poskládat k sobě tak, že vznikne uzavřená lomená čára (mnohoúhelník). V případě celých čísel nejsou „proužky“ rozhodující a studenti mohou dostat zadání na jednom papíře jako sadu příkladů. Ale například u procent se způsob zadání ukázal jako zásadní pro rychlost výpočtu. Především jsme „proužkovou úpravou“ zajistili počítání a omezili hádání výsledků.

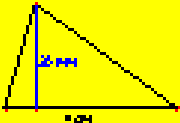
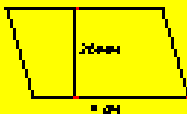
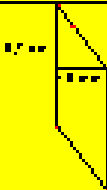
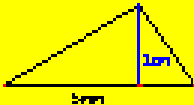
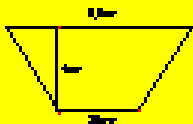
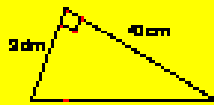
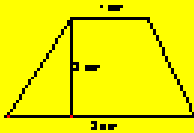
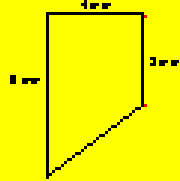
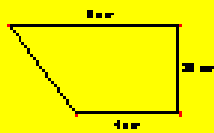
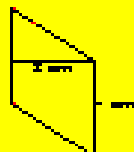
a	$(-2) - (+3) - 6$	0	k	$-1 - (+2) - (-7)$	-8
b	$+4 + (-6) - (-8)$	-11	l	$+2 - (-12) + (-5)$	3
c	$-3 + (-3) - (-6)$	-1	m	$-3 + (-3) + (-2)$	-4
d	$-4 - (-8) + (-3)$	6	n	$+4 + (-8) - (+5)$	9
e	$8 + (-4) - (+5)$	-7	o	$-5 - (+2) + 3$	-3
f	$7 - (-6) - (+15)$	1	p	$+6 - (-4) - (+3)$	-9
g	$-6 + (-5) - (-4)$	-6	q	$-7 + 5 - 1$	-10
h	$8 - 15 + 2$	-2	r	$+8 + (-4) - (+2)$	7
i	$6 - (+10) - 2$	4	s	$-9 - (-6) - (+7)$	5
j	$-10 - (-6) + 7$	-5	t	$+10 - (+12) - (-7)$	2

a - b - d - f - h - j - l - n - p - r - t - s - q - o - m - k - i - g - e - c - a

Tab. 1 – domino na celá čísla

V další výuce jsme zapojili domino na procenta a Pythagorovu větu. Na procenta si studenti vymysleli příklady sami. Jednou z obtížných kapitol matematiky je geometrie a zejména výpočty obvodů a obsahů rovinných útvarů a objemy a povrchy těles. První domino obsahovalo pouze znázorněné geometrické útvary a studenti měli určit jejich obsah. (viz tab. 2 – opět je na konci napsané autorské řešení a písmenka před náčrtky slouží pouze pro řešení a možnost zápisu). V dalších kolech hry jsme zadávali slovní úlohy na rovinné i prostorové úlohy. Opět se potvrdily stále stejné chyby studentů. Na druhou stranu samotné studentské skupiny se strašně zlobily, že jim

domino nevychází a postupně si chyby našly sami. A to byl obrovský úspěch pro ně samotné.

1		16 mm ²	7		6 dm ²
2		7 cm ²	8		12 cm ²
3		4 cm ²	9		24 dm ²
4		8 cm ²	10		16 cm ²
5		15 dm ²	11		5 cm ²
6		30 cm ²	12		6 cm ²
1 - 3 - 6 - 5 - 12 - 8 - 2 - 4 - 10 - 7 - 9 - 11 - 1					

Tab. 2 – domino na obsahy rovinných útvarů

Jsou některé části matematiky, kde jsme si na tuto formu hry ještě netroufli, ale v mnohých oborech se matematické domino osvědčilo. Stále vymýšlíme nové úlohy a nové hry – a nejen učitelé, ale také žáci. Pevně věříme, že pro zpestření výuky se bude používat i nadále.

Závěr

Hra v matematice má nezastupitelnou roli. Žáci si nenásilnou formou procvičují osvojené dovednosti a návyky a upevňují si právě získané poznatky. Jiné formy výuky žáky více baví. Matematika je pro ně zábavou, nikoli nepříjemným školním předmětem. Mnohým z nich se následně stává matematika kamarádkou na celý život.

Literatura

1. HEJNÝ, M., KUŘINA, F. *Dítě, škola a matematika*. Praha: Portál, 2001. ISBN 80-7178-581-4.
2. KASÍKOVÁ, H., VALENTA, J. *Reformu dělá učitel*. Praha, 1994. ISBN 80-901660-0-8.
3. PETTY, G. *Moderní vyučování*. Praha: Portál, 1996. ISBN 80-7178-978-X.
4. КРУТЕЦКИЙ, В., А. *Психология математических способностей школьников*. Москва: Просвещение, 1968.
5. KREJČOVÁ, E., VOLFOVÁ, M. *Matematické loto a matematické pexeso*. [on-line] Dostupné z: <http://www.modernivyucovani.cz/mv/clanek.aspx?a=1&prmKod=MV_MY02A18A> [cit. 2006-11-20]

Kontaktní adresa

*Mgr. Dita Maryšková
Slovanské gymnázium
Tř. Jiřího z Poděbrad 13
77111 Olomouc
Telefon: +420 605 108 427
E-mail: Ditamf@seznam.cz*

PREKONCEPTY A VYVOZENÍ DĚLENÍ NA 1. STUPNI ZŠ

Bohuna MATĚJŮ

Abstrakt

Příspěvek vychází z přesvědčení, že poznávání žáků ve škole má být doprovázeno vhodnou činností a má vycházet z jejich zkušeností. Na řešení dvou úloh je ukázáno, že žáci jsou na intuitivní úrovni schopni používat dělení na části i dělení po částech ještě předtím, než je operace dělení uvedeno ve škole.

PRECONCEPTS AND INTRODUCTION OF DIVISION ON PRIMARY SCHOOL LEVEL

Abstract

The contribution comes from the conviction that the learning process of pupils should be accompanied by suitable activities and should be based on pupils' experience. There paper presents two mathematical problems which pupils are able to solve intuitively using division to parts and division by parts before this operation is actually introduced to them at school.

1. Vyvozování dělení na 1. stupni ZŠ

Zvládnutí čtyř aritmetických operací s přirozenými čísly je tradičně považováno za základní úkol matematického vyučování na 1. stupni ZŠ. Fuson (1992, str. 268-9) zdůraznila, že v budoucnosti si mají žáci při hodinách matematiky vytvářet matematické pojmy tím, že se zabývají situacemi, které mají pro ně smysl a zajímají je a nesnaží se jen rychle dospět k výsledku. Svá řešení žáci odůvodňují, diskutují a kontrolují. A při těchto činnostech také přirozeně chybují. O škole se v té době začalo mluvit jako o **prostředí pro učení** žáka. Podobně Hejný a Kuřina v desateru konstruktivismu (2001, str. 160) požadovali vytvoření „prostředí podněcujícího tvořivost“ a konstatovali, že „ačkoliv je konstrukce poznatků proces individuální, přispívá k jeho rozvoji sociální interakce ve třídě (diskuse, srovnávání výsledků, konstrukce příkladů a protipříkladů, pokusy o formulace domněnek a tvrzení, argumentace, hledání důkazů, ...)“.

Pozorováním školské praxe ale docházíme k závěru, že východiskem pro uvedení aritmetických operací je mnohdy prohlížení obrázků v pracovním sešitě a vyplňování příslušných kolonek.

V tomto příspěvku se pokusím odpovědět na otázky: (a) jaké zkušenosti s dělením si přinášejí žáci do školy a (b) zda je možné těchto zkušeností využít při vyvození operace ve škole. Jako příklad použiji operaci dělení, která se tradičně vyvozuje ve 2. ročníku ZŠ.

2. Zkušenosti žáků s dělením

Operaci dělení je možné modelovat dvěma odlišnými manipulacemi (Divíšek a kol., 1989, str. 109): dělení **na stejné části** a dělení **po částech**. Těmito dvěma možnostem odpovídají i motivační úlohy pro vyvození operace nabízené v učebnicích. Budeme-li si všimnout toho, která z interpretací je uvedena jako první, zjistíme, že jsou vcelku vyrovnané. Reprezentace dělení po částech nepřináší žádné problémy. Je požadováno, aby žák na obrázku vyznačil skupiny po 2, 3, 4, Problematické je znázornění dělení na části, resp. spravedlivého dělení. Autoři obvykle používají šipky, které znázorňují „rozpočítávání“.

3. Experimentální vyučování k prekonceptům dělení

Hošpesová a Tichá publikovaly (2003) informaci o experimentálním vyučování, ve kterém se žáci v 1. ročníku pokoušeli řešit tyto úlohy:

1. Rozsad' sazenice na záhon tak, aby dobře rostly (pro řešení žáci dostali 20 obrázků sazenic).
2. Rozsad' sazenice hrášku do 3 řádků (pro řešení žáci dostali 21 koleček).

Úloha autorky zaujala tak, že podobné úlohy řešily v experimentálních podmínkách s dvojicí žáků. Ukázky z těchto experimentů byly použity jako východisko diskuse na dílně při konferenci SEMT03. Zde se pokusím o shrnutí výsledků experimentů.

3.1. Experiment „rozsad' sazenice, aby dobře rostly“

V rámci experimentu byly úlohy zadávány žákům na počátku docházky do 2. ročníku ZŠ. Úlohy řešili ve dvojicích. Průběh řešení byl nahráván na video.

Žáci řešili úlohu, při které na polovinu archu balicího papíru rozmísťovali 20 sazenic kedluben vystřižených z papíru.

Pokusme se odpovědět na 2 otázky:

1. Budou žáci rozdělovat „sazenice“ do řádků? Půjde o spravedlivé dělení?
2. Jestliže ano, jak dospějí ke vhodným počtům?

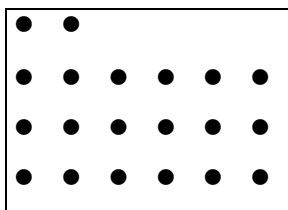
Všechny dvojice žáků začaly kedlubny na papír rozmísťovat do řádků. Postupovaly tak, že daly na jeden řádek tolik sazenic, kolik se jich na papír vešlo, a pak pokračovaly na řádek další (rozdělování po částech). Většinou jeden z dvojice začal skládat kedlubny na první řádek a tím určil kolik kedluben bude v každém dalším řádku. Pak už společně doplnili všechny kedlubny.

Problém nastal u jedné dvojice, ve které žáci začali skládat tři sazenice na řádek. Na arch se jim vešlo pouze 5 takových řádků a to znamená, že 5 sazenic jim zůstalo v ruce. Nezvolili možnost, že by všechny sazenice posunuli jedním směrem (nahustili sazenice k jednomu okraji papíru). Nejistili, že do každého řádku stačí dodat právě jednu kedlubnu, aby jich bylo v každém řádku stejně. Začali různě hledat volná místa, kam by zbývajících 5 sazenic umístili. Také se ptali, jestli kedlubny musí být rovně. Nakonec došli k řešení 5 řádků po 4 kedlubnách. A na otázku, proč je rozmístili právě takto, odpověděli: „Aby to bylo hezké.“

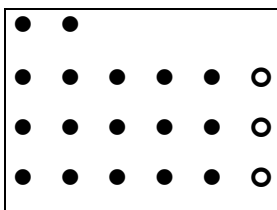
Proti tomu další dvojice žáků „nesázela“ kedlubny pouze na polovinu archu papíru, ale vytvářela řádky přes celou šířku. Na jeden takový řádek se jim vešlo 6 sazeniček a vznikly tak 3 řady po 6 sazenicích a ve čtvrtém řádku nechali pouze dvě zbylé sazenice. (Obr. 1) Při následném rozhovoru řekli, že jich dali do každého řádku 6, protože tolik se jich tam vešlo, jeden řádek však není plný. A tak dostali za úkol změnit kedlubny tak, aby jich ve všech řádcích bylo stejně. Jeden žák z dvojice hned řekl, že ví

jak - vzal z každého plného řádku jednu sazenici (obr. 2) a dal ji do nezaplněného řádku (obr. 3). Tím vznikly 4 řady po 5 kedlubnách.

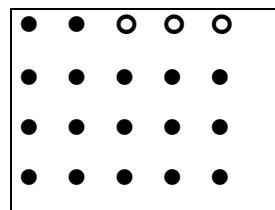
Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3



Všechny dvojice vždy začaly rozdělovat na řádky – dělení po částech a poté doplnily „záhon“ tak, aby všude bylo stejně.

U žádné z natáčených dvojic žáků se nestalo, že by žáci začali umisťovat kedlubny chaoticky, nebo že by kedlubny otáčeli a umísťovali je křivě. Všechny dvojice žáků po nějakých manipulacích dospěly k tomu, že sazenice na záhonu byly ve stejné početných řádcích. O počtu sazenic na řádku rozhodovala velikost papíru.

3.2. Experiment „rozsad’ sazenice do 3 řádků“

V další úloze dvojice žáků dostala zelená kolečka, která představovala hrášky. Žáci měli 21 hrášků „zasadit“ do 3 řad.

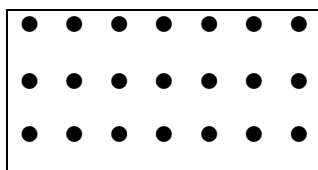
Zde se pokusme se odpovědět na tyto otázky:

1. Jak žáci dospějí k vhodným počtům do řádku?
2. Bude rozdělení spravedlivé?

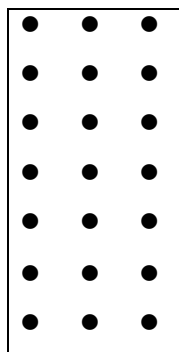
Žáci většinou postupovali tak, že vzali tři hrášky, položili je pod sebe do sloupce a tím vytvořili základ tří řad. Pak už přidávali vedle každého hrášku vždy po jednom kolečku (dělení na stejné části). A tím vznikly tři řady hrášků. Řešení tohoto úkolu převážně vycházelo z „rozpočítávání“.

Mezi některými žáky nastal malý šum ve chvíli, kdy jeden ze dvojice vytvářel řady vodorovně a druhý svisle (obr. 4 a 5).

Obr. 4

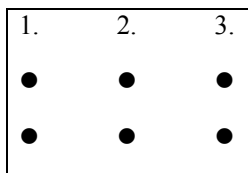


Obr. 5

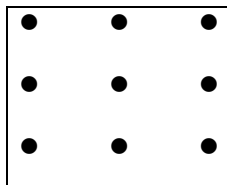


U jedné dvojice první z žáků vytvořil tři sloupce (obr. 6) a do každého začal rozdávat po jednom hrášku (obr. 7). Druhý žák ale začal vyplňovat mezery mezi jednotlivými sloupci (obr. 8), takže nakonec vznikly tři vodorovné řady po 7 hrášcích (obr. 9).

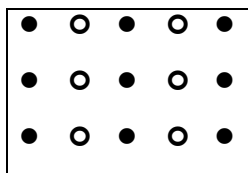
Obr. 6



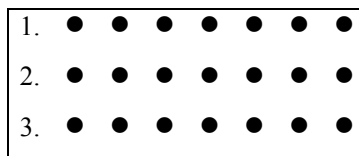
Obr. 7



Obr. 8



Obr. 9



Objevila se i dvojice, která postupovala tak, že dala do první řady 8 koleček, do další řady také 8 a na poslední řadu jim zbylo pouze 5 hrášků (dělení po částech). Žáci zjistili, že „jim to nevychází“, tak z každé řady 4 kolečka ubrali. Měli pak 4 řady po 5 hrášcích, ale jeden hrášek v ruce. Po chvíli, kdy kolečka přesouvali a měnili počty řad i počet koleček v řadě, došli ke správnému řešení.

Také se zde objevily děti, které si na úplném začátku před skládáním hrášků do řad všechny hrášky spočítaly. Ale žádná dvojice předem nevěděla, kolik hrášků v jedné řádce bude. To děti počítaly až po vyskládání všech řad.

4. Návrhy pro školní praxi

Podle výše uvedených příkladů je vidět, že žáci nemají problém rozdělit určitý (samozřejmě přiměřeně velký) počet prvků na části i po částech. Důležitá je však praktická stránka – manipulace s jednotlivými předměty, popř. alespoň vhodný obrázek. To dost dobře nelze vyřešit kreslením do pracovního sešitu a je na učiteli, aby při vyvozování nového učiva (dělení) pro děti vymyslel vhodné činnosti, ve kterých žákům ukáže, že se s touto operací již setkali a že si s ní umí poradit. A učitel by také měl ze zkušeností, které žáci již mají, vycházet.

Námětů pro tyto činnosti najdeme kolem sebe dostatek. Učitel může v hodině matematiky rozdělovat ovoce, zeleninu, pastelky, bonbóny apod. (např. Babička má 24 třešní, 16 jahod a 8 hrušek. Jak podělí čtyři vnoučky, aby měl každý stejně?), počítat s penězi (např. rozdělovat 25 korun 5 dětem, nebo kolik je v desetikoruně dvoukorun a kolik je v desetikoruně pětikorun?), pozorovat zvířata (V teráriu je 32 nohou, kolik je tam pavouků?), nebo tvořit různé početné řady při tělesné výchově.

Dobré, a pro děti zajímavé, je vytvořit na takové učivo projekt. Například úlohy o zelenině a o ovoci můžeme použít do projektu „Zahrádka“, ve kterém uplatníme i sázení sazeniček na záhon. Nebo si můžeme vymyslet „pohádkový“ projekt, ve kterém Sněhurka může rozdělovat 21 krajíců chleba trpaslíkům, Popelce pomůžeme třídit hrách na tři hromádky, Hloupý Honza každému, koho potká, dá dvě ze svých 8 buchet apod.

Literatura

1. DIVÍŠEK, J. a kol. (1989). *Didaktika matematiky pro studium učitelství pro 1. stupeň ZŠ*. Praha : SPN, 1989, 269 s. ISBN 80-04-20433-3.
2. HEJNÝ, M. , KUŘINA, F. *Dítě, škola, matematika. (Konstruktivistické přístupy k (matematickému) vyučování)*. Praha : Portál, 2001, 187 s. ISBN 80-7178-581-4.
3. HOŠPEŠOVÁ, A., KUŘINA, F. Developing the pre-concept of part/whole relationships. In J. Novotná (Ed.), *International Symposium Elementary Math Teaching. Proceedings*. Prague : Charles University, 2003, str. 167-169. ISBN 80-7290-132-X.
4. HOŠPEŠOVÁ, A., TICHÁ, M. (2003). Zdokonalování kultury vyučování matematice cestou kolektivní reflexe učitelů. In J. Coufalová (Ed.), *Od činnosti k poznatku. Sborník z konference*. Plzeň : Západočeská univerzita v Plzni, 2003, str. 99-106. ISBN 80-7082-955-959.

Příspěvek byl zpracován s podporou grantu GA UK č. 102807.

Kontaktní adresa

Mgr. Bohuna Matějů
Základní škola Český Krumlov
Plešivec 249
381 01 Český Krumlov
Telefon: +420 777 273 405
E-mail: bohunkamateju@seznam.cz

KONVERGENTNÍ A DIVERGENTNÍ MYŠLENÍ V PŘEDMĚTU DIDAKTIKA MATEMATIKY

Jan MELICHAR

Abstrakt

V příspěvku je ukázáno spojení didaktiky matematiky a praxe studentů na příkladu konvergentního a divergentního myšlení.

CONVERGENT AND DIVERGENT THINKING IN METHODOLOGY OF MATHEMATICS

Abstract

In the document is an example of convergent and divergent thinking that shows the interface of didactics of mathematics and practice of students.

Se studenty studia učitelství pro 1. stupeň základní školy v předmětu didaktika matematiky probereme teoreticky určité didaktické téma, po této teoretické přípravě si studenti individuálně nebo ve skupinách připraví návrh, jak toto téma využijí na pedagogické praxi, neboť průběžná pedagogická praxe probíhá ve 3. ročníku souběžně s předmětem didaktika matematiky. Studenti vyberou úspěšný návrh a sami v roli žáků si jeho účinnost ověří. Autor vítězného návrhu nebo zástupce úspěšné skupiny tuto fiktivní hodinu s fiktivními žáky řídí. Při této praktické části semináře studenti sami svou tvůrčí činností hledají optimální průběh vyučovací hodiny. Ukáží příklad na tématu „Konvergentní a divergentní myšlení“.

Teoretická část semináře:

Konvergentní (sbíhavé) myšlení

Konvergentní myšlení se uplatňuje v úlohách s jedním správným řešením nebo v úlohách s konečným počtem správných řešení. Správná řešení vždy logicky vyplývají z daných informací v úloze. Je to tedy takové myšlení, při kterém se logicky a algoritmicky postupuje ke správnému závěru.

Úlohy založené na konvergentním myšlení formují zejména vnímání, rozlišování a poznávání věcí, analýzu a syntézu, indukci a dedukci, paměť a také schopnost aplikace – použití informací, definic a poznatků při řešení školní úlohy nebo řešení nějakého problému.

Divergentní (rozbíhavé nebo též tvůrčí) myšlení

Divergentní myšlení nabízí žákům příležitost, jak objevit v každé situaci více než je běžné.

Divergentní myšlení se využívá v úlohách, ve kterých není z daných informací přesně známo jaké bude správné řešení. Žák musí hledat, objevovat a tvořit různé

alternativní řešení. Úlohy musí doplňovat o další informace a záleží především na samotném žákovi, jaké informace si do úlohy dodá. Toto myšlení klade důraz na rozmanitost, množství a vhodnost odpovědí. Nevede k jednomu správnému řešení, ale vyžaduje produkci mnoha řešení, která vedou k originálním výsledkům.

Praktická část semináře:

Byla vybrána slovní úloha pro 4. ročník základní školy jako úloha s konvergentním řešením:

V obchodě mají dva druhy kapesníků a to za 4 Kč a za 6 Kč. Kolik kterých kapesníků mohla maminka koupit, když chtěla za ně utratit přesně 50 Kč.

Z matematického hlediska jde o řešení diofantovské rovnice $4x + 6y = 50$. Žáci 4. ročníku mohou řešit tuto úlohu zkoumáním a to v našem případě postupným dosazováním.

Když maminka koupila jeden kapesníček za 6 Kč, tak ji zbylo $50 \text{ Kč} - 6 \text{ Kč} = 44 \text{ Kč}$ a to je násobek 4 a mohla tedy ještě koupit 11 kapesníků za 4 Kč. Máme již první možné řešení. Když koupila 2 kapesníčky po 6 Kč, tak ji zbylo $50 \text{ Kč} - 12 \text{ Kč} = 38 \text{ Kč}$ a to není násobek 4. V tomto případě řešení neexistuje. Když koupila 3 kapesníčky po 6 Kč, tak ji zbylo $50 \text{ Kč} - 18 \text{ Kč} = 32 \text{ Kč}$ a to je násobek 4, mohla tedy ještě koupit 8 kapesníků po 4 Kč. Když koupila 4 kapesníčky za 6 Kč, tak ji zbylo $50 \text{ Kč} - 24 \text{ Kč} = 26 \text{ Kč}$ a to není násobek 4. V tomto případě řešení neexistuje. Když koupila 5 kapesníků za 6 Kč, tak ji zbylo $50 \text{ Kč} - 30 \text{ Kč} = 20 \text{ Kč}$ a to je násobek 4, mohla tedy ještě koupit 5 kapesníků po 4 Kč. Když koupila 6 kapesníků po 6 Kč, tak ji zbylo $50 \text{ Kč} - 36 \text{ Kč} = 14 \text{ Kč}$ a to není násobek 4. V tomto případě řešení neexistuje. Když koupila 7 kapesníků za 6 Kč, tak ji zbylo $50 \text{ Kč} - 42 \text{ Kč} = 8 \text{ Kč}$ a to je násobek 4, mohla tedy ještě koupit 2 kapesníčky po 4 Kč. Když koupila 8 kapesníků za 6 Kč, tak ji zbylo $50 \text{ Kč} - 48 \text{ Kč} = 2 \text{ Kč}$ a to není násobek 4. V tomto případě řešení neexistuje. Dále již není nutné uvažovat, neboť cena kapesníků po 6 Kč převyšuje 50 Kč. Našli jsme čtyři řešení této úlohy.

Můžeme sestavit tabulku:

Počet kapesníků za 6 Kč	1	2	3	4	5	6	7	8
Cena kapesníků za 6 Kč	6 Kč	12 Kč	18 Kč	24 Kč	30 Kč	36 Kč	42 Kč	48 Kč
Počet kapesníků za 4 Kč	11	-	8	-	5	-	2	-
Cena kapesníků za 4 Kč	44 Kč	-	32 Kč	-	20 Kč	-	8 Kč	-

Odčítali jsme násobky 6, neboť jich je do 50 méně než násobků 4. Též jsme mohli odčítat násobky 4.

Další možný způsob řešení je, že si žáci napíší řadu násobků 4 a řadu násobků 6 a zkusmo hledají, kdy je jejich součet roven 50. Při tomto řešení jsme použili **konvergentního** myšlení.

Nyní studenti využili **divergentního** myšlení a úlohu zadali takto:

V obchodě mají dva druhy kapesníků a to za 4 Kč a za 6 Kč. Kolik kterých kapesníků mohla maminka koupit, když měla v peněžence 50 Kč.

Studenti navrhli, aby po přečtení úlohy byl dán prostor žákům, aby se ptali na další podmínky slovní úlohy. Úlohu zadáme fiktivním žákům – studentům a „žáci“ se ptali. Například:

Dostala maminka nějaké peníze nazpátek?

Chtěla maminka koupit kapesníčky jen za 4 Kč?

Chtěla maminka koupit kapesníčky jen za 6 Kč?

Chtěla maminka koupit oba druhy kapesničeků?

Mohla si maminka koupit jen jeden kapesniček?

Mohla maminka v obchodě zanechat dluh?

Žáci – studenti našli další a další možné ukázky a hned hledali řešení

Zde jsou ukázky:

Maminka koupila jeden kapesniček za 4 Kč a vrátili ji 46 Kč.

Maminka koupila jeden kapesniček za 4 Kč a jeden za 6 Kč a vrátili ji 40 Kč.

Maminka koupila 10 kapesničeků za 4 Kč a jeden za 6 Kč a vrátili ji 4 Kč.

Maminka koupila 8 kapesničeků za 6 Kč a vrátili ji 2 Kč.

Maminka koupila 5 kapesničeků po 4 Kč a 5 kapesničeků po 6 Kč a nevrátili ji žádné peníze. Atp.

Zajímavé bylo i zjišťovat kolik žáků-studentů vymyslelo alespoň jednu úlohu, kdy nevrátili mamince žádné peníze.

Studenti se podrobně vyzkoušeli průběh hodiny matematiky, kde se žáci využívají konvergentní a divergentní myšlení. Téma je jim nyní blízké a v nejbližší hodině praxe toto téma ještě svoji vlastní tvůrčí činností mohou zdokonalit.

Na závěr hodiny didaktiky matematiky využijí svoje znalosti z předmětu aritmetika s didaktikou a úlohu teoreticky vyřeší jako diofantovskou rovnici:

$$4x + 6y = 50$$

Podmínka řešitelnosti: $D(4;6)$ dělí 50, rovnice má řešení v oboru celých čísel.

$$y = \frac{50 - 4x}{6}$$

$$y = \frac{48 + 2 - 6x + 2x}{6}$$

$$y = 8 - x + \frac{2x + 2}{6}$$

$$y = 8 - x + \frac{x + 1}{3}$$

$$3t = x + 1 \Rightarrow x = 3t - 1$$

$$y = 8 - (3t - 1) + \frac{3t - 1 + 1}{3}$$

$$y = 9 - 2t$$

$$x = 3t - 1$$

$$x \geq 0$$

$$\underline{y \geq 0}$$

$$3t - 1 \geq 0$$

$$\underline{9 - 2t \geq 0}$$

$$t \geq 0$$

$$\underline{t \leq 4,5}$$

$$t = \{1; 2; 3; 4\}$$

t	1	2	3	4
x	2	5	8	11
y	7	5	3	1

Literatura

1. *MELICHAR, J. Utváření a rozvoj klíčových kompetencí - Matematika a její aplikace*, Ústí nad Labem: Pedagogické centrum, 2007. 116 s.

Kontaktní adresa

Jan Melichar, Prof. RNDr., CSc.

Pedagogická fakulta UJEP, Hoření 13, 400 96 Ústí nad Labem, Česká republika

Telefon: 00420475282280

E-mail: Melichar@pf.ujep.cz

MATEMATICKÁ GRAMOTNOSŤ ŠTUDENTOV NA ZAČIATKU ICH PROFESIJNEJ UČITEĽSKEJ PRÍPRAVY

Marek MOKRIŠ

Abstrakt

Matematická gramotnosť je schopnosť jedinca rozpoznať a pochopiť úlohu matematiky vo svete, robiť zdôvodnené rozhodnutia, používať a zaoberať sa matematikou spôsobmi, ktoré zodpovedajú potrebám jeho života. Uvoľnené úlohy z testovania matematickej gramotnosti (štúdia OECD PISA 2003) sme použili na zistenie úrovne vstupnej matematickej gramotnosti študentov – budúcich učiteľov preelementaristov a elementaristov, ktorú sme konfrontovali s výsledkami 15-násť ročných žiakov v štúdii OECD PISA 2003.

MATHEMATICAL LITERACY OF STUDENTS AT THE BEGINNING OF THEIR PROFESSIONAL TEACHING PREPARATION

Abstract

The mathematical literacy is an individual ability to identify and make sense of mathematics in the world, make the reasonable decisions, use and deal with mathematics in the ways, which correspond with the needs of life of constructive, concerned and wise-thinking person. We used the free assignments (from Study OECD PISA 2003) to find out the entrance level of mathematical literacy of students – future teachers at primary school and nursery school and we compared it with results 15-years old pupils in study OECD PISA 2003.

1. Úvod

Medzinárodná štúdia OECD PISA od roku 2000 v trojročných cykloch meria a hodnotí výsledky vzdelávania v kontexte krajín OECD na vzorke žiakov, ktorí už dovŕšili 15. rok veku. PISA testy merajú výkony žiakov v troch oblastiach – čitateľská gramotnosť, matematická gramotnosť a prírodovedná gramotnosť. Na rozdiel od iných výskumov PISA netestuje, ako žiaci ovládajú učivo predpísané osnovami alebo inými pedagogickými dokumentmi. Štúdia sa na Slovensku prvý raz uskutočnila v roku 2003. Výsledky vzdelávacieho systému na Slovensku v prvom medzinárodnom porovnaní nenaplnili očakávania. Dosiahnutý priemerný výkon v oblasti matematickej gramotnosti sa štatisticky významne neodlišoval od priemernej úrovne v krajinách OECD. Štúdia v roku 2006 poukázala na zhoršenie sa aj tak nepriaznivého stavu. Priemerný výkon žiakov v oblasti matematickej gramotnosti bol pod priemerom OECD. Klesla aj hodnota priemerného skóre z 498 (PISA 2003) na 492 (PISA 2006).

Z testovania matematickej gramotnosti v štúdií OECD PISA 2003, vydal Štátny pedagogický ústav zbierku úloh a správu (Kubáček, Z. - Kospér, F. - Tomachová, A. -

Koršňáková, P., 2005). Niektoré uvoľnené testovacie úlohy sme použili na zistenie úrovne matematickej gramotnosti študentov – budúcich učiteľov.

2. Charakteristika prieskumu

Prieskum sme uskutočnili v školskom roku 2005/2006 a 2006/2007 na Pedagogickej fakulte PU v Prešove. Zúčastnili sa ho všetci študenti dennej formy štúdia v študijných programoch Predškolská a elementárna pedagogika, Predškolská a elementárna pedagogika a pedagogika psychosociálne narušených a študijného programu Pedagogika mentálne postihnutých. Test bol zadaný na začiatku zimného semestra príslušného akademického roka študentom, ktorí študovali v prvom ročníku. Rozsah skúmanej vzorky je uvedený v nasledujúcej tabuľke:

Študijný program	Počet študentov	
	2005/2006	2006/2007
Predškolská a elementárna pedagogika	151	183
Predškolská a elementárna pedagogika a pedagogika psychosociálne narušených	19	22
Pedagogika mentálne postihnutých	16	21

Tab. 1 Počet študentov zaradených do prieskumu

Testovacím nástrojom bol neštandardizovaný test matematickej gramotnosti. Testovacími položkami boli vybrané uvoľnené úlohy zo štúdie OECD PISA 2003 v oblasti matematickej gramotnosti. Ich charakteristika je spracovaná podľa http://www.statpedu.sk/Projekty/PISA/Ulohy2003_matematika.pdf.

Kód úlohy a otázky	Názov úlohy	Kontext	Odporúčaná téma	Oblasť PISA matematiky	Kompetencie
M145Q01	Kocky	zamestnanie a voľný čas	stereometria, aritmetika	priestor a tvar	reprodukčná úroveň
M150Q01	Výška ľudí	veda	číselné operácie	vzťahy a závislosť	reprodukčná úroveň
M150Q02	Výška ľudí	veda	funkcie, čítanie z grafu	vzťahy a závislosť	reprodukčná úroveň
M150Q03	Výška ľudí	veda	funkcie, čítanie z grafu	vzťahy a závislosť	úroveň prepojenia
M266Q01	Tesár	škola	planimetria	priestor a tvar	úroveň prepojenia
M467Q01	Farebné cukríky	osobný život	pravdepodobnosť	náhodnosť	reprodukčná úroveň
M484Q01	Knihovnička	zamestnanie a voľný čas	delenie so zvyškom	kvantita	úroveň prepojenia
M510Q01	Výber	zamestnanie a voľný čas	kombinatorika	kvantita	úroveň prepojenia
M547Q01	Schodište	zamestnanie a voľný čas	planimetria	priestor a tvar	reprodukčná úroveň
M702Q03	Podpora prezidentovi	spoločnosť	štatistika, pravdepodobnosť	náhodnosť	úroveň prepojenia

Tab. 2 Charakteristika testových položiek

Cieľom prieskumu bolo zistiť vstupnú úroveň matematickej gramotnosti študentov pred začiatkom odborného matematického vzdelávania. Získané výsledky sme porovnali s výsledkami 15-násť ročných žiakov, na Slovensku a v krajinách OECD.

Na vyhodnotenie výsledkov merania sme použili štatistický softvér STATISTICA 7.0 a T-test zhody priemerov voči referenčnej konštante, ktorou bola priemerná úspešnosť riešenia príslušnej úlohy v štúdií OECD PISA 2003 na Slovensku, resp. v krajinách OECD. Na overenie normality dát v skúmaných súboroch sme použili Shapiro-Wilksov W-test, ktorý preukázal Gausove rozdelenia nameraných hodnôt. Výsledky meraní sú spracované v tabuľke č. 3. V nej sú uvedené aritmetické priemery úspešnosti riešenia úloh študentmi denného štúdia na PF PU v Prešove v rokoch 2005/2006 a 2006/2007, smerodajná odchýlka, počet testovaných študentov N , referenčná konštanta (dosiahnutá priemerná úroveň úspešnosti riešenia úlohy v štúdií OECD PISA 2003), hodnota testovacieho kritéria t , počet stupňov voľnosti sv a p hodnota (minimálna hladina významnosti, na ktorej je možné testovanú nulovú hypotézu zamietnuť). Ak je zistená hodnota p je menšia ako 0,05 (nami volená hranica), potom je možné zamietnuť nulovú hypotézu tvrdiacu, že priemerná úspešnosť riešenia úlohy študentmi denného štúdia je porovnateľná s priemernou úspešnosťou 15-násť ročných žiakov, ktorí sa zúčastnili testovania matematickej gramotnosti v štúdií OECD PISA 2003.

Kód úlohy a otázky	Rok	Test priemerov voči referenčnej konštante (priemer v SR)						
		Priemer	Sm.odch.	N	Referenč. konštanta	t	SV	p
M145Q01	2005	0,754967	0,431538	151	0,658000	2,761167	150	0,006479
	2006	0,803279	0,398610	183	0,658000	4,930362	182	0,000002
M150Q01	2005	0,827815	0,378798	151	0,740200	2,842217	150	0,005104
	2006	0,770492	0,434505	183	0,740200	0,943095	182	0,346882
M150Q02	2005	0,754967	0,293641	151	0,616900	5,777780	150	0,000000
	2006	0,767760	0,299998	183	0,616900	6,802680	182	0,000000
M150Q03	2005	0,251656	0,435409	151	0,272800	0,596742	150	0,551579
	2006	0,224044	0,418095	183	0,272800	-1,57754	182	0,116407
M266Q01	2005	0,341060	0,366837	151	0,255000	2,882799	150	0,004521
	2006	0,330601	0,379767	183	0,255000	2,692998	182	0,007743
M467Q01	2005	0,516556	0,501389	151	0,426300	2,212032	150	0,028476
	2006	0,437158	0,497396	183	0,426300	0,295319	182	0,768087
M484Q01	2005	0,701987	0,458907	151	0,645800	1,504518	150	0,134551

	2006	0,661202	0,474600	183	0,645800	0,439016	182	0,661170
M510Q01	2005	0,629139	0,484643	151	0,564200	1,646542	150	0,101746
	2006	0,672131	0,470725	183	0,564200	3,101740	182	0,002230
M547Q01	2005	0,721854	0,449577	151	0,775700	-1,47176	150	0,143182
	2006	0,726776	0,446837	183	0,775700	-1,48115	182	0,140296
M702Q03	2005	0,430464	0,469183	151	0,245800	4,836461	150	0,000003
	2006	0,382514	0,464238	183	0,245800	3,983795	182	0,000098

Tab. 3 Test priemerov voči referenčnej konštante

Z údajov prezentovaných v predchádzajúcej tabuľke vyplýva, že študenti denného štúdia na PF PU v Prešove dosiahli v úlohách M145Q01, M150Q02, M266Q01 štatisticky lepšiu úspešnosť ako 15-násť roční žiaci na Slovensku (číselná hodnota p je menšia ako 0,05). Dané testové položky zisťovali mieru matematickej gramotnosti (na reprodukčnej úrovni kompetencií) v témach: planimetria, stereometria a funkcie.

V úlohách M150Q01, M467Q01, M484Q01, M510Q01 dosiahli študenti štatisticky porovnateľnú úspešnosť ako 15-násť roční žiaci na Slovensku (číselná hodnota p je väčšia ako 0,05). Dané úlohy sú z oblasti: číselné operácie, čítanie z grafu, pravdepodobnosť, delenie so zvyškom a kombinatorika. Testované kompetencie boli na úrovni prepojenia alebo úrovni reprodukcie.

Jednou z veľmi problémových oblastí matematickej gramotnosti študentov – budúcich učiteľov preelementaristov a elementaristov, je problematika interpretovania údajov z grafu a tabuliek. V úlohe M150Q03 bol zistený štatistický významný rozdiel v úspešnosti jej riešenia v neprospech vysokoškolských študentov. Priemerná úspešnosť riešenia úlohy venovanej problematike čítania a interpretovania údajov z grafu je porovnateľná s priemernou úrovňou úspešnosti 15-násť ročných žiakov na Slovensku, ale nedosiahla priemernú úroveň úspešnosti 15-násť ročných žiakov v krajinách OECD. Aj naše skúsenosti nasvedčujú tomu, že spracovanie a interpretovanie informácií z tabuliek a grafov študentmi, ktorí sú na začiatku odbornej matematickej prípravy, je na nedostatočnej úrovni. Na základe týchto zistení sme do úvodnej matematickej disciplíny zaradili tematicky celok Komunikačný jazyk matematiky. Cieľom tejto časti matematickej prípravy študentov je, aby študent vedel komunikovať prostredníctvom matematického jazyka (t. j. vedel správne prečítať číslo, urobiť zápis čísla; rozlíšiť základné číselné množiny; správne používal matematickú symboliku a vedel pracovať s údajmi, ktoré sú vo forme tabuliek a grafov). Táto študijná oblasť je spracovaná aj v elektronickom kurze Úvod do štúdia matematiky, ktorý je voľne prístupný (vyžaduje sa len registrácia do systému Moodle prostredníctvom emailovej adresy). Elektronický kurz je umiestnený na adrese <http://opal.unipo.sk/pf/moodle/course/category.php?id=7>. Myslíme si, že využívanie elektronických podporných kurzov môže prispieť nielen k rozvoju počítačovej, ale aj matematickej gramotnosti. Elektronické kurzy, v ktorých sú implementované autoevalvačné nástroje, ponúkajú študentom novú dimenziu štúdia a podporujú ich v samostatnej práci. Pozitívnu skúsenosť s implementovaním e-kurzu do disciplíny, zameranej na rozvíjanie matematickej gramotnosti budúcich učiteľov, majú aj Ľ. Gerová a P. Klenovčan (2007).

Podľa V. Zeľovej (2007, s. 203) sa problematike rozvoja matematickej gramotnosti nevenuje dostatočná pozornosť už na 1. stupni ZŠ. E. Šimčíková (2007) charakterizuje jeden z možných prístupov k rozvíjaniu matematickej gramotnosti v kontexte medzinárodnej štúdie OECD PISA a A. Prídavková (2007) popisuje štruktúru a skúsenosti s využívaním učebného textu zameraného na rozvíjanie predstáv o základných matematických pojmoch, ktorý je využívaný v profesijnej príprave študentov študijného odboru Predškolská a elementárna pedagogika.

3. Záver

Uvedomujeme si, že o študijný odbor Predškolská a elementárna pedagogika sa zaujímajú najmä študenti, ktorí nemajú pozitívny vzťah k matematike a ani ich úroveň matematickej gramotnosti nie je na žiaducej úrovni. Danú skutočnosť dokumentujú aj výsledky prieskumu. V tomto kontexte sa v podmienkach Pedagogickej fakulty PU v Prešove osvedčilo integrovanie niektorých oblastí matematického kurikula základnej školy (čítanie a zápis čísel v desiatkovej číselnej sústave, v rímskej číselnej sústave, percentuálny počet, deliteľnosť prirodzených čísel, elementárna geometrická a aritmetická terminológia a v neposlednom rade spracovanie údajov z tabuliek a grafov) do úvodnej matematickej disciplíny v profesijnej príprave budúcich učiteľov preelementaristov. Aj keď daný matematický obsah nebol pre študentov neznámy a prezentovali sme ho v spojitosti s reálnym životom, seminárne stretnutia nás utvrdili v tom, že zaradenie problematiky matematiky druhého stupňa základnej školy má svoje opodstatnenie.

Vhodným doplnkovým študijným zdrojom, aj z pohľadu študentov, bol elektronický kurz spracovaný v systéme LMS Moodle (najmä autoevalvačné elektronické testy a diskusné elektronické fóra). Elektronická podpora vzdelávania matematických disciplín, podľa nášho názoru, je perspektívnou metódou, ktorá si už našla svoje miesto v profesijnej príprave učiteľov pre predprimárne a primárne vzdelávanie.

Literatura

1. ŠIMČÍKOVÁ, E. Matematická gramotnosť a daltonský plán. In *Matematika v škole dnes a zajtra*. Ružomberok: PF KU, 2007. s. 298 – 302. ISBN 978-80-8084-187-4.
2. ZEĽOVÁ, V. Orientácia v čase ako jedna z matematických kompetencií žiaka primárnej školy. In *Vyučování matematice z pohledu kompetencí žáka a učitele 1. stupně základního vzdělávání*. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2007. s. 199 – 203. ISBN 978-80-7043-548-9.
3. GEROVÁ, Ľ. – KLENOVČAN, P. Rozvíjanie matematickej gramotnosti budúcich učiteľov – elementaristov. In *Vyučování matematice z pohledu kompetencí žáka a učitele 1. stupně základního vzdělávání*. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2007. s. 48 – 53. ISBN 978-80-7043-548-9.
4. PRÍDAVKOVÁ, A. Matematické predstavy a ich rozvíjanie. In *Vyučování matematice z pohledu kompetencí žáka a učitele 1. stupně základního vzdělávání*. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2007. s. 129- 133. ISBN 978-80-7043-548-9.
5. KORŠŇÁKOVÁ, P. – KOVÁČOVÁ, J. *Národní správa OECD PISA SK 2006*. Bratislava: Štátny pedagogický ústav, 2007. ISBN – 978-80-89225-37-8.

6. KUBÁČEK, Z., KOSPER, F., TOMACHOVÁ, A., KORŠŇÁKOVÁ, P. 2004. *PISA SK 2003. Matematická gramotnosť. SPRÁVA*. Bratislava: Štátny pedagogický ústav, 2004. ISBN 80-85756-88-9.

Príspevok bol spracovaný ako súčasť grantového projektu Analýza matematickej prípravy študentov odboru Predškolskej a elementárnej pedagogiky z pohľadu rozvoja matematickej gramotnosti. (MŠ SR VEGA 1/0292/08).

Kontaktná adresa

*Mgr. Marek Mokriš
Katedra matematickej edukácie
Pedagogická fakulta PU v Prešove
Ul. 17. novembra č. 1, 081 16 Prešov, Slovensko
Telefon: +421 517 470 544
E-mail: mokrism@unipo.sk*

ILE KROPEK MA DALMATYŃCZYK? - CZYLI JAK MOŻNA ROZWIĄZYWAĆ PEWNE ZADANIE

Barbara NAWOLSKA, Joanna ŻĄDŁO

Abstrakt

Ważnym zagadnieniem programowym w klasie III jest rozwiązywanie złożonych zadań tekstowych w tym zadań na porównywanie ilorazowe. Umiejętność rozwiązywania takich zadań uwarunkowana jest nie tylko poprawnym rozumieniem pewnych pojęć i zwrotów ale także swobodnym posługiwaniem się prostymi strategiami. Artykuł przedstawia wyniki badań, prowadzonych wśród uczniów i studentów, dotyczących umiejętności rozwiązywania tego typu zadań.

HOW MANY DOTS DOES A DALMATIAN HAVE? – HOW TO SOLVE CERTAIN MATHEMATICAL PROBLEMS

Abstract

Solving complex narrative mathematical problems including dividing in comparison is an important topic of the 3rd grade program. The ability to solve such problems depends not only on the precise apprehension of certain terms and expressions but also on the ability to skillfully apply simple strategies. This article shows test results carried out among pupils and students concerning their abilities to solve such problems.

Jednym z celów edukacji matematycznej jak twierdzi Zofia Krygowska jest rozwijanie „postaw i zachowań specyficznych dla aktywności matematycznej oraz pewnej świadomości niektórych elementów matematycznej metodologii tj. aktywna postawa wobec problemów matematycznych, pewna dyspozycja do dostrzegania i formułowania takich problemów (...) umiejętność posługiwania się pewnymi prostymi strategiami w toku ich rozwiązywania“ (1986, s. 23). Cele te można realizować poprzez rozwiązywanie odpowiednio dobranych zadań i problemów matematycznych już na poziomie kształcenia zintegrowanego. Nie jest obojętne jakie zadania uczeń rozwiązuje. Dobre zadanie to takie, które wzbudza zainteresowanie ucznia, wyzwala twórcze myślenie, zachęca do poszukiwań, motywuje do podejmowania wysiłku. Nie jest też obojętne jak uczymy dzieci rozwiązywania zadań. „Jeśli nauczyciel poświęci swój czas na ćwiczenie swoich uczniów w szablonowych działaniach, wówczas zabije ich intelektualny rozwój i nie wykorzysta swojej szansy“ (Polya, 1993, s. 5). Ważne jest by pozwolić uczniowi na samodzielne myślenie i samodzielne odkrycie rozwiązania.

Podjęta przez nas próba badań miała na celu sprawdzenie czy uczniowie klas trzecich aktywnie i twórczo podchodzą do rozwiązywania zadań i jakie strategie stosują przy ich rozwiązywaniu. Równocześnie chcieliśmy sprawdzić na ile studenci – przyszli

nauczyciele są przygotowani do realizacji w swojej pracy pedagogicznej wyżej wspomnianych celów.

Do badań wykorzystaliśmy następujące zadanie:

Ile kropek ma mały dalmatyńczyk, jeśli wiadomo, że:

- **wszystkie małe mają tę samą ilość kropek,**
- **dorose dalmatyńczyki mają dwa razy więcej kropek niż małe,**
- **101 dalmatyńczyków, to znaczy 2 dorosłe i 99 małych, ma razem 1030 kropek.**

Jest to zadanie złożone, na porównywanie ilorazowe. Zostało ono zamieszczone w jednym ze zbiorów zadań dla klas III szkoły podstawowej i nie wykracza poza treści programowe tej klasy (Ludwa, s.13). Wymaga rozumienia zwrotu *dwa razy więcej*, jednakże zwrot ten użyty jest nieco inaczej niż w zadaniach podręcznikowych. Najczęściej w podręcznikach szkolnych zadania takie brzmią:

Adam ma 5 znaczków polskich i 2 razy więcej znaczków zagranicznych. Ile znaczków ma razem?

W zadaniu o znaczkach, wszystkie informacje niezbędne do jego rozwiązania, podane są w sposób jawny. By je rozwiązać wystarczy, rozumiejąc zwrot *2 razy więcej*, wyznaczyć liczbę znaczków zagranicznych mnożąc wielkość daną przez 2, a następnie wyznaczyć sumę liczb znaczków polskich i zagranicznych. W zadaniu wykorzystanym w badaniach sytuacja jest odwrotna i nie wszystkie informacje są jawne. Tu uczeń nie ma podanej wielkości, którą mógłby pomnożyć przez 2.

Zadanie to można rozwiązać różnymi sposobami.

(1) Można np. wykorzystać układ równań. W tym celu przez x oznaczmy liczbę kropek małego dalmatyńczyka a przez y liczbę kropek dorosłego psa, wówczas $y = 2 \cdot x$ oraz $99 \cdot x + 2 \cdot y = 1030$. Wystarczy teraz rozwiązać ten układ równań i podać odpowiedź.

(2) Istnieje też możliwość rozwiązania zadania za pomocą jednego równania. Przyjmując poprzednie oznaczenie liczby kropek małego dalmatyńczyka, liczbę kropek dorosłego oznaczmy przez $2 \cdot x$. Wówczas równanie $99 \cdot x + 2 \cdot (2 \cdot x) = 1030$ wyraża zależność opisaną w zadaniu. By wyznaczyć liczbę kropek małego dalmatyńczyka wystarczy rozwiązać to równanie ze względu na niewiadomą x .

(3) W sposobach (1) i (2) wykorzystuje się narzędzia, które wykraczają poza program nauczania klas I-III (kształcenia zintegrowanego). Są to, więc sposoby niedostępne uczniom, do których zadanie jest adresowane. Jednakże, jak już wspomnieliśmy, w programie klasy III jest porównywanie ilorazowe i zadania tego typu uczniowie mogą rozwiązywać bazując na rozumieniu zwrotu *dwa razy więcej* czyli *raz tyle samo* i *drugi raz tyle samo*. Skoro w naszym zadaniu dorosły pies ma dwa razy więcej kropek niż młody, to znaczy, że dorosły ma tyle kropek, co dwa młode. Możemy, zatem liczbę kropek dwóch dorosłych przedstawić jako liczbę kropek czterech młodych. By ustalić liczbę kropek młodego dalmatyńczyka wystarczy liczbę wszystkich kropek rozdzielić na 103 równe części (po jednej dla każdego z 99 młodych i jeszcze po 2 takie części dla każdego dorosłego). Mamy więc $99 + 4 = 103$ (tyle równych części), $1030 : 103 = 10$ (tyle kropek jest w każdej części). Mały dalmatyńczyk ma zatem 10 kropek, zaś dorosły ma dwa razy więcej, czyli $2 \cdot 10 = 20$.

(4) Można też to zadanie rozwiązać symulując rozdzielanie kropek psom w ten sposób, że każdemu małemu dajemy po jednej kropce, a każdemu dużemu po dwie (bo ma 2 razy więcej) w ten sposób w jednym takim rozdaniu rozdzielimy $99 + 2 + 2 = 103$ kropki. Wystarczy tylko sprawdzić na ile takich rozdań wystarczy 1030 kropek, czyli ile

razy 103 zmieści się w 1030. Ponieważ $1030 : 103 = 10$, więc 10 razy każdy mały dostanie po 1 kropce (dostanie łącznie 10 kropek), a każdy duży dostanie 10 razy po 2 kropki, czyli 20 kropek.

W tych ostatnich dwóch sposobach odwołujemy się tylko do rozumienia treści zadania i rozumienia porównywania ilorazowego. A narzędzia matematyczne nie wykraczają poza znajomość czterech podstawowych działań arytmetycznych na liczbach naturalnych.

(5) Istnieje jeszcze inna możliwość mądrego poszukiwania rozwiązania tego zadania. Można oszacować liczbę kropek małego psa (hipoteza 1.) i sprawdzić, czy spełnia ona warunki zadania. Jeśli tak, to zadanie jest rozwiązane, w przeciwnym razie ponawiamy próbę szacowania (hipoteza 2.) uwzględniając rezultat pierwszej próby i dokonując stosownych poprawek w swoim szacowaniu (w hipotezie). Tak weryfikujemy kolejne hipotezy aż uzyskamy potwierdzenie jednej z nich.

Opisane zadanie dałyśmy do pisemnego rozwiązania 150 uczniom klas III krakowskich szkół podstawowych oraz 123 osobowej grupie studentów pedagogiki przedszkolnej i wczesnoszkolnej Akademii Pedagogicznej w Krakowie. Badani studenci ukończyli w ramach studiów kurs z zakresu podstaw i metodyki edukacji matematycznej dzieci. Zarówno uczniowie jak i studenci nie mieli ograniczeń czasowych - rozwiązywali zadanie tak długo jak chcieli. Ponadto uczniowie nie otrzymali żadnych wskazówek, co do sposobu rozwiązania zadania, mieli, więc pełną swobodę wyboru drogi postępowania i organizacji pracy, natomiast studenci proszeni byli o stosowanie strategii dostępnych uczniom klas młodszych.

Zebrany materiał badawczy poddano analizie jakościowej i ilościowej. Na podstawie prac, tak uczniowskich jak i studenckich, udało nam się wyróżnić pewne charakterystyczne i często powtarzające się strategie rozwiązywania, które krótko nazwałyśmy odpowiednio:

- „2 duże mają tyle kropek, co 4 małe” - jak w rozwiązaniu nr (3);
- strategia hipotez i ich weryfikacji - jak w rozwiązaniu nr (5);
- równanie - jak w rozwiązaniu nr (2);
- „inne” – nie uwzględnione w naszych propozycjach rozwiązań.

Wyniki pracy uczniów i studentów prezentujemy w tabeli, w której podajemy liczby osób rozwiązujących zadanie wybraną strategią (poprawnie (+), bądź źle (-)) oraz przybliżenia procentowe tych liczb.

Poprawnie udało się rozwiązać zadanie zaledwie 22 uczniom na 150 rozwiązujących.

Zaledwie 3 uczniów zauważyło, że **2 dorosłe psy mają tyle kropek, co 4 małe** i ten fakt wykorzystało w rozwiązaniu. Niestety jeden z nich popełnił błąd rachunkowy, co uniemożliwiło mu uzyskanie poprawnego rozwiązania (por. tabela wiersz 1).

Inni uczniowie stosowali **strategię stawiania hipotez i ich weryfikowania** (tak postąpiło 14 osób), z których 3 stawiało wiele hipotez zaś 11 tylko jedną. Prawdopodobnie ta jedna hipoteza „mały ma 10 kropek” jest najbardziej narzucająca się i na dodatek trafna, więc nie było potrzeby sprawdzania innych.

Aż 6 uczniów podało **gotową odpowiedź „10”**, jednak nie wiadomo jak uzyskaną. Być może również zastosowali strategię stawiania i weryfikowania hipotez, ale przeprowadzili ją w myśli i zapisali jedynie rezultat swoich przemyśleń.

Bardzo wielu uczniów poszukując sposobu rozwiązania zadania wykonywało **różnorodne obliczenia na danych liczbowych** występujących w zadaniu.

Aż 17 uczniów wykonało dzielenie $1030 : 99$, przy czym dwóch z nich zauważyło, że jest to dzielenie z resztą i uzyskany iloraz 10 potraktowało jako potencjalną liczbę kropek małego psa. Sprawdziło, że jest to dobra liczba, zaś reszta 40 też jest dobrą liczbą kropek dwóch dorosłych dalmatyńczyków. Inni zaś mieli trudności z wykonaniem tego dzielenia, jeden z nich napisał „nie znam wyniku”, inny próbował bezskutecznie skorzystać z rozdzielnosci dzielenia względem dodawania $1030 : 99 = (1000 + 30) : 99$ i nie radząc sobie z tym rachunkiem próbował jeszcze dzielnik przedstawić w postaci sumy $(1000 + 30) : (90 + 9)$ i pozostawił to bez dalszych obliczeń i bez komentarza.

Strategia rozwiązania zadania		Uczniowie			Studenci		
		+	-	razem	+	-	razem
1030 : 103	„2 duże mają tyle, co 4 małe”	2 1,3%	1 0,7%	3	30 24%	0	30
	bez uzasadnienia	-	-	-	2 16%	0	2
strategia hipotez i ich weryfikacji	wiele weryfikowanych hipotez	1 0,7%	2 1,3%	3	5 4%	1 0,8%	6
	tylko jedna weryfikowana hipoteza (10)	11 7,3%	0	11	15 12%	0	15
tylko odpowiedź, bez prezentacji rozwiązania		6 4%	0	6	1 0,8%	0	1
równanie		-	-	-	14 11%	2 1,6%	16
„inne” - różne obliczenia na danych liczbowych	1030 : 99	2 1,3%	15 10%	17	9 7,3%	1 0,8%	10
	1030 : 101	0	18 12%	18	8 6,5%	1 0,8%	9
	1030 : 2	0	23 5%	23	0	6 4,8%	6
	$2 \cdot 99$	0	7 4,7%	7	-	-	-
	„zonglowanie liczbami”	0	33 22%	33	0	7 5,6%	7
inna interpretacja treści zadania		-	-	-	0	8 6,5%	8
brak rozwiązania				29 19%			13 11%
Razem		22 15%	99 66%	150 100%	84 68%	26 21%	123 100%

Legenda: w kolumnie oznaczonej symbolem „+” podajemy liczbę poprawnych rozwiązań;
w kolumnie oznaczonej symbolem „-” podajemy liczbę błędnych rozwiązań;
obok liczb podano ich przybliżenia procentowe.

Były też nieudane próby wykonywania innego dzielenia $1030 : 101$, które podjęło aż 18 osób. Żadna z nich nie umiała wykonać takiego obliczenia i większość pozostawiała ten rachunek bez wyniku. Trójka badanych próbowała „na siłę” wyznaczyć ten iloraz licząc następująco:

$$1030 : 101 = (1000 : 100) + (30 : 1) = 10 + 30 = 40.$$

Sposób ten jest oczywiście niepoprawny i można sądzić, że jest przejawem zdegenerowanego formalizmu, gdyż uczeń nie ma ukształtowanego pojęcia dzielenia

(bo gdyby je miał, to nie robiłby takich błędów), a jedynie zapamiętuje jakieś procedury dzielenia i w przypadku ich zapomnienia tworzy własne niepoprawne zastępniki tych reguł (por. Hejny, 1997, s. 19-20).

Liczna grupa 23 osób podzieliła liczbę 1030 kropek przez 2 ($1030 : 2 = 515$). Prawdopodobnie nie rozumieją one dobrze porównywania ilorazowego, a zwrot *dwa razy więcej* kojarzą z mnożeniem lub dzieleniem przez 2 (tak jak w zadaniu o znaczkach), a że kropki trzeba rozdzielić, więc dzielimy. Pięcioro sformułowało odpowiedź: *Mały dalmatyńczyk ma 515 kropek*, a pozostali bądź przerywali obliczenia bez żadnego komentarza, bądź próbowali wykonywać kolejne nieuzasadnione rachunki np. $515 : 99$, $515 - 99$ lub $515 : 2$ nie prowadzące do żadnego sensownego rozwiązania.

Wśród badanych uczniów 7 wykonało mnożenie $2 \cdot 99 = 198$ i czterech z nich odpowiedziało: *Mały dalmatyńczyk ma 198 kropek*. Inni nie udzielili wcale odpowiedzi.

Aż 33 badanych uczniów próbowało **wykonywać jakiegokolwiek rachunki** wykorzystując w nich niektóre bądź wszystkie dane liczbowe z zadania. Oto kilka przykładów z dziecięcych prac:

- 1) $1030 : 99 : 2 =$, *Wyniku nie umiem obliczyć, więc nie mogę dać odpowiedzi;*
- 2) $1030 : 99 \cdot 2$;
- 3) $1030 : 101 : 2$;
- 4) $1030 : 101 \cdot 2$;
- 5) $1030 - 99 =$, *Nie znam działania;*
- 6) $101 + 2 + 99 + 1030 =$;
- 7) $1030 - 101 = 929$, $1030 - 99 = 931$, $1030 - 1000 = 30$, $1030 - 30 = 1000$, $1030 \cdot 2 = 2060$, $101 \cdot 2 = 202$, *Mały dalmatyńczyk ma 11 kropek, a duży ma 15 kropek.*

Szczególnie znamienity jest przykład 6), w którym dodane zostały wszystkie liczby dane w zadaniu i to w kolejności ich występowania w tekście. W przykładzie 7) mamy serię pojedynczych obliczeń, które nie są wykorzystywane w dalszym toku. Wygląda na to, że autor nie wie ani co liczy ani po co to robi, a udzielona odpowiedź nie ma żadnego związku z wcześniejszą pracą i nie wiadomo skąd się wzięła.

Bardzo liczna grupa, aż 29 osób, wcale nie podjęła próby rozwiązania zadania i oddała puste kartki czasami ozdobiane rysunkiem psa.

Analizując prace studentów można zauważyć, że stosowane przez nich sposoby rozwiązywania zadania nie odbiegają w istotny sposób od strategii stosowanych przez uczniów klas III. Porównując prace studentów i dzieci, istotną różnicę zauważyć można w liczbie poprawnych i błędnych rozwiązań. Tylko ok. 15% badanych uczniów poprawnie rozwiązało zadanie, podczas gdy studentów takich było ok. 68%. Szkoda tylko, że w grupie studentów zadania nie rozwiązało (wcale lub błędnie) prawie 32%, a było to przecież zadanie z klasy III.

Większa liczba (32) studentów niż uczniów zauważyła, że **2 dorosłe dalmatyńczyki mają tyle samo kropek, co 4 młode**, mogła więc obliczyć liczbę kropek małych psów wykonując dzielenie $1030 : 103$, przy czym dwoje nie uzasadniło tej operacji (liczba 103 nagle się pojawia, ale nie wiadomo skąd).

Spora grupa studentów poszukiwała rozwiązania **stawiając hipotezy, które następnie weryfikowała**. Tak postąpiło 21 osób, w tym 6 stawiało i weryfikowało wiele hipotez i wszystkie uzyskały właściwe rozwiązanie jednakże jedna z nich nie sformułowała odpowiedzi, dlatego nie doliczyliśmy jej pracy do poprawnych rozwiązań. Aż 15 osób postawiło jedną trafną hipotezę, po sprawdzeniu której sformułowało odpowiedź.

Aż 16 studentów rozwiązywało zadanie **za pomocą równania**, mimo tego, że proszeni byli o stosowanie strategii dostępnych uczniom klas I – III. Dwoje z nich nie potrafiło zrobić tego poprawnie.

Grupa 19 studentów rozpoczęła rozwiązywanie zadania od wykonania dzielenia. W 10 przypadkach było to dzielenie **1030 : 99**, a w 9 przypadkach było to dzielenie **1030 : 101**. Choć żadna z tych propozycji nie jest dobrą strategią rozwiązania tego zadania, to jednak 17 osobom udało się znaleźć poprawne rozwiązanie. Możliwe to było tylko dzięki specyficznemu zestawieniu danych. I w jednym i w drugim przypadku ilorazem była liczba 10 i reszta odpowiednio 40 lub 20. Ten specyficzny wynik sugerował właściwe rozwiązanie zadania („mały ma 10 kropek“), które wystarczyło już tylko sprawdzić i sformułować odpowiedź. Próby tego samego dzielenia stosowane przez uczniów nie doprowadziły ich do pozytywnych rezultatów, gdyż nie poradzili sobie z trudnością rachunkową jaką jest w tym przypadku dzielenie z resztą.

Trzynaście osób wykonywało „inne“ obliczenia, w tym 6 osób podzieliło **1030 : 2**. Niektórzy nawet uzasadniali to dzielenie pisząc „*bo 2 razy więcej*“. Świadczy to o braku rozumienia porównywania ilorazowego. Siedem osób zrobiło przeróżne **dziwne zapisy i dziwne rachunki**. Pisały na przykład:

- 1) *dwa dorosłe mają* $2x$, $2x + 99y = 1030$, $101xy = 1030$, $xy \approx 10,19$;
- 2) *x małe, y dorosłe*, $2x + y = 1030$ i $2y + 99x = 101$ [tu następuje próba rozwiązania tego dziwnego układu równań, prowadząca do wyniku $x = 653$];
- 3) *1030 kropek* $\rightarrow$ *101 wszystkich*
x kropek $\rightarrow$ *99 małych*
 $x = (1030 \cdot 99) : 101$ [tu następuje porzucenie rachunków i pojawia się inna proporcja, która również do niczego nie prowadzi].

Powyższe przykłady z prac studentów są, naszym zdaniem, tak jak w przypadku niektórych prac dzieci, wyraźnym objawem formalizmu zdegenerowanego. Autorzy tych prac posługują się pojęciami i symbolami w sposób chaotyczny i nonsensowny, co wskazuje wyraźnie na brak rozumienia ich sensu. Można nawet powiedzieć, że studenci tak jak dzieci tworzą własne „reguły“ na potrzeby chwili (por. Krygowska, 1986, s. 27).

Osiem osób nie rozwiązało poprawnie zadania ze względu na to, że **inaczej zinterpretowało jego treść**. Zrozumiały one, że wszystkie duże psy mają dwa razy więcej kropek niż wszystkie małe stąd, jeżeli „małe mają jedną część kropek to duże mają dwie takie części“. Zatem liczbę wszystkich kropek należy rozdzielić na 3 równe części. Uzyskany w ten sposób iloraz jest liczbą kropek w jednej takiej części, czyli liczbą kropek wszystkich małych dalmatyńczyków. Wystarczyłoby znaleźć w ten sposób liczbę kropek rozdzielić po równo między 99 małych pieszków, a znaleziony iloraz byłby liczbą kropek jednego małego. Ta interpretacja zadania jest całkiem sensowna i próba rozwiązania poprawna. Trudność polega na tym, że dane liczbowe nie pozwalają na przeprowadzenie niezbędnych przy tej interpretacji rachunków $[(1030 : 3) : 99]$.

Zauważmy w tym kontekście jak ważny jest sposób redagowania treści zadania. Użyty w zadaniu zwrot „*dorosłe dalmatyńczyki mają dwa razy więcej kropek niż małe*“ pozwala na taką właśnie interpretację, jaka pojawiła się w 8 opisywanych pracach. Jednakże dobór danych w zadaniu świadczy o tym, że jego autor zakładał tylko interpretację przedstawioną w rozwiązaniach (1) - (5). Można więc uznać, że zadanie jest źle zredagowane. Zamiast użytego w zadaniu zwrotu, lepsze byłoby sformułowanie: „każdy dorosły dalmatyńczyk ma dwa razy więcej kropek niż mały“.

Być może taka nieprecyzyjna redakcja zadania spowodowała, że dość liczna grupa osób (13 studentów) zadania wcale nie rozwiązała a omawiana grupa 8 osób robiła to bezskutecznie.

Omawiane zadanie okazało się bardzo trudne dla dzieci, a jak pokazują badania nie było też łatwe dla studentów. I u jednych i u drugich dało się zauważyć takie same strategie jego rozwiązywania. Istotne różnice dotyczą liczby poprawnych i błędnych rozwiązań oraz liczby osób stosujących wybraną strategię.

Studenci nieco lepiej poradzili sobie z tym zadaniem, ale nie tak dobrze jak można by od nich oczekiwać. Smutne jest, że przyszli nauczyciele, sami nie rozumiejąc podstawowych pojęć zamierzają kształtować je u dzieci.

Zarówno dzieci jak i studenci nie potrafią matematyzować sytuacji opisanej w zadaniu, nie radzą sobie z rozwiązywaniem problemów matematycznych, nie potrafią wyjść poza wyuczone schematy postępowania. W każdej sytuacji zadaniowej na siłę próbują zastosować któryś ze znanych im schematów rachunkowych, stąd tak duża liczba „bezmysłnych obliczeń”, którym nie towarzyszy żadna refleksja.

Uzyskane przez nas wyniki dają pewien niezadowolający obraz edukacji matematycznej w naszym kraju. Co jest przyczyną takiego stanu? Sądzymy, że wpływ na to mogą mieć zaniedbania w zakresie rozwijania aktywności matematycznych (por. Krygowska, 1986) oraz w zakresie rozwijania logicznego i twórczego myślenia. Najłatwiej stawiać jest uczniów wobec sytuacji typowych, schematycznych nic więc dziwnego, że tylko z takimi uczniami i studenci radzą sobie najlepiej. Każda nowa sytuacja, wymagająca wyjścia poza wyćwiczone strategie wywołuje bezradność, panikę lub wycofanie się.

Literatura

1. HEJNY, M. *Rozwój wiedzy matematycznej*. Dydaktyka Matematyki 19, 1997, s. 15 – 28, ISSN 0208-8916.
2. KRYGOWSKA, Z. *Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczącą rolę w matematyce dla wszystkich*. Dydaktyka Matematyki 6, 1986, s. 25 – 41, ISBN 83-01-07792-1.
3. LUDWA, A. *Wesoły świat matematyki dla klasy III*. Centrum Edukacji Dziecięcej.
4. POLYA, G. *Jak to rozwiązać?* PWN Warszawa 1993, ISBN 83-01-11195-X.

Kontaktні adresa

Barbara Nawolska, doktor
Instytut PPiS, Akademia Pedagogiczna,
30-060 Kraków, ul. Ingardena 4
E-mail: bnawol@ap.krakow.pl; bnawol@vp.pl

Joanna Żądło doktor
Instytut PPiS, Akademia Pedagogiczna,
30-060 Kraków, ul. Ingardena 4
E-mail: jzadlo@ap.krakow.pl; joannazadlo@poczta.onet.pl

O ÚLOHÁCH ZE SOUTĚŽE MATEMATICKÝ KLOKAN

Bohumil NOVÁK

Abstrakt

V příspěvku se zamýšlíme nad učebními úlohami, které jsou obsahem soutěžních testů v kategorii Écolier (Klokánek) v české i mezinárodní verzi. Nabízíme několik pohledů na soutěžní úlohy, na jejich tvorbu, výběr a způsob hodnocení, vycházejících z dosavadních zkušeností autorů úloh, organizátorů a garantů této soutěžní kategorie. Pozornost věnujeme matematickému obsahu a způsobu prezentace úloh, především úlohám kontextovým a takovým, v nichž je organickou součástí zadání úlohy obrázek nebo grafické znázornění.

ON MATHEMATICAL KANGAROO PROBLEMS

Abstract

In the contribution we discuss problems included in both Czech and international versions of the Écolier tests. Several authors', organizers' and committee members' experience is included. We also focus on the way problems, especially context (word) problems and problems, where graphical representation is important, are presented.

1. Úvod

Soutěž Matematický klokan není třeba těm, kteří se zabývají matematickým vzděláváním na primárním stupni, příliš představovat. V podmínkách českého školství i v zahraničí je považována za vhodný instrument propagace matematiky v očích rodičů i širší veřejnosti, popularizace matematiky jako školního předmětu. Čtvrt milionu každoročních aktivních účastníků v pěti kategoriích a stovky učitelů zapojených do realizace soutěže v ČR jsou přesvědčivým důkazem toho, že soutěž našla na školách své místo. Účastníci soutěže, žáci a jejich učitelé, dobře vědí, že pro nejmladší žáky – 4. a 5. ročníku ZŠ – je určena kategorie Klokánek (v zahraničí obvykle označovaná názvem Écolier). Právě v této kategorii je účast v soutěži často prvním pokusem žáků změřit své možnosti, znalosti a schopnosti s vrstevníky ve třídě, škole, regionu či v celé republice, ale i v mezinárodním měřítku. První setkání s „klokanskými“ úlohami jsou pro žáky často podnětnou zkušeností vedoucí k vlastnímu poznání, že matematická úloha může být přitažlivá a zajímavá.

Na našich konferencích jsme již několikrát referovali o různých aspektech a didaktických souvislostech soutěže (Novák, Hodaňová 2000, Novák, 2002, Novák, Kubátová 2006).

V příspěvku nabídneme několik pohledů na soutěž a soutěžní úlohy, vycházejících z dlouhodobých – letos již čtrnáctiletých - zkušeností organizátorů a garantů kategorie určené pro žáky 1. stupně ZŠ.

2. O mezinárodní dimenzi soutěže

Každoroční setkání zástupců dnes již více než 40 pořadatelských zemí sdružených v mezinárodní asociaci s názvem „Kangourou sans frontières“ (General Meeting) se koná vždy na podzim. Stává se místem výměny zkušeností, ale také konfrontace různých názorů na aktuální organizační, ekonomické i obsahové otázky soutěže i perspektivy v dlouhodobějším horizontu. Jednání vychází z připravených podkladů osmičlenného výboru asociace (*Rapport du president*). Prezidentem asociace je od jejího založení André Deledicq z Paříže, dalšími členy výboru jsou od volebního kongresu v roce 2004 zástupci Španělska, Gruzie, Rakouska, Slovinska, Velké Británie, Nizozemí a Francie. Činnost asociace se řídí stanovami („Cílem asociace je rozšiřovat matematickou kulturu všemi možnými způsoby, zejména pak organizováním soutěže, která se koná ve všech účastnických zemích v týž den. Současně tato asociace vytváří přátelské vztahy s jinými organizacemi a mezinárodními asociacemi, které mají stejné cíle“), rozvíjí se vzájemná komunikace mezi národními organizátory a evropským centrem. Informace o asociaci lze najít na <http://www.mathkang.org>.

Ročník 2008 byl připravován na setkání v rakouském Grazu v dnech 18. - 21. 10. 2007. Jeho cílem bylo stanovit termín konání soutěže v roce 2008 a především sestavit soubor soutěžních testů pro jednotlivé kategorie v angličtině. Pořadatelé setkání jako každoročně připravili s časovým předstihem z nabídky jednotlivých zemí pro každou pracovní skupinu (soutěžní kategorii) asi 200 úloh - každá účastnická země posílá obvykle 5 úloh. Vzniká tak původní a originální soubor rozmanitých úloh, reflektujících často značně odlišnou představu účastnických zemí o jejich optimální podobě. Výběr 24 úloh do každého testu se tak stává velmi náročnou činností, která se neobejde bez diskusí a názorových konfrontací. Promítá se v ní rozdílnost vzdělávacích systémů jednotlivých států a odlišnost kurikulárního rámce matematiky na jednotlivých stupních a typech škol. Rozdílné je také chápání toho, co je „typická klokanská“ úloha – s rozmanitými akcenty danými představou jednotlivých účastníků a jejich dosavadní zkušeností s uskutečňováním soutěže ve vlastní zemi. Různé pohledy se projevují v zařazení úloh do tří úrovní obtížnosti (jejich úspěšné řešení ohodnocené 3, 4 resp. 5 body). Velká pozornost je rovněž věnována formulaci, aranžmá a grafické stránce zadání úloh, nabídce odpovědí i stanovení vhodného pořadí úloh v testech související s odhadováním jejich obtížnosti.

Je třeba uvést, že bohatý faktografický materiál, který poskytují výsledky soutěže, je v zahraničí využíván k mnoha zajímavým výzkumům (posuzují se parametry testů, komparují se výsledky dosažené různými skupinami řešitelů v závislosti na některých proměnných - věk, pohlaví, typ školy aj.).

3. O tvorbě, výběru a hodnocení úloh

Skutečnost, že soutěžní test vzhledem k nezbytnosti mechanického, obvykle strojového způsobu vyhodnocení výsledků obsahuje úlohy s výběrem odpovědí, způsobuje autorům úloh určitá omezení. Úlohy typu „jedna správná odpověď“ mohou minimalizovat či přímo vylučovat tvorbu, produkci, tolik typickou pro proces řešení úlohy (*Kašuba, 2006*). Rovněž o možnost analýzy způsobů řešení, cest k výsledku, jako nejdůležitějšího zdroje informací o úrovni zvládnutí učiva, uzavřené úlohy ochuzují -

i když byly v minulých ročnících soutěže činěny pokusy o rozbor řešitelských postupů žáků u některých vybraných úloh právě v kategorii Klokánek (Novák, Kubátová 2006).

Positiva a negativa testových úloh s výběrem odpovědi v pedagogické praxi jsou často diskutována. Nabídnuté odpovědi jsou vlastně výsledky, z nichž má řešitel volit - v dobrém testu musí být vyvážené, se „stejnou pravděpodobností“ správnosti řešení pro řešitele. Kuřina (2007) upozorňuje v dané souvislosti na to, že uzavřené úlohy nepřispívají ke kultivaci logického myšlení žáků a nerozvíjejí ani jejich kulturu vyjadřování. Autor mluví přímo o „taktice řešení testů s výběrovými otázkami“, která je podle jeho názoru spíše otázkou pragmatického než matematického myšlení. Ale na druhé straně připouští, že tyto úlohy mohou posilovat intuici, cit pro řešení problémů, orientaci v nepřehledné situaci.

Při přípravě české podoby soutěžních testů jde tedy „pouze“ o to co možná nejpřesněji a nejsrozumitelněji přeložit do českého jazyka zadání úloh zařazených do mezinárodní verze. Dle dohody je možné nejvýše 5 úloh proti mezinárodní verzi pozměnit nebo nahradit jinými úlohami - případně, kdy realie kontextu úlohy nebo její matematický obsah nelze v českých podmínkách použít.

Příprava národní verze soutěžních testů, která by zohlednila uvedená hlediska, náleží garantům jednotlivých kategorií. Mohou přitom využít mnohaletých zkušeností, odborné i pedagogické erudice týmu spolupracovníků, učitelů z různých stupňů a typů škol, na každoročním soustředění konaném vždy v lednu pod názvem *Klokani v Jeseníkách*. V atmosféře provázené věcnou, někdy i emotivní diskusí, vždy však směřující k hledání optimálních výstupů, dostávají soutěžní testy definitivní podobu.

O tom, jak je nesnadné odhadnout obtížnost úloh pro žáky (a přisoudit jim na základě tohoto odhadu příslušný počet bodů za správné řešení), svědčí každoroční statistika úspěšnosti řešení. Ve výzkumu Kubátové (2005) bylo například zjištěno, že v roce 2004 byly s nejnižší úspěšností řešeny úlohy s pořadovým číslem 14 (čtyřbodová) - pouze 3% správných řešení, s číslem 19 (pětibodová) - 6% správných řešení a s číslem 7 (tříbodová) - 8% úspěšných řešení.

4. O obsahu, způsobu prezentace úloh a jejich využití z pohledu RVP

Již při sestavování mezinárodní verze testů se volí úlohy v kategorii Klokánek ze čtyř základních oblastí školské matematiky (aritmetika, geometrie, logika, „užitá“ matematika). Uvedená skutečnost je odrazem určité přetrvávající tradice. Zařazení úloh do vymezených skupin ovšem nemusí být a také není disjunktním tříděním (některá z úloh může vykazovat znaky, umožňující zařazení do dvou nebo i více uvedených tříd).

Ukážeme na příkladech, že vymezené okruhy však do značné míry korespondují také se základními tématy vzdělávací oblasti „Matematika a její aplikace“ v Rámcovém vzdělávacím programu ZV pro 1. stupeň. To umožňuje učitelům soutěžní úlohy velmi snadno převést na úlohy s tvořenou odpovědí (případně na úlohy divergentní) a funkčně je využívat v dlouhodobějším horizontu, přesahujícím jednorázový akt vlastní soutěže. Na ukázce (4) tím lze demonstrovat možnost hledat všechna řešení.

Uvedenou tezi ilustrujeme na čtyřech vybraných úlohách. Naznačíme přitom jejich obsahovou (kurikulární) validitu ve dvou dimenzích matematického obsahu

- v rovině tematického okruhu RVP,
- v rovině očekávaného výstupu, jak je v RVP explicitně formulován,

a doplníme náměty k řešení využívající nástrojů a možností žáka primární školy.

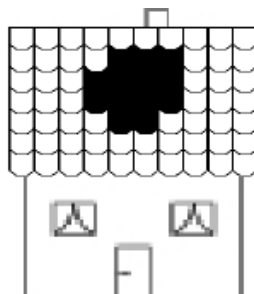
Zvolili jsme ukázky z minulých ročníků soutěže, obsahující další typické znaky úloh v kategorii Klokánek - kontextové (slovní) úlohy, v nichž je organickou součástí zadání obrázků nebo grafické znázornění.

TO: Číslo a početní operace

Žák provádí z paměti jednoduché početní operace s přirozenými čísly.

Žák řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje a modeluje osvojené početní operace.

(1) *Bouřka způsobila díru ve střeše domu. Před bouřkou bylo 10 tašek v každé ze sedmi řad. Kolik tašek zůstalo na střeše v přední části domu?*



- A) 57 B) 59 C) 61 D) 67 E) 70

K řešení může žák dospět různými způsoby. Může na obrázku v zadání spočítat, kolik tašek zůstalo („po jedné“ nebo „po řadách“ nebo „po sloupcích“). Může také od celkového počtu tašek (7×10) odečíst počet chybějících.

TO: Závislosti, vztahy a práce s daty

Žák popisuje jednoduché závislosti z praktického života.

Žák doplňuje tabulky, schémata, posloupnosti čísel.

(2) *Tabulka nám ukazuje, kolik květin roste v botanické zahradě. Když se Tomáš zeptal zahradníka, zjistil, že v zahradě je 35 tulipánů, 50 kosatců a 85 růží. Kolik tam roste karafiátů?*

- A) 95 B) 100

- C) 105 D) 110

- E) 115

tulipány	
kosatce	
růže	
karafiáty	

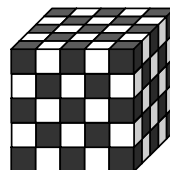
Řešení je založeno na dovednosti „číst“ údaje, znázorněné figurálním diagramem. Ze zadání plyne, že obrázek celé květiny se 4 okvětními lístky vyjadřuje 20 kusů květin (1 okvětní lístek 5 kusů).

TO: Geometrie v rovině a v prostoru

Žák rozezná, pojmenuje, vymodeluje a popíše základní rovinné útvary a jednoduchá tělesa; nachází v realitě jejich reprezentaci.

(3) Krychle na obrázku je složená pouze z černých a bílých kostek. Žádné dvě kostky stejné barvy nemají společnou stěnu. Všechny vrcholy krychle jsou černé. Kolik bílých kostek bylo použito?

- A) 60 B) 62 C) 64 D) 65 E) 68



V řešení se uplatní prostorová představivost. Z obrázku v zadání je zřejmé, že v první „vrstvě“ je z 25 kostek 13 černých a 12 bílých. Stejná „vrstva“ kostek je 3. (prostřední) a poslední. Ve druhé vrstvě je 13 bílých a 12 černých kostek. Stejně tak ve čtvrté. Je tedy počet bílých kostek: $12 + 13 + 12 + 13 + 12 = 62$.

Jiné řešení: Z obrázku vidíme, že v každých dvou „sousedních“ sloupcích je součet černých a bílých kostek stejný. V posledním 25. sloupci je o 1 černou kostku více než bílých. V celé krychli je tedy o 1 černou kostku více. V krychli je použito $5 \times 5 \times 5 = 125$ kostek, bílých je z nich $(125 - 1) : 2 = 62$.

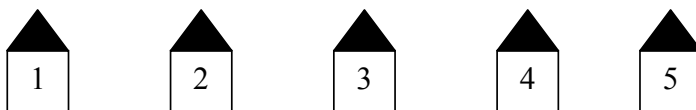
TO: Nestandardní aplikační úlohy a problémy

Žák řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky.

(4) Ulice na obrázku se jmenuje Barevná. Najdete tam modrý, červený, žlutý, růžový a zelený dům. Domy jsou očíslovány od 1 do 5. Víme, že:

- modrý a žlutý dům jsou označeny sudými čísly,
- červený dům sousedí pouze s modrým domem,
- modrý dům stojí mezi zeleným a červeným domem.

Jakou barvu má dům číslo 3?



- A) modrou B) červenou C) žlutou D) růžovou E) zelenou

K řešení může vést následující úvaha: Červený dům musí být krajní (1 nebo 5). Modrý dům musí být mezi zeleným a červeným, proto 2 nebo 4. V obou případech musí být zelený dům uprostřed, tj. číslo 3.

Pokud - mimo vlastní soutěž - obměníme otázku (Jakou barvu mají jednotlivé domy?) a nenabídneme řešiteli odpovědi, umožníme hledat obě řešení úlohy.

5. Závěr

Smyslem několika stručných poznámek bylo informovat o možná málo známých souvislostech přípravy a realizace soutěže, zprostředkovat pohled do zákulisí celoroční práce širokého týmu spolupracovníků a naznačit možnosti využití soutěžních úloh

v souvislosti s implementací Rámcových vzdělávacích programů. Mnoho dalších poznatků o organizaci soutěže v České republice a výsledcích jednotlivých ročníků lze získat na adrese www.matematickyklokan.net. Jsme přesvědčeni o tom, že Matematický klokan přináší žákům primárního stupně zásobu úloh svým matematickým obsahem, námětem či způsobem prezentace neobvyklých, často vyžadujících spíše než matematické vědomosti a dovednosti „pouze“ správný úsudek, postřeh, vzhled do problému nebo experiment.

Literatura

1. *Kangourou sans frontières. Rapport du président aux journées 2007*. Graz 2007.
2. KAŠUBA, R. *What to do when you don't know what to do?* Riga 2006. ISBN 9984-18-234-7.
3. KUBÁTOVÁ, E. Učební úlohy ze soutěže Matematický klokan a jejich řešení žákem primární školy. *Disertační práce*. UP Olomouc 2005. 177 s.
4. KURINA, F. Tvorba nebo volba. *Matematika, fyzika, informatika* **17** (2007), 1, s. 1 - 15.
5. MOLNÁR, J., ŠVRČEK, J. Kangaroo meeting 2000 v ČR. *Matematika, fyzika, informatika* **10** (2001), 8, s. 511.
6. NOVÁK, B., HODANOVÁ, J. Úloha z matematické soutěže – zdroj motivace nebo nástroj diagnostiky? In: *Matematika v přípravě učitelů elementární školy. Acta Universitatis Purkynianae 53, Studia Mathematica II*. MELICHAR, J. (ed.). Ústí n. L.: UJEP, 2000, s. 84 – 90. ISBN 80-7044-301-4.
7. NOVÁK, B., KUBÁTOVÁ, E. Obrazové reprezentace v žákovském řešení jedné soutěžní úlohy. In: *Matematika jako prostředí pro rozvoj osobnosti žáka primární školy. Acta Univ. Palack. Olomucensis, Fac. Paed., Mathematica V- 2006, Matematika 2*. UHLÍŘOVÁ, M. (ed.) Olomouc: Vydavatelství UP 2006, s. 157 - 162. ISBN 80-244-1311-6.
8. NOVÁK, B., KUBÁTOVÁ, E. *Počítejte s Klokánem. Kategorie Klokánek. Sbírká úloh s řešením ze soutěže Matematický klokan 2000 - 2004*. Olomouc: Prodos 2007, 60 s. ISBN 978-80-7230-176-8.
9. NOVÁK, B. Matematická soutěž – nová příležitost pro žáka i pro učitele. In: *Sborník z mezinárodní vědecké konference „Podíl matematiky na přípravě učitele primární školy“*. UHLÍŘOVÁ, M. (ed.). Olomouc: VUP 2002, s. 118 - 123. ISBN 80-244-0440-0.

Příspěvek byl vypracován s podporou projektu Národního programu výzkumu II STM Morava, č. 2E06029, podúkol S 006: „Výzkum vedoucí k vytvoření matematických soutěží a projektů v rámci třídy, resp. školy pro 1. a 2. stupeň ZŠ“.

Kontaktní adresa

Bohumil Novák, doc. PhDr., CSc.
Katedra matematiky Pedagogické fakulty UP
Žižkovo nám. 5, 771 40 Olomouc
Telefon: +420 585 635 701
E-mail: bohumil.novak@upol.cz

UCZYMY SIĘ PRZEZ ZABAWĘ CZYLI GRY DYDAKTYCZNE W EDUKACJI MATEMATYCZNEJ MAŁEGO DZIECKA

Jolanta NOWAK

Abstrakt

Uczenie dziecka w wieku przedszkolnym przebiega na podłożu różnorodnych doświadczeń. Naturalna potrzeba ruchu, zabawy, działania ukierunkowuje jego uwagę poznawczą, co warto wykorzystać organizując proces edukacyjny. Jedną z metod pracy, którą można wykorzystać podczas kształtowania pojęć matematycznych jest gra dydaktyczna.

W latach 2006-2007 podjęto badania naukowe, których celem było wykazanie związków i zależności występujących między stosowaniem gier dydaktycznych a efektywnością kształtowania pojęcia liczby naturalnej u dzieci sześciolletnich. Uzyskane wyniki wykazały wysoką skuteczność stosowania gier w stymulowaniu rozwoju myślenia matematycznego małego dziecka

WE LEARN THROUGH PLAYING – EDUCATIONAL GAMES IN MATHEMATICAL EDUCATION OF SMALL CHILDREN

Abstract

The process of teaching pre-school children is carried out on the basis of various experiences. The natural need to move, play and act is guiding children's cognitive focus, which is worth taking into account while organising the process of education. One of the useful methods of developing mathematical notions is an educational game.

Between 2006 and 2007, a scientific research had been conducted, which was aimed at revealing the connections and relationships between the use of educational games and the effectiveness of developing the notion of a natural number in the minds of six-year-old children. The research results revealed considerable effectiveness of such games in the process of stimulating mathematical thinking development in small children.

1. Rola gier dydaktycznych w rozwijaniu myślenia matematycznego małego dziecka

Celem edukacji matematycznej, niezależnie od szczebla kształcenia, nie jest przekazanie pewnego kompendium wiedzy określonej w programach nauczania, lecz pobudzenie aktywności umysłowej, formowanie pożądanych postaw intelektualnych, kształtowanie odporności w sytuacjach trudnych, problemowych. Matematyka to swoisty ogląd świata warunkujący jego rozumienie. Zatem należy ją traktować w kategoriach użytecznego narzędzia, jako środek i styl ludzkiej działalności, pewien sposób bycia. Jak zauważa H. Broekman (1995, s.22)) matematyka to nie tylko efekt

końcowy myślenia i badania, lecz również sam proces myślenia i badania. Niezbędne wydaje się rozwijanie takich atrybutów poznawczych, jak: ciekawość matematyczna, zdolność do dyscyplinowania swojego myślenia, umiejętność poszukiwania własnych strategii rozwiązań (Klus-Stańska, Kalinowska, 2004, s.22-23).

Na etapie przedszkolnym dziecko uczy się matematyki poprzez obcowanie z otaczającymi go przedmiotami, które rozpoznaje, porównuje, różnicuje, klasyfikuje. Zgromadzone tą drogą doświadczenia modyfikują dotychczasowe wzorce myślenia, stanowią fundament dla budowania osobistych struktur wiedzy. Wśród zadań edukacyjnych z matematyki na poziomie propedeutycznym możemy wyróżnić: poznawanie stosunków jakościowych i ilościowych oraz kształtowanie pojęć matematycznych. Jednym z podstawowych pojęć, jakie powstaje w umyśle małego dziecka jest liczba naturalna. Przystępując do kształtowania pojęcia liczby naturalnej, należy sprawdzić, czy dzieci osiągnęły niezbędny poziom rozumowania operacyjnego pozwalający na przyswojenie tego pojęcia. Aby właściwie przygotować dziecko do zrozumienia pojęcia liczby naturalnej warto zorganizować szereg ćwiczeń pozwalających na zebranie niezbędnego doświadczenia w działaniach na zbiorach. Pojęcie zbioru stanowi bowiem podstawę do kształtowania pojęcia liczby naturalnej.

Do ćwiczeń przygotowujących należy zaliczyć:

- liczenie przedmiotów i stwierdzenie liczby elementów od ich natury, sposobu ułożenia i liczenia;
- doliczanie i odliczanie;
- określanie liczebności zbioru (szacunkowe);
- porównywanie zbiorów;
- odwzorowywanie zbiorów przez łączenie ich elementów w pary(równoliczne i nierównoliczne);
- porównywanie wielkości i porządkowanie ich w kolejności wzrastającej i malejącej (Stucki, 1998,s.130)

Kształtowanie pojęcia liczby naturalnej w umysłach dzieci przedszkolnych związane jest ze stosowaniem jej w konkretnych sytuacjach: do określenia liczebności zbioru, do uporządkowania elementów według określonej kolejności lub określenia miejsca liczby w ciągu liczbowym, kojarzenia liczby z jej symbolem i operowania nią w działaniach. Wymienionym czynnościom odpowiadają następujące aspekty liczby: kardynalny, porządkowy, symboliczny i algebraiczny. Na tym etapie edukacji matematycznej nie występuje jeszcze aspekt miarowy liczby, który służy do notowania praktycznych pomiarów wielkości ciągłych.

Zajęcia dydaktyczne, na których realizujemy treści kształcenia matematycznego, mogą przybrać formę serii sytuacji zadaniowych, które pozwalają ukształtować konkretne umiejętności matematyczne. Z kolei wprowadzanie w specjalnie zaaranżowane sytuacje życiowe, umożliwia dziecku praktyczne zastosowanie nabytych umiejętności matematycznych. Natomiast zabawa dydaktyczna, jak określa H. Moroz (1991), stwarza dziecku warunki do doskonalenia tego, co już potrafi i prowadzi w kierunku poszerzania zakresu kompetencji. W tym miejscu należy dokonać uściślenia terminu „zabawa dydaktyczna”, który obejmuje dwa obszary aktywności, jakimi są zabawa i gra. Mając na uwadze sposób oddziaływania edukacyjnego w relacji z dzieckiem bardziej trafne wydaje się określenie „gra dydaktyczna”. Tym bardziej jest to uzasadnione, gdyż, jak podaje D. Waloszek (2006, s.296), „każda gra jest odmianą zabawy, natomiast nie każda zabawa jest grą”. Gra dydaktyczna należy do grupy metod problemowych, które mają na celu wyzwolenie aktywności dziecka, skłonienie go do poszukiwań, gromadzenia doświadczeń, a w konsekwencji do samodzielnego

konstruowania wiedzy w interakcji z materialnym i społecznym wymiarem rzeczywistości. Jest formą „aktywności ludycznej, w której występuje: reguła (przepis, prawidło, zasada, algorytm) wyznaczająca porządek działań, uporządkowany ciąg kontaktów z innymi ludźmi i zawierająca projekty tychże działań prowadzące do finiszu” (Waloszek, 2006, s.298).

Każda gra w odróżnieniu od zabawy nastawiona jest na wynik, który może mieć smak zwycięstwa lub porażki. Dzięki temu dziecko uczy się odnajdować w sytuacjach dających poczucie dyskomfortu psychicznego i wytrwale dążyć do zamierzonego celu. Element współzawodnictwa wyzwala naturalne emocje, motywuje dziecko do podjęcia wysiłku intelektualnego związanego z zadaniem poznawczym określonym przez przyjęte zasady gry. Przestrzegając zawartych umów dziecko wkracza w obszar odpowiedzialności za siebie, a jednocześnie uczy się kontrolować działania współpartnerów.

Dobierając starannie gry wprowadzamy dzieci w tajniki matematyzowania konkretnych sytuacji życiowych. W naturalny sposób uczymy kodowania i dekodowania informacji, co sprzyja doskonaleniu umiejętności swobodnego poruszania się na różnych poziomach reprezentacji: od enaktywnej, poprzez ikonyczną do symbolicznej i stosowania właściwego dla niej kodu językowego. W czasie rozgrywek dziecko dokonuje takich operacji jak szeregowanie czy klasyfikacja, porównuje zbiory w celu ustalenia ich równoliczności, przelicza i wyznacza wynik dodawania lub odejmowania, wzbogacając w ten sposób doświadczenie logiczne, co stanowi warunek niezbędny dla rozwoju inteligencji operacyjnej.

Gra przebiega w określonej przestrzeni i czasie, a ze względu na ściśle sprecyzowane reguły jest powtarzalna. Oznacza to, że dziecko rozpoczynając grę wkracza w świat uwarunkowany przyjętymi normami, które wyznaczają zasady zachowania się graczy. Umowa obowiązująca w grze powinna być jasno, jednoznacznie sformułowana, przedstawiona w sposób zrozumiały dla dziecka znajdującego się na określonym poziomie percepcyjnym. Istotne jest, aby reguły gry były dopasowane do możliwości wykonawczych dziecka. „Gra nie może być zbyt łatwa, bo niczego dziecka nie nauczy, a szybko znudzi. Nie może także być zbyt trudna, gdyż zniechęci i wystraszy” (Gruszczyk-Kolczyńska i in., 1996, s.29). Oznacza to potrzebę sytuowania gry wraz z jej obudową konstrukcyjną i zasadami rozgrywania w obszarze określanym mianem strefy najbliższego rozwoju dziecka. Zadaniem nauczyciela jest zdiagnozowanie poziomu kompetencji wychowanka i zaproponowanie odpowiednio dobranej gry jako gotowego środka dydaktycznego, stymulującego jego wielostronną aktywność, zarówno w sferze intelektualnej, afektywnej jak i działaniowej. Inne, równie atrakcyjne propozycje wykorzystania gier w edukacji matematycznej wiążą się z możliwością modyfikowania reguł w znanej dzieciom grze lub podjęciem wysiłku związanego z samodzielnym konstruowaniem nowej gry.

Wprowadzając dzieci w tajniki budowania gier matematycznych należy uwzględnić prawidłowości rozwoju intelektualnego i emocjonalnego, które warunkują stopień zaawansowania konstrukcyjnego i poziom matematyzacji przedstawionych w grze sytuacji. Zdaniem E. Gruszczyk-Kolczyńskiej (1996, s.42) wprowadzanie w świat gier powinniśmy rozpocząć od gry-ściganki. Celem jej jest zapoznanie dziecka z zasadami konstruowania planszy do gry oraz wspólne ustalenie prostych reguł obowiązujących w tej grze. Kolejnym krokiem będzie stworzenie gry-opowiadania, gdzie dziecko wymyśla fabułę, w której pojawiają się nieoczekiwane zwroty akcji. Treść opowiadania zostaje przedstawiona na planszy w postaci prostych rysunków naniesionych wzdłuż trasy wyścigu, które pełnią rolę premii i pułapek. Warto zachęcać dzieci do

wymyślania wielu wariantów tej gry, co przyczynia się do rozwijania mowy dziecka oraz sprzyja doskonaleniu koncentracji uwagi, pamięci oraz rozbudza zainteresowanie i ciekawość poznawczą. W miarę nabywania przez dzieci umiejętności konstruowania gier-opowiadań zachęcamy je do wprowadzania wątku matematycznego. Powoli następuje przesunięcie akcentu z warstwy werbalnej na warstwę matematyczną. Gry o rozbudowanym wątku matematycznym wymagają wykonania określonych czynności matematycznych, które pozwolą przemieścić się o określoną liczbę pól na planszy. Ostatnia z prezentowanych wersji gry stanowi świetny materiał do bogacenia doświadczeń matematycznych dziecka, pod warunkiem że będzie dobrana odpowiednio do jego możliwości intelektualnych.

Konstruowanie gier jest doskonałą rozrywką umysłową dla dzieci w wieku przedszkolnym. Działania towarzyszące wymyślaniu fabuły gry sprzyjają rozwijaniu mowy, a w szczególności uczą precyzyjnego stosowania języka matematycznego, co jest niezmiernie ważne przy ustalaniu reguł gry. Pobudzają ale jednocześnie dyscyplinują wyobraźnię, umożliwiają uczenie się antycypacji działań, wdrażają do właściwego planowania, rozwijają kreatywne, twórcze myślenie. Równie ważny jest aspekt społeczny takich działań. Wymyślając nową grę, dzieci uczą się komunikować ze sobą, prowadzić negocjacje związane z ustaleniem struktury, przebiegu gry, jak również określeniem reguł, które będą w niej obowiązywały. Istotne jest także kształcenie umiejętności interpersonalnych związanych ze współpracą i współdziałaniem w trakcie tworzenia samej gry. Dzieci stają się bardziej otwarte na propozycje innych, a jednocześnie nabywają umiejętność uzasadniania własnych koncepcji i pomysłów rozwiązań.

2. Wykorzystanie gier dydaktycznych przy kształtowaniu pojęcia liczby naturalnej w świetle badań własnych

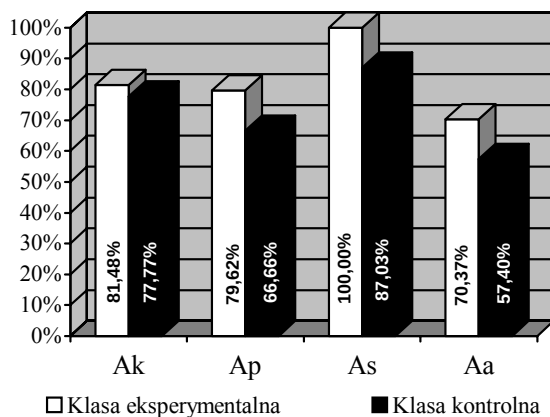
W latach 2006-2007 podjęto badania naukowe, których celem było wykazanie związków i zależności występujących między stosowaniem gier dydaktycznych a efektywnością kształtowania pojęcia liczby naturalnej u dzieci sześciolletnich. Ze względu na poziom rozwoju myślenia matematycznego dziecka w tym wieku, analizę empiryczną ograniczono do czterech podstawowych aspektów liczby naturalnej, mianowicie: aspektu kardynalnego, porządkowego, symbolicznego i algebraicznego. Znajomość literatury przedmiotu z zakresu edukacji matematycznej w przedszkolu oraz obserwacja praktyki pedagogicznej dały podstawy do sformułowania wniosku logicznego, w którym przyjęto, że gry dydaktyczne w istotnym stopniu wpływają na kształtowanie pojęcia liczby naturalnej w umysłach dzieci sześciolletnich.

Jako zmienną niezależną w podjętych badaniach przyjęto działania edukacyjne z wykorzystaniem gier dydaktycznych. Natomiast mianem zmiennej zależnej określono skutek tychże działań czyli poziom ukształtowania pojęcia liczby naturalnej.

Potwierdzenia słuszności przyjętej hipotezy roboczej poszukiwano na drodze naturalnego eksperymentu pedagogicznego, który objął 72-osobową grupę dzieci sześciolletnich uczęszczających do przedszkoli na terenie miasta Bydgoszczy.

Projekt działań dydaktycznych przyjęty dla grupy eksperymentalnej, w swych założeniach, odwoływał się do strategii problemowej. Metoda gier dydaktycznych wyznaczała procedurę osiągania zamierzonych rezultatów. Jako środek dydaktyczny wykorzystano: gry-ściganki, gry-opowiadania oraz gry z rozbudowanym wątkiem matematycznym. Natomiast przebieg procesu edukacyjnego w grupie kontrolnej uwarunkowany został przez strategię transmisyjną, która sprzyja receptywnemu stylowi uczenia się.

Oceny efektywności stosowania gier dydaktycznych w edukacji matematycznej dokonano w kategoriach ilościowych i jakościowych, odnoszących się do wybranych aspektów kształtowania pojęcia liczby naturalnej. Porównano poziom wiedzy i umiejętności dzieci prezentowany w pomiarze końcowym z założonym hipotetycznie rezultatem kształcenia.



Rys.1 Skuteczność dydaktyczna dotycząca kształtowania pojęcia liczby naturalnej w aspekcie: kardynalnym (Ak), porządkowym (Ap), symbolicznym (As), algebraicznym (Aa)

Analiza danych empirycznych zgromadzonych w toku prowadzonych badań wskazuje na znaczące różnice w poziomie rozumienia pojęcia liczby naturalnej przez dzieci uczestniczące w eksperymencie. W odniesieniu do pierwszego z badanych aspektów liczby wyrażającego moc zbioru, wielkość dyferencjału nie jest tak duża, gdyż wynosi 3,71%. Dzieci w obu badanych grupach dobrze radziły sobie z określaniem liczebności zbiorów oraz porównywaniem zbiorów o jednakowej i różnej liczbie elementów przez przeliczanie bądź łączenie w pary. Okazało się, że zastosowanie gier planszowych nie miało większego wpływu na rozumienie liczby w aspekcie kardynalnym.

Większe zróżnicowanie możemy dostrzec analizując wyniki uzyskane przez dzieci w kolejnych aspektach. Kształtuje się ono na poziomie około 13%, co oznacza, że dzieci korzystające z gier na zajęciach z matematyki lepiej opanowały umiejętność przeliczania i numerowania elementów zbioru używając liczebników porządkowych, przyswoiły symbole liczb wyrażone za pomocą cyfr. Natomiast wprowadzenie gier z rozbudowanym wątkiem matematycznych dało dzieciom możliwość ćwiczeń w dodawaniu i odejmowaniu, co wiąże się z aspektem algebraicznym.

Uzyskane wyniki badań potwierdziły słuszność założeń zawartych w hipotezie roboczej. Zastosowanie gier dydaktycznych w ramach strategii problemowej wpłynęło w znaczącym stopniu na podniesienie efektywności kształtowania pojęcia liczby naturalnej w porównaniu z konwencjonalnym sposobem realizacji procesu dydaktycznego.

Zamiast zakończenia

„Uczenie się jest najwspanialszą i dającą najwięcej radości grą na świecie. Wszystkie dzieci rodzą się z takim przekonaniem i pielęgnują je, dopóki nie przekonamy ich, że nauka jest ciężką i nieprzyjemną pracą. Niektóre dzieci nigdy nie dają się o tym przekonać i przechodzą przez życie, wierząc, że nauka jest przyjemnością i jedyną grą, w którą warto się bawić. Tacy ludzie mają swoje specjalne miano. Nazywamy ich geniuszami” (Dryden, Vos, 2000, s.392, za: Doman 1979).

Literatura

1. Broekman H.: *Zmieniający się obraz matematyki dla młodzieży szkolnej*, Warszawa 1995.
2. Dryden G. Vos J.: *Rewolucja w uczeniu*, Poznań 2000.
3. Gruszczyk-Kolczyńska E., Dobosz K., Zielińska E.: *Jak nauczyć dzieci sztuki konstruowania gier?*, Warszawa 1996.
4. Klus – Stańska D., Kalinowska A.: *Rozwijanie myślenia matematycznego młodszych uczniów*, Warszawa 2004.
5. Moroz H.: *Zabawy i gry dydaktyczne*, Warszawa 1991.
6. Stucki E.: *Nauczanie matematyki w klasach niższych. Część I*, Bydgoszcz 1998.
7. Waloszek D.: *Pedagogika przedszkolna. Metamorfoza statusu i przedmiotu badań*, Kraków 2006.

Kontaktні adresa:

dr Jolanta Nowak, adiunkt
Uniwersytet Kazimierza Wielkiego w Bydgoszczy
Instytut Pedagogiki
Zakład Pedagogiki Przedszkolnej
ul. Chodkiewicza 30
85 – 069 Bydgoszcz
E-mail: nowakjolanta@wp.pl

DYLEMATY KSZTAŁTOWANIA POJĘĆ Z ZAKRESU TZW „WIADOMOŚCI I UMIEJĘTNOŚCI PRAKTYCZNYCH”

Zbigniew NOWAK

Abstrakt

Ciekawym i bardzo ważnym działem programowym w początkowym nauczaniu matematyki są tzw. *wiadomości i umiejętności praktyczne*. Rozumiemy przez nie różnorodne wiadomości, a zwłaszcza umiejętności, które odnosząc się do fizycznych aspektów świata dają nam możliwość orientowania się w nim i skutecznego w nim działania. W szkole ten dział nie jest doceniany i traktowany jest zwykle jako jeszcze jedna okazja do rachunków, a nie jako długotrwały i trudny proces kształtowania pojęć.

SHAPING OF CONCEPTS ABOUT ‘INFORMATION AND PRACTICAL ABILITIES’ DILEMMAS

Abstract

One of the most interesting and important programmatic sections in primary instruction of mathematics are *information and practical abilities*. By them, we understand varied information and especially abilities connected with physical aspects of the world that give us possibility to orient to it and effective action. In the school this section isn't valued and it is usually treated as one more opportunity to doing calculations, but not as a durable and tough process of shaping of concepts.

Garść przykładów

Na wycieczce, zwiedzając kościół, uczeń IV klasy pyta czy do sklepienia są dwa metry (sic!), gdy w istocie nawa główna ma około 20 m. Zapytany o własny wzrost odpowiada, iż ma 1,50 m.

Klasa II. Uczeń pyta czy samochód waży 20 kg (chodzi o to czy waży aż 20 kg)?

Dzieci z klasy III z dużą biegłością odczytują i zaznaczają temperatury w różnych stolicach Europy. W Moskwie temperatura wynosi -11°C . Kilku uczniów, z tych najaktywniejszych, wyraża zdziwienie i wątpliwości czy w takiej temperaturze ludzie mogą żyć? Dzieje się to w dniu, w którym termometr zaokienny wskazywał 10 stopni mrozu.

Klasa III. Dzieci uzupełniają liczbami treść zadania związanego z zakupami w sklepie z przyborami szkolnymi. Uczeń jako cenę zeszytu podaje 800 zł (ok. 300\$). Indagowany w tej sprawie podaje cenę zeszytu w szkolnym sklepiku, która wynosi 2 zł.

Mam pojęcie

Mieć pojęcie to nie tylko znać nazwę i nawet posługiwać się nią. Posiadanie pojęcia można przyrównać do pudełka, na którym, owszem przyklepiona jest plakietka z nazwą, ale przede wszystkim, wewnątrz którego jest obfity i różnorodny zbiór

desygnatów, czynności, doświadczeń, wyobrażeń i skojarzeń z nim związanych, a ten, kto ma pojęcie, potrafi wrzucać do niego kolejne elementy, które odpowiadają wyabstrahowanemu kryterium. W ten sposób nazwa zaczyna znaczyć (konotacja) i oznaczać (denotacja) stając się pojęciem *sensu proprio*. Zignorowanie tego procesu lub przebycie go „na przełaj”, skróconą drogą prowadzi do formalizmu zdegenerowanego (Hejny 1997, s.19), gdzie uczniowie posługując się z dużą nawet swobodą pewnym pojęciem (właściwie jego nazwą) i wykonując formalne operacje z jego zastosowaniem, w istocie go nie rozumieją. Kształtowanie pojęcia przypomina więc naukę macierzystego języka, gdzie uczymy się zarówno słówek, jak i ich znaczeń, a znajomość samych słówek prowadzi co najwyżej do belkotu (Bocheński 1995; 28,29).

W odniesieniu do interesujących nas tu pojęć związanych z miarami, porównanie to jest o tyle trafne, że i tu kompetencję, podobnie jak kompetencję językową, dziecko zdobywa w życiu i dla życia, a w szkole pozyskuje tylko pewną wiedzę naukową o systemie, która sama, bez treści nic nie znaczy.

Wiadomości i umiejętności praktyczne w edukacji zintegrowanej

Opisane wyżej kłopoty z kształtowaniem pojęć są w szczególności sposobem udziałem *wiadomości i umiejętności praktycznych*. Rozumiemy przez nie różnorodne wiadomości, a zwłaszcza umiejętności, które odnosząc się do fizycznych aspektów świata dając nam możliwość orientowania się w tym świecie i skutecznego w nim działania. Dział ten w polskiej szkole obejmuje:

- 1) pomiar wielkości ciągłych takich jak rozciągłość, pole, objętość i masa (znajomość jednostek i ich wzajemnych relacji, umiejętność dokonywania pomiaru stosownymi narzędziami oraz wykonywania obliczeń na liczbach mianowanych),
- 2) pomiar czasu tak zegarowego, jak kalendarzowego (znajomość jednostek i ich wzajemnych relacji, umiejętność odczytywania wskazań zegara oraz dokonywania obliczeń w systemie dwunasto i dwudziestoczworogodzinnym. Jest to element systemu miar, w którym odczyty i obliczenia wykonywane są w systemie niedziesiątkowym),
- 3) pomiar temperatury (znajomość jednostki, umiejętność odczytywania wskazań termometru i dokonywania obliczeń, także w zakresie temperatur ujemnych),
- 4) znajomość systemu monetarnego i umiejętność wykonywania stosownych obliczeń pieniężnych.

Ta ostatnia kwestia, jakkolwiek przez stosowanie liczb mianowanych i przyjęty powszechnie metryczny system w wartościowaniu nominalów jawi się dzieciom, a nawet nauczycielom jako podobna do systemu miar i wag, jest zjawiskiem innym i nie będzie przedmiotem opracowania,

W dalszej części skoncentruję się na kształtowaniu pojęć związanych z pomiarem długości. Jest to właściwość świata, która jawi się nam najbardziej spektakularnie i najłatwiej ją mierzyć. W systemie miar stosowanym współcześnie jest też, jak wiadomo bazą, z której wyprowadzone są jednostki objętości i masy. W sensie merytorycznym i dydaktycznym miara rozciągłości ma więc charakter paradygmatu do kształtowania miar pozostałych.

Etapy kształtowania pojęcia miary

Jak się wydaje zasadniczym problemem dydaktycznym w kształtowaniu miar jest zagubienie ich aspektu poznawczego i skoncentrowanie się na kwestiach

rachunkowych. W efekcie dzieci z biegłością dodają i odejmują wielkości mianowane, przeliczają jednostki itp. nie w pełni zdając sobie sprawę z ich istoty i fizycznego wymiaru. Kierowanie aktywnością poznawczą dzieci w toku nabywania wiedzy i umiejętności związanych z mierzeniem świata powinno polegać więc przede wszystkim na stworzeniu uczniom możliwości wytworzenia bogatej i zróżnicowanej masy apercypcyjnej obejmującej czynności motoryczne, i wyobrażenia odnoszące się do miary i jej jednostek. Stosując kategorie zaproponowane przez Jerome S. Brunera, możemy powiedzieć, iż pozwala to na wytworzenie się w świadomości dzieci *reprezentacji enaktywnej* oraz *ikonicznej* tworzonego pojęcia, a co za tym idzie wytworzenie jego prawdziwej *reprezentacji symbolicznej*, gdzie słowo i liczby zarówno znaczą, jak i oznaczają (za: Łuczyński 1998; 747).

Warto przypomnieć, iż wg Brunera osiągnięcie wyższych standardów rozwojowych (reprezentacji) związane jest z „zasiedlaniem” kolejnych piętér, a nie z przechodzeniem na następne, tak że odzwierciedlanie pojęcia na poziomie symbolicznym współobejmuje reprezentowanie go w świadomości także na poziomie enaktywnym i ikonicznym. Pominięcie więc, lub niedocenienie wcześniejszych etapów musi prowadzić do budowania „zamków napowietrznych” i w praktyce nieumiejętność posługiwania się miarą i jej pojęciem.

Cały proces tworzenia wiedzy i umiejętności odnoszących się do miar rozciągłości można, jak się wydaje podzielić na kilka etapów, które zgodnie ze swoisćcie pojętym prawem Haeckla mają być rekapitulacją doświadczeń ludzkości i obejmują:

- 1. Spontaniczne gromadzenie przez dziecko wiedzy i doświadczeń związanych z pomiarem rozciągłości w toku aktywności własnej w środowisku przyrodniczym i społecznym.** Rozwój postrzegania stereoskopowego, sprawności manipulacyjnej skoordynowanej ze wzrokiem, a zwłaszcza zdobycie umiejętności sprawnego przemieszczania się w przestrzeni powodują, iż dziecko zaczyna postrzegać świat w atrybucie jego rozciągłości i gromadzi różnorodne jednostkowe doświadczenia z tym związane. Osluchuje się także, w miarę nabywania kompetencji językowej, z nazwami jednostek kojarząc je i odnosząc, często jeszcze nietrafnie, do różnych wielkości.
- 2. Intencjonalne, kierowane przez nauczyciela, postrzeganie i porównywanie przez dziecko przedmiotów pod względem cech wielkościowych** takich jak: długi-krótki, gruby-cienki, niski-wysoki oraz umiejętność szeregowania przedmiotów wedle tych cech. Porównywanie takie obejmuje w dalszym etapie także przedmioty i formy abstrakcyjne na rysunkach.
- 3. Uświadomienie sobie przez dziecko konieczności pomiaru pośredniego i jego istoty** rozumianej jako porównywanie wielkości mierzonej z wielkością przyjętą za jednostkę, gdzie liczba wskazuje ile razy w mierzonej wielkości mieści się jednostka i podane jest jej miano. Wydaje się, iż naturalnym doświadczeniem dziecka są raczej dylematy typu: *kto jest wyższy?*, *kto jest cięższy?*, *kto dalej skoczy?*, na które to pytania można odpowiadać przez bezpośrednie porównanie ze sobą osób czy przedmiotów, a nie pytania odnoszące się do miary. Wychodząc od takich zdarzeń należy więc sprowokować sytuacje, w których zwykłe porównanie nie jest możliwe lub jest kłopotliwe. Mogą być nimi np. porównywanie wysokości dzieci mieszkających w różnych miejscowościach czy długości ścian klasy, gdzie by go dokonać musimy użyć trzeciej wielkości, którą można wymierzyć obie ściany, a liczby będące wynikiem tego pomiaru porównać ze sobą.

4. **Poznanie przez dziecko jednostek standaryzowanych.** Mierzenie rzeczy i otoczenia różnymi przedmiotami, co daje zawsze wynik nieprecyzyjny i niejednoznaczny (ołówki i kroki różnej wielkości) jest okolicznością, która powinna uświadomić i uzasadnić psychologicznie potrzebę istnienia miar wyrażających wielkości bardziej obiektywnie i jednoznacznie. Miary te, zaczynając od centymetra, są sukcesywnie wprowadzane. Kolejność ich wprowadzania odpowiadająca bardziej kryteriom psychologicznym i pedagogicznym, niż merytorycznym. Zaczynamy nie od jednostek podstawowych, ale od tego, co jest bliskie doświadczeniu dzieci, łatwo może być skojarzone z czynnościami mierzenia, szacowania „na oko” i wyobrażeniami. Po zatoczeniu wielkiego koła, uczniowie dochodzą więc wreszcie do wiedzy, którą w postaci szczątkowej posiadali na początku. Tym razem jednak mają szansę nie tylko znać nazwy jednostek, ale rozumieć także ich istotę.

Warto tu przypomnieć, iż współcześnie stosowane miary metryczne powstały w końcu XVIII wieku tyle z „ducha geometrycznego” epoki, tendencji do ich obiektywizacji, oderwania od człowieka, co jako akt polityczny zerwania z ancien régime i przeszłością w każdym jej aspekcie¹. Trzy podstawowe miary, tj.: rozciągłości, masy i objętości zostały więc zdefiniowane w kontekście wymiarów Ziemi², co z resztą rychło okazało się na tyle nieprecyzyjne, iż zastąpiono je całkowicie arbitralnymi odnosząc je do wzorców przechowywanych w Sèvres, i ponownie redefiniując na kolejnych kongresach miar. Miary metryczne straciły więc swój obiektywizm (kreski na wzorcu można było w końcu zrobić w dowolnie innym miejscu) tracąc równocześnie na zrozumiałości tradycyjnych. Miary wcześniejsze takie jak: cal, piędź, stopa, łokieć, sążen itp. odwzorowywały wymiary człowieka tak, że o wiele łatwiej przekładały się na wartościową poznawczo wiedzę o otaczającym świecie. Jak pokazuje praktyka, nawet życie od wielu już pokoleń pod jarzmem miar metrycznych nie zmienia kłopotu z ich określeniem.

5. **Wykonywanie obliczeń z wykorzystaniem liczb mianowanych i przeliczanie jednostek w ramach systemu.** Ten czysto formalny aspekt stosowania miar, jest w szkole, jak się zdaje nadreprezentowany. Zapewne w największym stopniu kojarzy się nauczycielom z tym, co ich zdaniem powinno się robić na matematyce, jest też organizacyjnie najprostszy i nie wymaga ani aparatury, ani żadnych przyrządów. Biegłość uczniów w zakresie tego typu obliczeń powoduje złudne wrażenie u nauczyciela, iż mają oni ukształtowane pojęcie stosownej miary. Między nauczycielem i uczniem wyrasta bariera oczywistości (Nowak 2007: 221), która powoduje, iż nauczyciel przypisuje uczniom własną wiedzę i umiejętności w tym względzie, zapominając, jak wszyscy dorośli, o fakcie występowania swoistej habituacji (oswojenia) długo i powszechnie używanych pojęć, o tym, iż za ich pojęciami miar stoi skumulowane doświadczenie kilkudziesięciu lat życia i nauki, a jakiegokolwiek wykroczenie poza nie powoduje także u nich podobnie dziecięce zagubienie³.

¹ Ofiarą tego metrycznego szaleństwa, na szczęście na krótko, padły także miary czasu.

² Odpowiednio metr zdefiniowano jako 1/10 000 000 ćwierci południka paryskiego (od równika do Bieguna Północnego), litr jako 1 dm³ i kilogram jako 1 dm³ wody.

³ Może o tym świadczyć kompletna bezradność, nie specjalistów w rozumienia fenomenów świata w wielkościach nano-, a nawet mikrometrycznych.

Rekapitulując zagadnienie należy stwierdzić, iż warunkiem skuteczności w kształtowaniu wiedzy i umiejętności z zakresu wiadomości i umiejętności praktycznych jest „powrót do źródeł”, do świata i jego mierzenia. Potraktowanie ich, jako okazji do nabywania różnorodnych motorycznych i wyobrażeniowych doświadczeń, a nie jako jeszcze jedną, wątpliwą okazję do ćwiczenia rachunków.

Literatura

1. BOCHENSKI, J. *Sto zabobonów. Krótki filozoficzny słownik zabobonów*. 2. wyd. Kraków: wydawnictwo PHILED, 1995. s. 140. ISBN 83-86238-10-0.
2. HEJNY, M. *Rozwój wiedzy matematycznej*. Dydaktyka Matematyki 19, 1997, s. 15 – 28, ISSN 0208-8916.
3. NOWAK, Z. Bariera oczywistości w początkowym nauczaniu matematyki, W: *Matematika w szkole dnes a zajtra. Zbornik 7. ročnika konferencie s medzinárodnou účasťou*. Ružomberok: wyd. Katolícka Univerzita v Ružomberku, 2007. s. 221-225. ISBN 978-80- 8084-187-4
4. ŁUCZYŃSKI, J. Rozwój inteligencji. W: *Encyklopedia Psychologii*. Warszawa: wyd. Fundacja INNOWACJA, 1998, s. 743-748. ISBN 83-86169-19-2

Kontakt i adres

Zbigniew Nowak, doktor
Instytut Pedagogiki Przedszkolnej i Szkolnej
Akademia Pedagogiczna w Krakowie
Ul. Romana Ingardena 4
Telefon 048-012-421 69 56
E-mail: amadeusz56@o2.pl

TRADÍCIA VERZUS INOVÁCIA VO VYUČOVACÍCH MATERIÁLOCH PRE DIDAKTIKU ELEMENTÁRNEJ MATEMATIKY

Edita PARTOVÁ

Abstrakt

V príspevku uvedieme hlavné ciele tvorby učebnice zdôvodníme voľbu platformy a predstavíme obsah učebnice. Uvedieme niektoré skúsenosti, ktoré poukazujú na to, v procese nahradenia tlačeneho textu digitálnymi informáciami (textovými, obrazovými alebo multimediálnymi) musíme rešpektovať kultúrne tradície, preto pravdepodobne ešte dlho budú vo vyučovaní paralelne existovať tlačené vyučovacie materiály aj elektronické a každý z nich bude mať svoje opodstatnenie.

TRADITION VERSUS INOVATION IN TEACHING MATERIALS FOR ELEMENTARY MATHEMATICS TEACHING

Abstract

In the article is presented the content of the online textbook, the process of creating and our experiences with its application. Our experience showed the possibility; to replace the printed textbook with digital, in near future maybe is delayed. One of the main reasons is our cultural background. The printed text has a long tradition in our culture, and for the next few years probably they will work side by side with the digital one.

1. Úvod

Modernizácia školstva prostredníctvom ICT je jednou z priorít MŠSR. Ukázalo sa, že vytvorenie vhodného vyučovacieho obsahu, metodiky, a personálne zabezpečenie vyučovania pomocou IKT je oveľa zložitejšia a časovo náročnejšia úloha ako zabezpečiť technické prostriedky. Pretváranie tradičnej školy na modernú vyžaduje aj zohľadnenie iných aspektov ako sú vyššie vymenované: napr. kultúrne a sociálne prostredie, rovnosť šancí vo všetkých oblastiach, ochrana životného prostredia a iné.

Uvedomujeme si, že budúci učiteľ matematiky by sa mal naučiť na vysokej škole minimálne využívať hotové digitálne výučbové materiály a osvojiť si metodiku používania digitálnych technológií. To sú dôvody tvorby elektronickej učebnice didaktiky elementárnej matematiky.

Väčšina pedagogických fakúlt už má vytvorené niekoľko typov elektronických materiálov aj pre študentov učiteľstva pre 1. stupeň základnej školy. Prvá fáza v tomto procese sa vyznačovala tým, že sa zverejnili pôvodné učebné texty v elektronickej verzii v textovom formáte, čo umožnilo prístup k materiálom aj vzdialenému

užívateľovi. Neskôr sa čoraz častejšie objavovali materiály, ktoré využívali výhody webstránky a v súčasnosti sa tvoria interaktívne materiály s vysokým stupňom riadiacich výučbovými systémami (LMS, LCMS).

2. Ciele a princípy tvorby elektronickej učebnice didaktiky matematiky

Niektoré matematické predmety sú už spracované, spravidla sú aj voľne dostupné alebo dostupné pre hosťovského užívateľa s nejakým obmedzením. Už aj tieto kurzy sa vyznačujú interaktívnymi prvkami, využívajú sa diskusné fóra, alebo sa riešia úlohy on-line. Požiadavka dynamiky a interaktivity je v didaktike ešte dôraznejšia, preto sme sa rozhodli v spolupráci s Prešovskou univerzitou a Univerzitou Konštantína filozofa vytvoriť učebnicu didaktiky elementárnej matematiky v elektronickej forme. Cieľom bolo vytvoriť čo najviac dynamický a čo najviac interaktívny komplexný študijný materiál.

Pri tvorbe sme využili systém moodle, ktorý je najrozšírenejší na Slovensku. Tento systém rovnako dobre vyhovuje pre riadenie kurzov ako pre tvorbu obsahu kurzov teda aj našej „učebnice“. Podrobnejšie informácie o systéme moodle, jeho možnostiach a výhodách sa dočítate napr. v (). Voľba systému určila aj štruktúru učebnice. Vychádzali sme z pravidiel štrukturalizácie a systematizácie materiálu podľa Pšenákovej () a snažili sme sa dodržať pravidlá vizuálnej hierarchie.

Sprievodným cieľom tvorby učebnice je integrovať moderné digitálne technológie do vyučovania učiteľov elementaristov napr. používanie internetu, používanie e-beam systému, spolupráca na diaľku, e-learning a pod.

3. Obsah učebnice



Obrázok 1: Ukážka časti učebnice

Obsah učebnice sme rozdelili na 10 častí, ktoré sa v systéme moodle nazývajú *témy*, sú to:

Úvodné pojmy k prirodzeným číslam, Numerácia, Sčítanie, Odčítanie, Násobenie, Delenie, Zlomky a desatinné čísla, Geometria-základné pojmy, Geometria-rovinné útvary, Geometria - priestorové útvary. Ukážka časti učebnice je na obrázku 1.

Pri spracovaní každej témy sme využili rôzne druhy zdrojov: webstránku, textový dokument, obrázok, schémy, videa, softvér, prezentáciu a pod. Okrem materiálov typu *zdroje* sme využili materiály typu *zadania*. Typ zadanie sme používali pri zadávaní úloh študentom alebo skupinám študentov na samostatné riešenie. Nevýhodou formátu *zadanie* je, že hosťovský užívateľ k nim nemá prístup. Zadania, však, majú svoje výhody:

- každému zadaniu je možné priradiť bodové hodnotenie a študenti môžu sledovať výsledky priebežného hodnotenia,
- všetci učitelia kurzu môžu (a nemusia) ich používať pre svoju skupinu študentov,
- niektoré úlohy študenti môžu riešiť on-line,
- riešenie zadania zvyšuje informatickú gramotnosť študentov.

Pri tvorbe sme vychádzali z koncepcie, že pre každú tému vytvoríme pojmovú mapu a k jednotlivým pojmom budú priradené ďalšie zdroje. Táto koncepcia sa len sčasti uskutočnila, lebo počas používania učebnice sme zistili, že nie všetkým študentom vyhovuje takáto štruktúra, preto sme popri pojmových máp ponechali aj lineárne usporiadanie učiva.

Do tvorby boli aktívne zapojení aj študenti, niektoré zdroje sú sčasti alebo úplne študentské práce, autorstvo je pri každom zdroji vyznačené.

4. Skúsenosti

Kurz sme overovali počas dvoch semestrov na Katedre matematiky PdF UK v Bratislave v dennom štúdiu. Organizácie práce s elektronickou učebnicou vyžaduje podrobnejšiu prípravu učiteľa pred vyučovaním ako klasické formy. Predpokladom realizácii projektu bola dostupnosť internetu pre každého študenta mimo školy, táto podmienka bola splnená. Študentov sme zapísali do systému a priradili im vstupné heslá, aby mohli pracovať s učebnicou v škole aj doma.

V škole mali študenti k dispozícii dva notebooky a jeden stolový počítač priamo v učebni a mohli používať aj vlastné notebooky. Na internet sa pripojili prostredníctvom wifi. Učiteľ používal svoj počítač s interaktívnou bielou tabuľou.

Najtypickejší priebeh kurzu predpokladal naštudovanie niektorých presne určených častí učiva doma, a v škole prebiehali aktivity na danú tému napr.: diskusia, navrhovanie znázornenia pojmu, navrhovanie motivačnej úlohy, tvorba otázok v heuristickom rozhovore, argumentácia pre a proti spôsobu prístupnosti učiva, argumentácia pre a proti spôsobu znázornenia učiva, voľba spôsobu používania učebnej pomôcky a pod. Práca prebieha individuálne a v skupinách, pri skupinovej práci sa spravidla využívalo zdieľanie súborov cez internet, a výsledky skupín boli prezentované na digitálnej tabuli. Práca s digitálnou učebnicou bola kombinovaná s používaním iných učebných pomôcok (trojrozmerné pomôcky, fólie, obrázky, texty).

Počas semestra každý študent mal vypracovať prípravu na vyučovanie vopred určeného učiva, a referovať o tom v škole, nasledovala diskusia a bodové hodnotenie (súčasť priebežnej kontroly). K jednotlivým témam sú zaradené domáce úlohy v tvare *zadania*, ktoré vypracujú študenti elektronicky a vložia do systému. V prvom overovacom období študenti uprednostnili posielanie výsledkov e-mailom. Výsledky

domácich úloh sú súčasťou priebežnej kontroly, okrem toho študenti absolvujú štyri priebežné testy prezenčnou formou a vypracujú skupinový projekt. Záverečné hodnotenie je rozdelené na písomnú (test) a ústnu časť (kolokvium). Hoci mnohí autori a užívatelia elektronických kurzov zdôrazňujú výhodu diskusných skupín, túto možnosť sme nevyužili vzhľadom na to, že diskusia prebiehala priamo na vyučovaní. Ak v budúcnosti túto učebnicu budú používať aj externí študenti, pravdepodobne sa nezaobídeme bez diskusného fóra.

Počas preverovania elektronickej učebnice vo vyučovaní v dennom štúdiu sme sledovali vplyv tohto materiálu na návyky študentov. Zistili sme niekoľko pozoruhodných

- všetci zapísaný študenti mali prístup k internetu mimo školy
- v prvom overovacom období do systému moodle vkladali svoje riešenia len približne polovica študentov (ostatní poslali elektronickou poštou, napriek tomu že boli prisľúbené prémiové body za používanie moodle)
- a v druhom období okrem jednej študentky všetci používali moodle na vkladanie riešenia zadání.
- pôvodná koncepcia bola zverejniť texty vo webovom formáte, ale rozhodli sme sa zhrnutie zverejniť aj ako dokument, lebo študenti študovali z vytlačených materiálov.
- úlohy, ktoré vyžadovali grafické spracovanie riešili študenti rôznymi cestami, rukou nakreslené obrázky skenovali a vložili do súboru, digitálne obrázky vložili do súboru alebo sami nakreslili v niektorom kresliacom programe.
- na začiatku semestra študenti uprednostnili klasickú tabuľu a kriedu, ojedinele bielu tabuľu a digitálnu tabuľu len na výzvu učiteľa., postupne si osvojili techniku práce s digitálnou tabuľou
- vyučovanie didaktiky matematiky je mimoriadne náročné na učebné pomôcky, akokoľvek sú elektronické materiály a digitálne technológie všestranné, v súčasnosti je nutné používať aj tradičné materiály aj pomôcky (počítadlá, papier, drevené či plastové trojrozmerné pomôcky, drobné bežne dostupné predmety denného života, klasická tabuľa, rysovacie potreby, tlačené texty.

Môžeme konštatovať, že počas absolvovania kurzu s elektronickou učebnicou a sprievodnými technológiami sa očividne zdokonaľovali digitálne zručnosti študentov.

5. Tradičné materiály alebo moderné technológie

Úroveň technického rozvoja umožňuje používať stále komplexnejšie a efektívnejšie metódy vyučovania. Menia sa aj nároky učiacich sa na vyučovacie materiály a ich návyky pri získavaní nových poznatkov. Na tieto nové výzvy zareagovali aj školy a vznikajú čoraz všestrannejšie vyučovacie materiály na báze digitálnych technológií. Musíme si uvedomiť, že ešte existujú generácie, ktoré majú vytvorené návyky učenia sa a tie len ťažko menia. Podľa našich skúseností ale aj podľa iných zdrojov (1) vieme, že študenti učiteľstva pre 1. stupeň ZŠ sú schopní a ochotní používať nové technológie na vyhľadávanie a prenos informácií, využívajú didaktický softvér, elektronickú prezentáciu, píšú v textovom editori, ale najradšej študujú z vytlačených študijných materiálov. Uvedomujú si, že voľne dostupné výučbové materiály na internete sú bezplatné na rozdiel od tlačených zdrojov ale vďaka kultúrnemu zázemiu máme zakódovaný mimoriadny vzťah k písomným a na papieri vytlačeným textom. Neodvážime sa odhadnúť či a niekedy nahradia tlačené knihy digitálnymi, no v súčasnosti existujú paralelne a obe majú svoje opodstatnenie.

Literatura

1. HÍC, P., POKORNÝ, M.: *Skúsenosti s e-learningom pri príprave budúcich učiteľov ZŠ*, Acta Universitatis Palackianae Olomucensis, Matematika 2, str. 87-92, UP, Olomouc 2006, ISBN 80-244-1311-6
2. KLENOVČAN, P. 2004. *Príprava budúcich učiteľov 1. stupňa ZŠ s podporou Internetu*. In: Sborník príspevků z konferencie s mezinárodní účastí „Cesty (k) poznávání v matematice primární školy“ konané v dnech 22. – 24. apríla 2004 v Olomouci. Olomouc: Pedagogická fakulta UP, 2004. s. 139 – 141. ISBN 80-244-0818-X.
3. MOKRIŠ, M. 2007. *LMS Moodle – forma interaktívnej elektronickej učebnice*. In: Matematika V: Elektronické médiá vo vyučovaní matematiky. - 1. vyd. - Bratislava: Univerzita Komenského, 2007. 68- 75 s. - (Acta Facultatis Paedagogicae Universitas Comeniana) ISBN 978-80-223-2367-3
4. PŠENÁKOVÁ, I.: *Niektoré zásady správnej tvorby elektronických materiálov určených pre e- learning*. In: Matematika V: Elektronické médiá vo vyučovaní matematiky. - 1. vyd. - Bratislava: Univerzita Komenského, 2007. 99- 106 s. - (Acta Facultatis Paedagogicae Universitas Comeniana) ISBN 978-80-223-2367-3
5. www.delmat.fdu.uniba.sk

Kontaktní adresa

doc. RNDr. Edita Partová CSc.
Univerzita Komenského v Bratislave, Pedagogická fakulta
Račianska 59, 81 334 Bratislava
Telefon: +421 2 50 222 319
E-mail: partova@fedu.uniba.sk

ZOBRAZOVÁNÍ PROSTOROVÝCH ÚTVARŮ V PRIMÁRNÍ ŠKOLE

Jaroslav PERNÝ

Abstrakt

Příspěvek se zabývá zobrazováním prostorových útvarů do roviny žáky primární školy. Podrobněji zkoumá pohled matematický, ale snaží se jej porovnat s pohledem výtvarným, to vše s ohledem na rozvoj prostorové představivosti. Pomocí experimentu zjišťuje, jak zobrazují prostor děti, které ještě neznají zobrazovací techniky.

IMAGING OF SPATIAL FORMATIONS AT PRIMARY SCHOOL

Abstract

The contribution deals with projection of space objects to plane by primary school pupils. It explores in detail the mathematical approach and attempts to compare it with art approach, both with respect of space imagination development. It experimentally explores the way in which space is projected by pupils without projection methods knowledge.

1. Úvod

K rozvoji prostorové představivosti dochází v každém věku. Jednou z náročnějších činností pro žáky, kde se uplatňuje, je zobrazování prostorových objektů do roviny, což se provádí pomocí různých zobrazovacích metod, které se vyučují na druhém stupni ZŠ a na střední škole. Protože se i žáci primární školy pohybují v trojrozměrném prostoru, zajímalo nás, jak prostorové objekty zobrazují a kterým ze zobrazovacích metod je jejich vidění blízké.

2. Experimentální část

V tomto příspěvku informuji o předexperimentu, který zjišťoval, jak zobrazují prostorové objekty žáci mladšího školního věku (3. až 5. ročníku), kteří se ještě neseznámili se zobrazovacími technikami. Předpokládali jsme, že se pokusí o nějaké vlastní vyjádření zobrazení prostoru, případně, že využijí poznatků z výtvarné výchovy, kde se žáci zobrazováním prostoru zabývají od nejnižších tříd. Proto byly experimenty provedeny v matematice a s určitým časovým odstupem i ve výtvarné výchově.

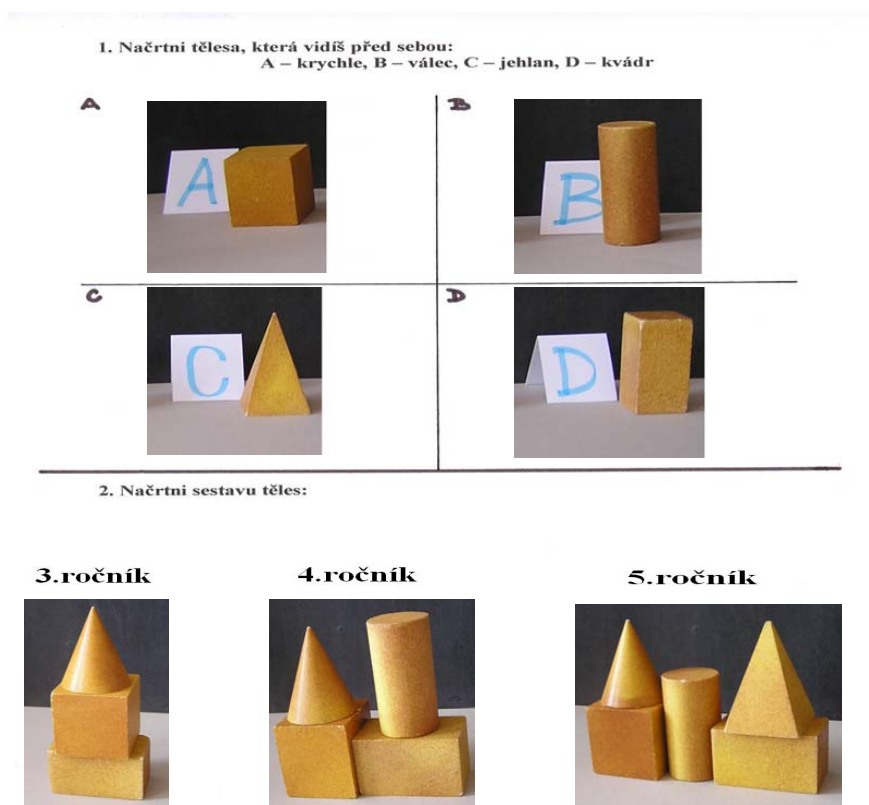
V matematice byly žákům předloženy dva úkoly. Jednak zobrazit jedno těleso a pak zobrazit sestavu těles (viz obr.1). Ve výtvarné výchově byl předložen žákům jeden úkol, zobrazit sestavu těles (viz obr.2). Jako předloha byly použity modely, ne obrázky.

Následně bylo zjišťováno, zda se tito mladší žáci pokoušejí nějak znázornit prostorovost objektu nebo zůstávají u plošného vidění, zda to plošné je spíše ze předu či shora a zda se způsoby zobrazování v matematice a výtvarné výchově nějak liší.

Zaměřili jsme se rovněž na sledování rozdílů mezi pohlavími a mezi staršími a mladšími žáky.

Zajímalo nás, jakému typu zobrazování se výtvary budou nejvíce blížit. Očekávali jsme jednak různé typy volného rovnoběžného promítání, lineární perspektivy, jednoho z průmětů pravoúhlého promítání, pohledu shora či zepředu, případně nějaké vlastní způsoby zobrazení.

Obr. 1: Soubor úloh z matematiky



Obr. 2: Zadání výtvarného tématu

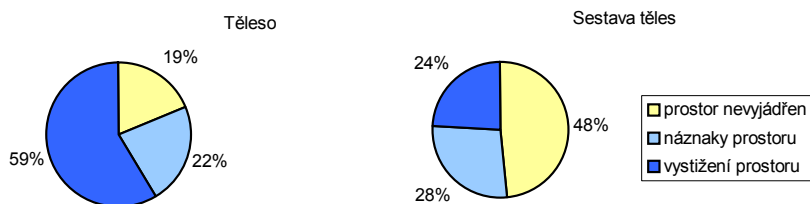
HRADNÍ BRÁNA (Zachovej tvar, barvy vyber podle vlastní fantazie.)



3. Některá zjištění

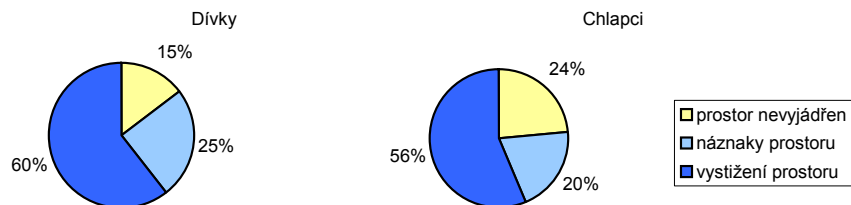
Všechna řešení označená jako prostor nevyjádřen byla nakreslena jako pohled zepředu. Náznaky prostoru se nejvíce objevovaly v tělesech s kruhovou podstavou. U krychle a kvádrů žáci naznačovali jen boční stěnu. Pro vystižení prostoru použili všichni, s menšími či většími nedostatky, pravidla volného rovnoběžného promítání. Rozdíl byl jen ve volbě pohledů a nadhledů.

Graf 1: Porovnání zobrazení tělesa a sestavy těles v %

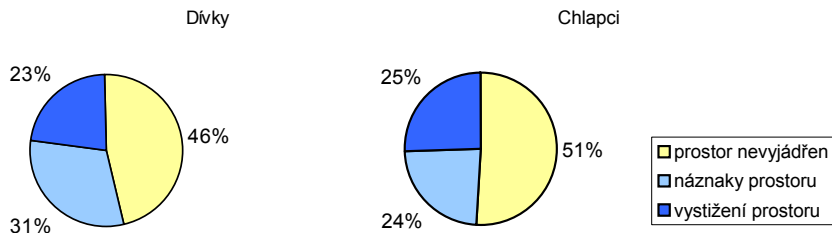


Komentář: Graf 1 ukazuje, že pohledu zepředu u tělesa využila jen necelá čtvrtina (19%) žáků. U sestavy těles použila tuto metodu skoro polovina (48%) žáků. Vystihnout prostor jednotlivého tělesa dokáže více jak polovina (59%) žáků. Náznaky prostoru jsou v obou případech srovnatelné.

Graf 2: Zobrazení tělesa v závislosti na pohlaví v %

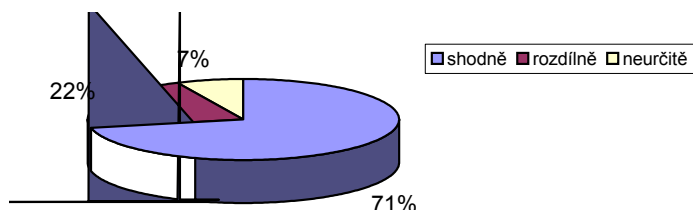


Graf 3: Zobrazení sestavy těles v závislosti na pohlaví v %



Komentář: Z grafů 2 a 3 vyplývá, že prostor vyjádří nebo naznačí častěji dívky (83% a 56%) než chlapci (81% a 44%). Ti předčili dívky jen ve vystižení prostoru u sestavy těles.

Graf 4: Porovnání vyjádření prostoru v Matematice a ve Výtvarné výchově v %



Komentář: Pojem „shodně“ zde zahrnuje všechny dvojice prací, při kterých byla použita stejná metoda zobrazení. To znamená, pokud žáci v M i ve VV použili pohled zepředu, nebo prostor jen naznačili, nebo jej poměrně vystihli. Z grafu 4 vyplývá, že skoro tři čtvrtiny (71%) žáků zobrazily prostor stejným způsobem v M i ve VV. Jen necelá čtvrtina (22%) využila rozdílné způsoby. V M tito žáci více používali volné rovnoběžné promítání, ve VV prostor nevyjádřili. Za zmínku stojí také poznatek, že rozdílnost vyjádření prostoru roste s věkem žáků.

4. Závěr

Z průzkumu vyplývá, že zobrazit prostorové útvary do roviny není pro starší žáky primární školy jednoduché (viz Přílohy). Lépe se jim dařilo při zobrazování jednotlivých těles. Při zobrazování skupiny těles se značná část žáků vrátila k pohledu zepředu, pohled shora nevyužil žádný žák.

Předpoklad, že zobrazení prostorových útvarů půjde lépe chlapcům, nebyl potvrzen. Žáci na 1. stupni mají zobrazování prostoru jenom „okoukané“. To zřejmě vedlo k tomu, že preciznost, která je pro dívky v tomto věku typická, jim pomohla k lepším výsledkům. Zajímavé je, že bez ohledu na pohlaví naznačovali někteří žáci prostor jen u těles s kruhovou podstavou. Rozdíl v zachycení prostoru u tělesa a skupiny těles se potvrdil. Tento výsledek může být ovlivněn obrázky v učebnicích, kde je obrázků se skupinou těles minimum.

Vyvrácení předpokladu, že zobrazení prostorových útvarů je v M jiné než ve VV, bylo překvapující (viz Přílohy). Fakt, že ve výtvarné výchově se žáci učí zachytit prostor od 1. ročníku, rozdílnost použitých metod neovlivnil. Je možné, že si žáci zkušenosti z výtvarné výchovy přenesli do matematiky.

Literatura

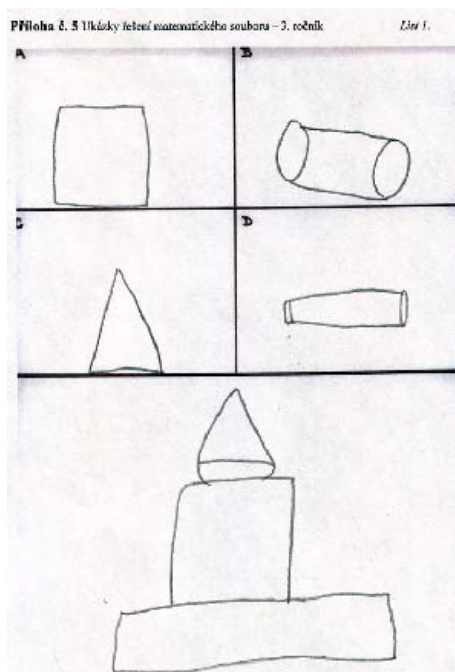
1. DOLEŽALOVÁ, L.: *Zobrazování prostorových útvarů v primární škole*. DP, TU v Liberci, 2007.
2. PERNÝ, J.: *Tvořivost k rozvoji prostorové představivosti*. TU v Liberci, 2004.

Kontaktní adresa

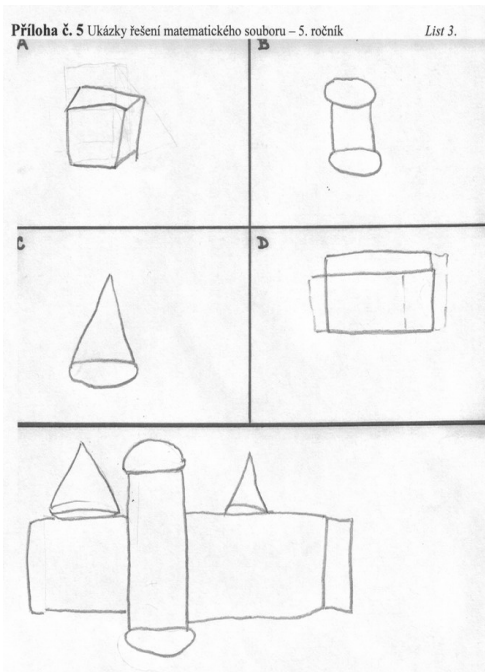
Doc. PaedDr. Jaroslav Perný, Ph.D.
KMD, FP, TU v Liberci, Studentská 2, 461 17
Telefon: +420 485 352 285
E-mail: jaroslav.perny@tul.cz

PŘÍLOHY

Ukázka zobrazení MA 3.r.



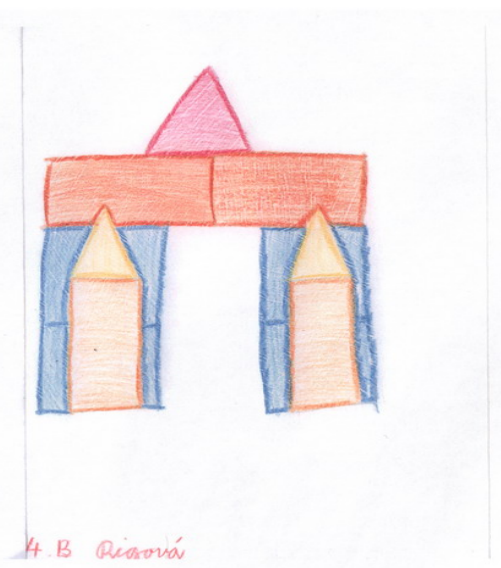
Ukázka zobrazení MA 5.r.



Ukázka zobrazení VV 4.r.



Ukázka zobrazení VV 4.r.



GRAF A DIGRAF V MATEMATICE PRO KAŽDÉHO

Adam PŁOCKI

Abstrakt

Příspěvek se zaměřuje na roli grafu jako geometrického prostředku matematizace a argumentace ve školní matematice.

GRAPH AND DIGRAPH IN MATHEMATICS FOR EVERYONE

Abstract

The work concerns the role of graphs as geometrical tools of mathematization and argumentation in school mathematics.

Úvod

Předmětem práce jsou grafy jako ikonické formy prezentace a přepočítávání prvků jistých množin. Jde o pojmy a věty kombinatoriky jako prostředky organizace fází matematizace a výpočtů. V [3] jsou představeny zajímavé příklady jak na školských hodinách geometrie a aritmetiky činit myšlenku viditelnou. Práce je propozicí adaptace upomenutých didaktických idejí na hodiny kombinatoriky a počtu pravděpodobnosti.

1. Graf jako matematický pojem a jeho ikonická prezentace

1.1. Neorientovaný graf

Nechť W je libovolná konečná množina a K^* množina všech jedno a dvouprvkových podmnožin množiny W . Dvojici $[W, K]$, kde K je neprázdňá podmnožina množiny K^* nazýváme *neorientovaným grafem* anebo krátce *grafem*. Prvkům množiny W říkáme *uzly* a prvkům množiny K říkáme *hrany*.

Jestliže $w \in W$ a $\{w\} \in K$, tak hranu $\{w\}$ nazýváme *petlice*. Jestliže $K = K^*$, pak dvojici $[W, K]$ nazýváme *plným grafem*. Pokud K je množina všech dvouprvkových podmnožin množiny W , tak dvojici $[W, K]$ nazýváme *plným grafem bez petlic*.

Nechť $[W, K]$ je grafem a $W = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_s\}$. Uzly grafu (W, K) prezentujeme jako body roviny. Pokud $\{w_j, w_k\} \in K$, tak uzly w_j a w_k spojujeme úsečkou nebo křivkou. Tato úsečka je tedy ikonickou prezentací hrany grafu. Prezentací hrany $\{w_j\}$ je tedy petlice.



Obr. 1 Ikonická prezentace grafu $[W, K]$

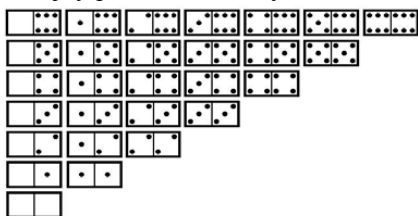
Na obr. 1 máme ikonickou a tedy geometrickou prezentaci grafu $[W, K]$, kde $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ a $K = \{\{w_1, w_2\}, \{w_1, w_3\}, \{w_2, w_3\}, \{w_4, w_3\}, \{w_4\}\}$.

1.2. Počet hran plného grafu bez petlic

Předpokládejme, že $[W, K]$ je grafem, který má s uzlů, který je plný a bez petlic. Ptáme se, kolik hran má tento graf. Uzlů je s a z každého vychází $(s-1)$ hran, které nejsou petlicemi, tedy součin $s(s-1)$ by byl počtem všech hran, jenže každá byla spočítána dvakrát. Počet těchto hran je tedy podílem $\frac{s(s-1)}{2}$.

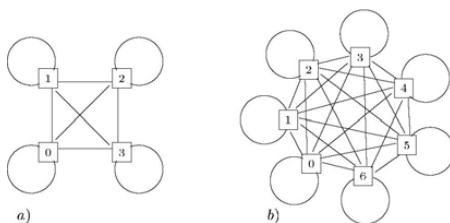
2. Graf jako ikonická prezentace souboru dominových kamenů

Rekvizitou ve hře *DOMINO* je soubor 28 kamenů (obr. 2). Tento soubor je současně zajímavým losovacím nástrojem (viz [5]). Kámen, na kterém je na obou jeho polích stejný počet teček, nazýváme *dubletem*.



Obr. 2 Kameny z domina

Na kamenech klasického domina jsou počty teček od 0 do 6. Je to tzv. *šestkové domino*. Interpretujeme počty teček na polích kamene jako uzly grafu. Takový graf má tedy 7 uzlů. Každá úsečka nebo křivka, spojující dva uzly, představuje v této interpretaci kámen, který má na svých polovinách počty teček prezentované těmito uzly. Petlice představuje dublet. Ikonickou prezentací šestkového domina je tedy plný graf $[W, K]$, kde $W = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Uzly představují možné počty teček, hrany spojující tyto uzly představují kameny domina. V této ikonické formě je představené šestkové domino na obr. 3.



Obr. 3 Kameny trojkového a šestkového domina jako hrany neorientovaného grafu

Kamenů šestkového domina je tedy tolik, kolik hran má plný graf se sedmi uzly. Počet kamenů tohoto domina je tedy součinem čísel $\frac{7 \cdot 6}{2}$ (je to současně počet úseček spojujících vrcholy konvexního sedmiúhelníka) a 7 (počet petlic). Šestkové domino má tedy $21 + 7$, tedy 28 kamenů.

Domino, na jehož kamenech jsou počty teček od 0 do m nazýváme *m-kovým dominem*. Ikonickou prezentací kamenů tohoto domina jsou hrany plného grafu $[W, K]$, kde $W = \{0, 1, 2, \dots, m\}$. Soubor kamenů je tedy shodný s množinou K . V grafu $[W, K]$

je $(m+1)$ petlic a $\frac{(m+1) \cdot m}{2}$ ostatních hran (jsou to úsečky spojující vrcholy $(m+1)$ úhelníka).

3. Digraf jako matematický pojem a jeho ikonická prezentace

3.1. Orientovaný graf tedy digraf

Nechť W je libovolnou konečnou a neprázdnou množinou a $K_z^* = W \times W$. Necht' $K_z \subset K_z^*$ a $K_z \neq \emptyset$. Dvojici $[W, K_z]$ nazýváme *orientovaným grafem* nebo *digrafem*. Prvkům množiny W se říká *uzly digrafu*. Pokud $w_j \in W$ a $w_k \in W$ a $(w_j, w_k) \in K_z$, pak dvojici (w_j, w_k) , nazýváme *hrana digrafu* a označujeme $w_j \rightarrow w_k$. Jestliže $(w_j, w_j) \in K_z$, pak hranu $w_j \rightarrow w_j$ nazýváme *petlice*. Pokud $K_z = K_z^*$, pak dvojici $[W, K_z]$ nazýváme *plný digraf*. Pokud $K_z = \{(w_j, w_k) \in K_z^* : w_j \neq w_k\}$, pak $[W, K_z]$ nazýváme *plným digrafem bez petlic*.

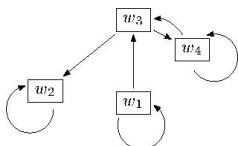
Uzly digrafu prezentujeme jako body roviny. Pokud $(w_j, w_k) \in K_z$, pak spojíme uzel w_j s uzlem w_k orientovanou úsečkou nebo křivkou. Říkáme, že w_j je *počáteční uzel* a w_k *koncový uzel* hrany. Tato orientovaná úsečka je tedy ikonickou prezentací hrany digrafu.

Digrafy se tedy znázorňují obrázkem, v němž uzlům odpovídají body v rovině a hrany jsou spojnice příslušných bodů. Na tomto obrázku se hrana opatřuje šipkou směřující od počátečního ke koncovému uzlu. Mluvíme o *ikonické prezentaci digrafu*.

Nechť $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ a

$K_z = \{(w_1, w_1), (w_1, w_3), (w_4, w_3), (w_3, w_4), (w_4, w_4), (w_3, w_2), (w_2, w_2)\}$.

Dvojice $[W, K_z]$ je digrafem. Jeho ikonickou prezentaci máme na obr. 4.



Obr. 4 Ikonická prezentace digrafu $[W, K_z]$

	w_1	w_2	w_3	w_4
w_1	X		X	
w_2		X		
w_3		X		X
w_4			X	X

Obr. 5 Tabulka jako prezentace digrafu $[W, K_z]$

Jinou formou prezentace digrafu $[W, K_z]$ je tabulka na obr. 5 (viz [6], s. 34), anebo matice

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

přičemž průniku j -tého řádku a j -tého sloupce matice Q odpovídá uzel w_j .

Pokud $[W, K]$ je digrafem a $W = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_s\}$, pak algebraickou prezentací tohoto digrafu je matice $Q = [a_{jk}]$ typu s , kde

$$a_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{pro } (w_j, w_k) \in K \\ 0, & \text{pro ostatní } j, k \in \{0, 1, 2, \dots, s\}, \end{cases}$$

Tyto různé formy prezentace grafu a digrafu jsou obsahem zvláštních matematických úloh. Jde o překlad jistých informací z jedné formy na jinou. V [2] je toto kódování a dekódování informací zařazeno k důležitým matematickým aktivitám.

Všimněme si, že pokud dvojice $[W, K]$ je digrafem, tak množinu K_z můžeme interpretovat jako relaci R v množině W (viz [6], s. 31 – 35).

3.2. Počet hran jistých digrafů

Nechť W je s -prvkovou množinou a dvojice $[W, K_z]$ je plným digrafem ($K_z = W \times W$). Tento digraf má tedy s uzlů a každý je začátkem s hran, a tedy všech hran tohoto grafu je $s \cdot s$, tj. s^2 .

Nechť W je s -prvkovou množinou a dvojice $[W, K_z]$ je plným digrafem bez petlic. Tento digraf má s uzlů a každý je začátkem $(s-1)$ hran, a tedy počet všech hran je součinem $s \cdot (s-1)$.

4. Graf a digraf jako prostředek prezentace a přepočítávání množiny výsledků náhodného pokusu

4.1. Náhodný pokus a jeho stochastický model

Diskrétním náhodným pokusem nazýváme každý experiment δ (reálný nebo myšlenkový, viz [1], s. 16–17 a [7], s. 13), o jehož průběhu a výsledku rozhoduje výhradně náhoda a přitom:

- množina výsledků tohoto pokusu je konečná nebo spočetná a
- pro každý výsledek je možno určit *a priori* pravděpodobnost toho, že pokus skončí tímto výsledkem.

Jestliže Ω je množina všech výsledků diskrétního náhodného pokusu δ a funkce p přiřazuje ke každému výsledku pravděpodobnost, s níž může pokus δ skončit tímto výsledkem, pak dvojici (Ω, p) nazýváme *stochastickým modelem pokusu* δ . Funkce p je nezáporná a splňuje podmínku $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$.

Model náhodného pokusu δ , tedy dvojice (Ω, p) je už matematický pojem. Tato dvojice je pravděpodobnostním prostorem (viz [7], s. 8).

Urnu, ve které je b bílých koulí a c černých označme U_{b*c} . Urnu, ve které je s koulí očíslovaných od 1 do s označme $U_{1 \rightarrow s}$.



Obr. 6 Tři urny

4.2. Graf a stochastické modely jistých náhodných pokusů

Nechť $s \in \mathbb{N}_2$. Rozvažme tři náhodné pokusy:

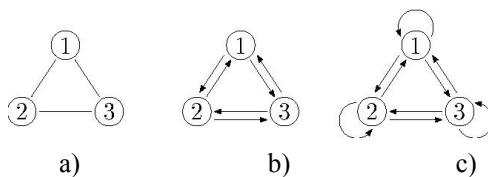
- δ_1^s současné losování dvou koulí z urny $U_{1 \rightarrow s}$,
- δ_2^s dvojnásobné losování bez vracení koulí z urny $U_{1 \rightarrow s}$,
- δ_3^s dvojnásobné losování s vracením koulí z urny $U_{1 \rightarrow s}$.

Konstrukce stochastického modelu každého z těchto náhodných pokusů je zvláštní úlohou, která se týká fáze matematizace (viz [7], s. 107).

Výsledek losování koulí z urny $U_{1 \rightarrow s}$ kódujme číslem na vylosované kouli. Výsledek dvojnásobného losování (s vrácením nebo bez) kódujme posloupností výsledků postupných etap.

Nechť $s = 3$ a $W = \{1, 2, 3\}$. Rozmístíme (v mysli) koule z urny $U_{1 \rightarrow 3}$ ve vrcholech trojúhelníka. Číslo na kouli z urny interpretujeme tedy jako uzel grafu.

Výsledek losování δ_1^3 je dvouprvkovou podmnožinou množiny $W = \{1, 2, 3\}$ (její prvky jsou čísla na vylosovaných koulích). Tento výsledek můžeme ztotožňovat s úsečkou, která spojuje dvě vylosované koule, a tedy s hranou grafu (obr. 7a). Každá hrana grafu $[W, K]$ plného bez petlic, se tedy stává ikonickou prezentací dvouprvkové kombinace množiny W . Jsou tři výsledky pokusu δ_1^3 a každý je stejně pravděpodobný.



Obr. 7 Hrany grafu jako výsledky náhodných pokusů δ_j^3 pro $j = 1, 2, 3$

Výsledek losování δ_2^3 je dvoučlennou variací bez opakování množiny W , kterou můžeme zobrazit jako orientovanou hranu spojující kouli vylosovanou poprvé s koulí vylosovanou podruhé. Množina výsledků pokusu δ_2^3 se stává v této ikonické představě množinou hran plného digrafu $[W, K_2]$ bez petlic (viz obr. 7b). Náhodný pokus δ_2^3 má tedy 3.2, tedy 6 stejně pravděpodobných výsledků.

Výsledek losování δ_3^3 je také dvoučlennou posloupností, ale její členy se mohou opakovat. Výsledek je tedy dvoučlennou variací množiny $\{1, 2, 3\}$. Ikonickou představou této variace je orientovaná hrana spojující vylosované koule. Množina Ω_3^3 výsledků losování δ_3^3 je představena na obr. 7c jako množina hran plného digrafu se třemi uzly. Je tedy 3^2 , tj. 9 výsledků losování δ_3^3 .

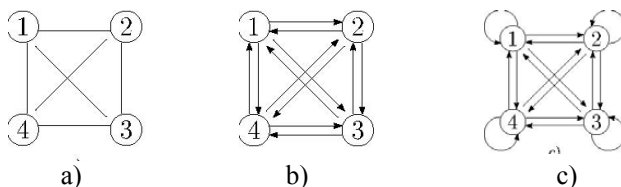
Prezentace každého ze vzniklých grafů jako objektů, o kterých se hovoří v definici grafu nebo digrafu, je obsahem matematické úlohy.

Uvažujme $s = 4$ a rozmístíme koule z urny $U_{1 \rightarrow 4}$ ve vrcholech čtyřúhelníka. Čísla na koulích uvažujeme jako vrcholy grafu.

Každý výsledek pokusu δ_1^4 je dvouprvkovou kombinací množiny $W = \{1, 2, 3, 4\}$, kterou lze ztotožňovat s hranou grafu $[W, K]$ plného bez petlic, kde $W = \{1, 2, 3, 4\}$. Takový graf má 6 hran (viz obr. 8a). Je tedy 6 dvouprvkových kombinací množiny $\{1, 2, 3, 4\}$ a každá je stejně pravděpodobným výsledkem současného losování dvou koulí z urny $U_{1 \rightarrow 4}$.

Každá hrana digrafu plného bez petlic na obr. 8b reprezentuje výsledek dvojnásobného losování bez vrácení koulí z urny $U_{1 \rightarrow 4}$. Těchto hran je 4.3. Je tedy 12 stejně pravděpodobných výsledků pokusu δ_2^4 .

Ikonickou prezentací každého výsledku pokusu δ_3^s je hrana plného digrafu $[W, K_z]$, kde $W = \{1, 2, 3, 4\}$ (viz obr. 8c). Petlice reprezentují ty výsledky, ve kterých poprvé a podruhé bude vylosována stejná koule. Počet hran plného digrafu je součinem 4.4. Je tedy 16 stejně pravděpodobných výsledků pokusu δ_3^4 .



Obr. 8 Hrany grafu jako výsledky náhodných δ_j^4 pokusů pro $j = 1, 2, 3$.

5. Zobecnění odkrytých faktů

Nechť $W = \{1, 2, 3, \dots, s\}$. Výsledek náhodného pokusu δ_1^s je dvouprvkovou kombinací množiny W . Prezentací této kombinace je hrana grafu $[W, K]$, který má s uzlů. Výsledků losování δ_1^s je tedy tolik, kolik je hran grafu $[W, K]$ plného bez petlic a tedy $\frac{s(s-1)}{2}$. Je to současně počet dvouprvkových kombinací s -prvkové množiny.

Symbolem $\binom{n}{k}$ se označuje v kombinatorice počet k -prvkových kombinací

n -prvkové množiny. Odkryli jsme tedy pravidlo $\binom{s}{2} = \frac{s(s-1)}{2}$.

Výsledek pokusu δ_2^s je dvoučlennou variací bez opakování množiny W . Ikonickou prezentací takové variace je hrana plného digrafu $[W, K_z]$ bez petlic. Takových hran je $s.(s-1)$. Výsledků losování δ_2^s je $s.(s-1)$ a každý je stejně pravděpodobný.

Výsledek pokusu δ_3^s je dvoučlennou variací množiny W . Tuto variaci můžeme ztotožňovat s hranou plného digrafu s s uzly. Všech hran je $s.s$, tedy s^2 . Spočítávání dvoučlenných variací s -prvkové množiny W jsme převedli do spočítávání hran plného digrafu který má s uzlů.

6. Interpretace odkrytých faktů – fáze interpretace

Všimněme si, že:

- 1) současné losování dvou koulí z urny $U_{1 \rightarrow s}$ je náhodným pokusem, který má $\frac{s(s-1)}{2}$ stejně pravděpodobných výsledků,
- 2) dvojnásobné losování bez vracení koulí z urny $U_{1 \rightarrow s}$ je náhodným pokusem, který má $s.(s-1)$ stejně pravděpodobných výsledků,
- 3) dvojnásobné losování s vracením koulí z urny $U_{1 \rightarrow s}$ je pokusem, který má s^2 stejně pravděpodobných výsledků.

Pomocí urny $U_{1 \rightarrow s}$ je možné losovat výběr z populace Q , která má n prvků a $n = s$, buď $n = \frac{s(s-1)}{2}$, nebo $n = s(s-1)$, nebo $n = s^2$ prvků.

Hod kostkou je náhodným pokusem, který má 6 stejně pravděpodobných výsledků. Z odhalených faktů vyplývá, že pokusem o 6 stejně pravděpodobných výsledcích je také:

- dvojnásobné losování bez vracení koulí z urny $U_{1 \rightarrow 3}$ (pokus δ_2^3)
- současné losování dvou koulí z urny $U_{1 \rightarrow 4}$ (náhodný pokus δ_1^4).

Z těchto faktů vyplývá, že v situaci, kdy se ztratila hrací kostka, tak je možné ji nahradit:

- urnou $U_{1 \rightarrow 3}$ nebo urnou s třemi koulemi (bílou, červenou a zelenou),
- urnou $U_{1 \rightarrow 4}$ nebo urnou se čtyřmi různobarevnými koulemi nebo
- čtyřmi esy z balíčku karet.

Dvojnásobné losování bez vracení koulí z urny $U_{1 \rightarrow 4}$ je pokusem δ_2^4 , který má 12 stejně pravděpodobných výsledků (viz obr. 8). Pomocí urny $U_{1 \rightarrow 4}$ lze simulovat znamení zvěrokruhu náhodně potkaného člověka. Tyto úsudky jsou fází interpretace upomenutých faktů.

Fází interpretace je také řešení následujících úloh z kombinatoriky:

1. Na schůzku přišlo s osob. Každá se přivítala s každou. Kolik bylo podání rukou?
 - 4) Každý z s států má v každém ze zbývajících států svého velvyslance. Kolik je celkem velvyslanců?
 - 5) Sportovního utkání se účastní s družstev. Každé družstvo se musí utkat s každým družstvem právě jednou. Kolik bude zápasů?
 - 6) Každý z s podniků, spolupracujících mezi sebou, posílá na Nový rok poštovní cestou novoroční přání. Poštovní známka na dopis stojí 20 korun. Kolik peněz získá Česká pošta na této korespondenci?
 - 7) Na kruhu je zvoleno s bodů. Kolik přímek určují tyto body?
 - 8) Kolik je úseček spojujících vrcholy s -úhelníka?
 - 9) Před příchodem elektronické techniky do obsluhy jízdenkových pokladen byly na nádraží prodávány hotové jízdenky na cestu z jedné stanice do jiné. V České republice je s železničních stanic. Kolik různých jízdenek musela před lety vytisknout železniční tiskárna?
 - 10) V Evropské unii je s oficiálně používaných jazyků. Z každého jazyka na každý jsou překládány úřední zprávy. Kolik slovníků je třeba vytisknout, aby to bylo možné?

Řešení každé z těchto úloh lze převést do vypočítávání počtu hran grafu nebo digrafu, který má s uzlů.

Soubor s osob (množinu s družstev, množinu s bodů na kruhu, množinu s vrcholů mnohoúhelníka) interpretujeme jako množinu uzlů grafu. Podání rukou dvou lidí (sportovní utkání dvou družstev, přímka určená pomocí dvou bodů na kruhu, úsečka spojující dva vrcholy mnohoúhelníka) jsou v této interpretaci hranou grafu, který má s uzlů, plného a bez petlic.

Počet podání rukou (počet sportovních utkání, počet přímek, počet úseček) je tedy číslem $\frac{s(s-1)}{2}$.

Množinu států (množinu kooperujících firem, množinu železničních stanic) interpretujeme jako množinu uzlů digrafu. Velvyslanec státu x ve státě y (dopis s novoročním přáním, který posílá firma x na adresu firmy y a také jízdenka ze stanice x do stanice y) je v této interpretaci hranou se začátkem v uzlu x a koncem v uzlu y . Všech

velvyslanců, všech druhů jízdenek a také všech dopisů je tolik, kolik hran má digraf o s uzlech, digraf plný a bez petlic. Je tedy $s(s-1)$ velvyslanců, $s(s-1)$ dopisů a $s(s-1)$ druhů jízdenek.

Literatura

1. W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, John Wiley & Sons, Inc, New York, London Sydney 1966.
2. Z. Krygowska, *Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczącą rolę w matematyce dla wszystkich*, Dydaktyka Matematyki 6 (1986).
3. F. Kuřina, *Jak učinit myšlenku viditelnou*, Vyučování matematice a kultivace myšlení, Hradec Králové 6/1997 (s. 61 – 76).
4. O. Ore, *Wstęp do teorii grafów*, PWN, Warszawa 1996.
5. A. Płocki, *Domino jako losovací nástroj a nositel matematických idejí a struktur*, Disputationes Scienticae Universitatis Catholicae in Ružomberok, Ružomberok 1-2002 (s. 59-69).
6. A. Płocki, *Matematyka ogólna I – elementy logiki, teorii mnogości, analizy matematycznej i stochastyki*, PWSZ, Nowy Sącz 2004.
7. A. Płocki, *Dydaktyka stochastyki*, Wydawnictwo Naukowe NOVUM, Płock 2005.
8. A. Płocki, *Pravdepodobnosť okolo nás. Stochastika v úlohách a problémoch*, Katolícká Univerzita v Ružomberku, Ružomberok 2008.
9. R. Wilson, *Wprowadzenie do teorii grafów*, PWN, Warszawa 1985.

Kontaktní adresa

Prof. dr hab. Adam Płocki
Instytut Matematyki, Akademia Pedagogiczna
Ul. Podchorążych 2, 30-084 Kraków
E-mail: adplocki@ap.krakow.pl

DETERMINANTY DYNAMICKÉHO TESTOVANIA MATEMATICKÝCH SCHOPNOSTÍ DETÍ ZO SOCIÁLNE ZNEVÝHODNENÉHO PROSTREDIA

Alena PRÍDAVKOVÁ, Blanka TOMKOVÁ

Abstrakt

Jedna z foriem dynamického testovania učebných schopností využíva úlohy, ktorých súčasťou je edukačná inštrukčná časť v podobe tzv. odstupňovanej pomoci. Testovanie je súčasne procesom učenia sa.

V rámci projektu APVV *Dynamické testovanie latentných učebných kapacít detí zo sociálne znevýhodneného prostredia*, sú kreované testovacie nástroje na meranie úrovne kognitívnych schopností detí v oblasti matematických predstáv.

DETERMINANTS OF DYNAMIC TESTING OF MATHEMATICAL ABILITIES OF CHILDREN FROM SOCIALLY DISADVANTAGED ENVIRONMENT

Abstract

One of the forms of dynamic testing of learning abilities utilises tasks with instructional mediation in the form of graded hints. Testing thus incorporates learning.

In the framework of APVV project *Dynamic testing of latent learning capacities of children from socially disadvantaged environment* testing tools have been created to measure the children's level of cognitive abilities in the domain of early mathematical concepts.

Úvod do problematiky dynamického testovania

Schopnosť detí učiť sa je otázkou, ktorá zaujíma nielen rodičov (laickú verejnosť), ale aj pedagógov a psychológov. Na danú problematiku existuje viacero pohľadov.

Najbežnejším spôsobom merania takejto schopnosti je použitie intelligenčných testov. Je to pozoruhodné, ak si uvedomíme, že „*testy inteligencie merajú to, čo osoba vie v danom časovom bode a menej to, čo sa dokáže naučiť.*“ (Ferrarová, Brownová, Campione; 1986, s. 1088, In: Džuka, Kovalčíková, 2008). Inými slovami, intelligenčné testy merajú aktuálny mentálny stav dieťaťa, či jedinca a v skutočnosti nevravia nič o jeho perspektívach.

Reliabilita, ako aj validita štandardných testov inteligencie je potvrdená aj ich viac ako storočnou históriou a vzhľadom na výsledky, získané u majoritnej skupiny, sú tieto testy nespochybniteľné. Výsledok dosiahnutý v teste inteligencie je odrazom pôsobenia schopnosti učiť sa v minulosti a súčasne je prediktorom budúcej schopnosti učiť sa (Guthke, 2003, In: Džuka, Kovalčíková, 2008). Táto skutočnosť neplatí pre niektoré sociálne skupiny, akými sú napríklad deti zo sociálne znevýhodneného prostredia,

pristáholci, minoritné skupiny obyvateľov. Práve u týchto osôb nedosahujú intelligenčné testy svoju tradičnú úroveň validity, či reliability a vhodnejšou alternatívou sa javí dynamické testovanie, kde sa meria schopnosť jedinca učiť sa.

Dynamické testovanie

Myšlienky, ktoré vedú k podstate dynamického testovania možno objaviť už vo Vygotského teórii o zóne najbližšieho vývinu. Prvé postupy, ktoré uplatňovali princípy dynamického testovania sa začali používať v šesťdesiatych rokoch minulého storočia. V tomto období sa ešte nerozlišovalo medzi dynamickým testovaním a dynamickým hodnotením.

V súčasnosti sa na „dynamiku“ testovania možno dívať z niekoľkých pohľadov. Guthke, Becková a Wield (2003, In: Džuka, Kovalčíková, 2008) vidia dynamiku testovania v troch rovinách: dynamika v testovacej procedúre, dynamika pri validizácii merania a dynamika z hľadiska využitia výsledkov testu, pričom v rámci každej rozlišujú niekoľko foriem. Existuje viacero foriem dynamického testovania, ale mnohé z nich sa ešte stále vyvíjajú.

Jedna z foriem dynamického testovania učebných schopností využíva interakciu medzi testujúcim a testovaným, akúsi formu učenia sa priamo v procese testovania, ako aj istú pomoc pri učení sa zo strany testujúceho. Podľa spôsobu realizácie pomoci rozlišujeme dva typy testov: dlhodobý a krátkodobý.

Pri dlhodobom type dynamického testovania je použitý pretest, nasleduje časovo neobmedzená tréningová fáza, po ktorej prichádza postest, ktorý pomôže určiť stupeň zlepšenia testovaného.

V prípade krátkodobého dynamického testovania sa testovanému zadávajú problémové úlohy a priamo v rámci testovania sa respondentovi poskytuje odstupňovaná pomoc – dochádza k fáze učenia. Najdôležitejším ukazovateľom je rozsah nápovedných inštrukcií, ktoré testovaný potreboval na vyriešenie úlohy. Možno tiež hovoriť o citlivosti na pomoc.

Determinanty dynamického testovania matematických schopností

V kontexte s cieľom grantového projektu APVV MŠ SR (Agentúra na podporu výskumu a vývoja) *Dynamické testovanie latentných učebných kapacít detí zo sociálne znevýhodneného prostredia* je realizované krátkodobé dynamické testovanie na populácii detí zo sociálne znevýhodneného prostredia vo veku 6 – 8 rokov. Jedným zo zámerov projektu je vytvorenie originálneho testovacieho nástroja na zisťovanie úrovne latentných učebných kapacít v oblasti matematických schopností.

Proces identifikácie domén, ktoré budú východiskom pre tvorbu položiek testovacieho nástroja, prechádza viacerými etapami. Východiskom pre ich tvorbu bola analýza statických testov kognitívnych schopností a testov školskej pripravenosti. Realizovaná bola javová a atomárna analýza tých položiek, ktoré sú určené na zisťovanie úrovne rozvoja elementárnych matematických predstáv. Cieľom analýzy bola špecifikácia elementov matematiky, ktoré sú súčasťou pripravovaných testových položiek. Ďalšie zdroje, ktoré boli analyzované:

- obsah matematickej prípravy v materských školách (Program výchovy a vzdelávania detí v materských školách),
- učebné plány a učebné osnovy matematiky na 1. stupni základnej školy (vrátane 0. ročníka),
- metodické materiály zaoberajúce sa edukáciou žiakov (v oblasti matematiky) zo sociálne znevýhodneného prostredia.

Charakteristika domén testovacieho nástroja

Na základe atomárnej a javovej analýzy úloh z vyššie uvedených zdrojov (úlohy zamerané na zisťovanie úrovne rozvoja elementárnych matematických predstáv), rešpektujúc kompetencie a životné skúsenosti detí, obsah matematického vzdelávania (v MŠ a na ZŠ) bolo navrhnutých šesť tematických okruhov pre tvorbu úloh z matematiky:

1. Geometrické predstavy - táto oblasť zahŕňa úlohy a činnosti spojené s vytváraním predstáv o základných pojmoch z geometrie – orientácia v priestore a v čase, základné geometrické tvary a útvary.
2. Vytváranie súborov a triedenie - vytváranie súborov objektov na základe danej vlastnosti, triedenie skupiny objektov podľa vopred danej vlastnosti (daných vlastností).
3. Porovnávanie a usporiadanie - porovnávanie počtu dvoch súborov objektov, porovnávanie dvojíc objektov podľa vopred danej vlastnosti, usporadúvanie skupiny objektov na základe vopred danej vlastnosti.
4. Číselné predstavy - určovanie počtu objektov v skupinách – počítaním po jednom, číselné rady (vzostupný a zostupný), vytvorenie skupiny predmetov s daným počtom, poznať zápis čísel, zápis čísel v desiatkovej číselnej sústave, porovnávanie a usporiadanie prirodzených čísel podľa veľkosti.
5. Počtové operácie - určiť počet predmetov v skupine, ak k danej skupine niekoľko predmetov pridám (od danej skupiny predmetov niekoľko predmetov odoberiem).
6. Kombinatorika a postupnosti - postupnosti čísel vytvárané na základe istých pravidiel, propedeutika kombinatoriky.

Úlohy, ktoré budú zaradené do testovacieho nástroja, sú úlohy problémové. Máme pritom na mysli úlohy takého typu, ktoré žiak nie je schopný vyriešiť samostatne. Proces riešenia úlohy má byť súčasne procesom učenia sa. Žiak má pritom pochopiť postup, proces riešenia úloh daného typu, alebo odhaliť pravidlo, na základe ktorého je možné úlohu vyriešiť.

Proces tvorby inštrukčnej časti testových položiek

Proces tvorby inštrukčnej časti vychádzal z rôznych pohľadov a koncepcií a predovšetkým z javovej analýzy procesu riešenia úloh. Na základe analýzy procesu riešenia úloh boli vypracované návrhy inštrukcií k vytvoreným úlohám. Jednotlivé návrhy inštrukcií (ako aj zadanie úloh) boli niekoľkokrát prepracovávané, doplňované, upresňované.

Formulácia inštrukcií – odstupňovanej pomoci - k jednotlivým úlohám vychádzala prioritne z procesu riešenia úlohy a s ohľadom na cieľovú skupinu, pre ktorú boli testové položky kreované. Dynamika úloh je v tom, že ak žiak úlohu nie je schopný riešiť samostatne, tak nastupuje pomoc zo strany administrátora. Hodnotený je proces riešenia úlohy, nielen výsledok úlohy, resp. odpoveď na otázku. Skórovanie bude vychádzať z počtu inštrukcií, ktoré je potrebné použiť na to, aby úlohu žiak samostatne vyriešil. Úroveň dosiahnutej schopnosti učiť sa je overovaná zadáním tzv. transferovej úlohy, ktorá je analogického charakteru ako daná učebná úloha.

Napríklad uvažujme o úlohe, kde je potrebné do radu obrázkov doplniť chýbajúce obrázky. Ide o postupnosť, ktorá je vytvorená na základe istého pravidla. Na lavici sú uložené tri obrázky, pričom na prvom je znázornená skupina šiestich kvetov, na druhom v poradí je skupina piatich kvetov a na treťom štyri kvety. Žiak má doplniť do radu ďalšie dva obrázky, ktoré nasledujú. Má pritom k dispozícii sadu obrázkov, medzi ktorými sú aj také, ktoré sú riešením úlohy. Prvá inštrukcia je vo väčšine prípadov zameraná na koncentráciu pozornosti testovaného. V prípade, že žiak uloží nesprávne

obrázky, nasleduje spätná väzba vo forme „urobil si to nesprávne“. Ďalšie pomoci sa môžu týkať odhalenia pravidla, podľa ktorého je postupnosť obrázkov vytvorená. Je potrebné žiaka upozorniť na to, že si má všimnúť počet kvetov na jednotlivých obrázkoch a ďalej, ako sú obrázky za sebou umiestnené – z pohľadu počtu kvetov na nich. Na základe inštrukcií by žiak mal objaviť pravidlo: počet kvetov na jednotlivých obrázkoch klesá o jeden. V úlohe vystupuje model klesajúceho číselného radu, pričom jednotlivé členy - čísla 6, 5, 4 - sú prezentované pomocou konkrétnych modelov, vo forme skupín objektov s daným počtom.

Ako problematické sa javilo vytvoriť také úlohy, ktoré umožňujú identifikáciu pravidla v rámci jednotlivých inštrukcií, t. j. aby úlohy mali skutočne učebný charakter. Problémy sa vyskytli aj v oblasti týkajúcej sa počtu pomoci. Nie pre každú úlohu bolo možné obmedziť sa na vopred stanovený počet inštrukcií. V mnohých úlohách sa ukazuje, že je potrebný väčší počet inštrukcií vzhľadom na to, že to majú byť úlohy učebného charakteru. V niektorých úlohách je, naopak, problémom vytvoriť stanovený počet inštrukcií. S týmto súvisí aj otázka spôsobu skórovania žiackych odpovedí, ktorá je v štádiu vývoja a špecifikácie.

Záver

Na základe štúdia teoretických východísk k problematike dynamického testovania a v kontexte s cieľmi projektu, boli vytvorené návrhy testových položiek, ktoré budú súčasťou originálneho testovacieho nástroja v oblasti matematických schopností.

Prvé skúsenosti získané z pilotného testovania, ktorého cieľom bolo overiť vhodnosť matematického zamerania navrhnutých úloh, sú prezentované v príspevku Scholtzová, Šimčíková (2008).

Literatura

1. DŽUKA, J., KOVALČÍKOVÁ, I. Dynamické testovanie latentných učebných schopností. (2008, v tlači). *Československá psychologie*.
2. KOVALČÍKOVÁ, I., DŽUKA, J. Dynamic testing and assessment of latent learning capacities. *Annales Paedagogicae Nova Sandes –Presoves I.* str.29-35. Nowy Sacz 2007. ISBN 978-83-60822-27-2.
3. SCHOLTZOVA, I., ŠIMČÍKOVÁ, E. Dynamické testovanie matematických schopností detí zo sociálne znevýhodneného prostredia – pohľad prvý. *V tomto zborníku*.
4. ŠIMČÍKOVÁ, E. Príprava žiakov nultého ročníka základnej školy na ich kontinuálnu matematickú edukáciu. *Inovácia v matematickej príprave žiakov na 1. stupni ZŠ. Zborník príspevkov z vedecko-odbornej konferencie konanej 19.10.2007 v Trnave.* str. 102-108. Trnava 2007. ISBN 978-80-8082-158-6.

Príspevok vznikol s podporou APVV MŠ SR (APVV-0073-06)

Kontaktní adresa

*doc. RNDr. Alena Prídavková, PhD., Mgr. Blanka Tomková, PhD.
Prešovská univerzita, Pedagogická fakulta, Katedra matematickej edukácie
Ul. 17. novembra 1, 081 16 Prešov, Slovensko
Telefon: +421 51 7470542, +421 51 7470543
E-mail: pridav@unipo.sk, tomkova@unipo.sk*

HLAVOLAMY A PROSTOROVÁ PŘEDSTAVIVOST

Jana PŘÍHONSKÁ

Abstrakt

Příspěvek se zamýšlí nad možností využití hlavolamů ve výuce matematiky zejména pak pro rozvíjení prostorové představivosti. Pozornost je věnována především hlavolamům, které existují ve své hmatatelné (mechanické) podobě.

BRAIN-TEASERS AND SPACE IMAGINATION

Abstract

The contribution focuses on possibility of usage brain-teasers in teaching mathematics especially then for build-up space imagination. Attention is devoted to the brain-teasers above all, which exist in his tangible (mechanical) form.

1. Úvod

Matematickým hříčkám, hlavolamům a neobvyklým úlohám je v celé řadě učebnic matematiky věnována poměrně velká pozornost. Objevuje se i značné množství publikací, které se věnují neobvyklým úlohám. Není to náhoda, ale důsledek nové éry počítačové techniky, kosmických letů, atomové fyziky a s tím souvisejícím tvořivým způsobem myšlení. Výraznou roli v tomto směru zaujímá prostorová představivost, kterou je nutno rozvíjet od útlého věku. V příspěvku se zaměříme na hlavolamy, které existují ve své hmatatelné (mechanické) podobě, a které mohou významnou měrou k rozvoji prostorové představivosti přispět.

Mechanické hlavolamy bývají nejrůznějšího provedení: může to být jen několik útržků kartónu nebo naopak nějaký složitý výrobek ze dřeva nebo kovu, jehož provedení přesahuje možnosti domácí dílny. Nejčastěji se jedná o skládání nějakého tělesa (kříž, pyramida, hvězda), vyvážení obrazce (čtverce), vyvlékání drátků, provlékání šňůr uzavřenými kroužky a kuličkami, přesouvání těles v uzavřeném prostoru, přesouvání a kombinování jednotlivých prvků k dosažení požadovaného stavu (Hra „15“), vyprošťování těles (ježek v kleci), nebo speciálně konstruovaná bludiště. Celou řadu hlavolamů ani nelze přesně klasifikovat a zařadit.

Všechny hlavolamy však mají cosi společného: postup řešení není předem dán a úlohu často nelze splnit běžným postupem. Nutí řešitele tvořivě myslet, nalézat nové postupy a často využívat svoji prostorovou představivost. Jejich řešením pak řešitel svoji prostorovou představivost může nadále soustavně rozvíjet.

Již v raném dětství jsou děti podněcovány k přemýšlení na základě dostatečného množství podněcujících prostředků – různých materiálů, hraček, stavebnic, čímž se dítě učí mimo jiné vnímat vlastnosti prostoru a porozumět zákonitostem pohybu. Hlavolamy můžeme zařadit mezi ty podněcující prostředky, kdy v mysli dítěte probíhají při jejich

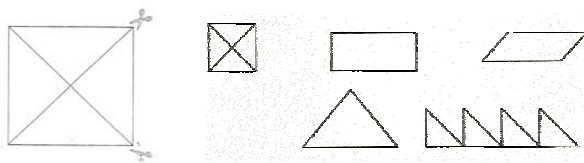
řešení složité procesy. Z psychologického hlediska se jedná na jedné straně o cvičení představivosti, paměti, kombinačních úsudků a logiky, trénink logických a strategických úsudků, uvolnění a rozvoj tvůrčího a konstruktivního, originálního myšlení, na straně druhé posiluje řešení hlavolamů např. schopnosti soustředění, vytrvalost a trpělivost. Hlavolamy jsou však užitečné i jinak. Pozorujeme-li dítě, které řeší hlavolam, pak si můžeme udělat jasnou představu o jeho představivosti, originalitě myšlení, strategii apod.

Hlavolamy a různé matematické hry jsou v neposlední řadě jednou z možností, jak rozvíjet klíčové kompetence, které představují soubor znalostí, dovedností a postojů, přesahujících konkrétní oborové znalosti, umožňují jejich efektivní využití a jsou požadovány pro velké množství různých pracovních funkcí a zařazení. Z našeho pohledu nám jde zejména o řešení problémů a vlastní tvořivost. V další části příspěvku jsou nabídnuty některé zajímavé náměty hlavolamů, které lze vhodnou měrou využít pro rozvoj prostorové představivosti. První skupinu tvoří tzv. skládačkové hlavolamy, druhou mechanické - 3D hlavolamy.

1.1. Skládačkové hlavolamy

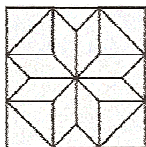
Podstatou skládačkové úlohy (hlavolamu) je sestavit z několika oddělených částí předepsaný obrazec. Skládačky lze vyrobit z papíru, překližky, plastické hmoty. Při jejich výrobě je možné přímo zapojit žáky. Sestavováním skládaček se procvičuje konstruktivní představivost, kombinační schopnosti a cit pro plochu. V následující části uvádíme některé zajímavé náměty, [1], [2].

Rozstříhaný čtverec



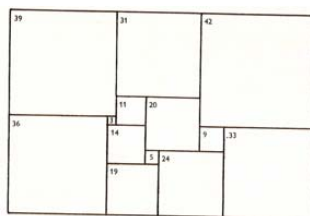
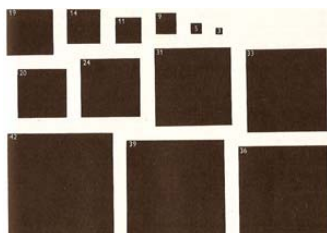
Čtverec je rozstříhán na čtyři rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky. Z těchto čtyř trojúhelníků lze pak sestavovat různé rovinné útvary:

Skládání čtverců z jiných geometrických útvarů



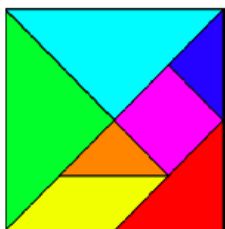
Stavebnice složené z rovnoramenných pravoúhlých trojúhelníků a kosočtverců se využívá k vytváření tzv. MOZAIKY. Strany čtverců mají stejnou délku jako ramena trojúhelníků. Žáci skládají z geometrických tvarů čtverce podle předlohy nebo podle vlastní představy

Obdélník z třinácti čtverců



Úkolem je sestavit obdélník z daných třinácti čtverců různé velikosti. Jedno z možných řešení je předloženo.

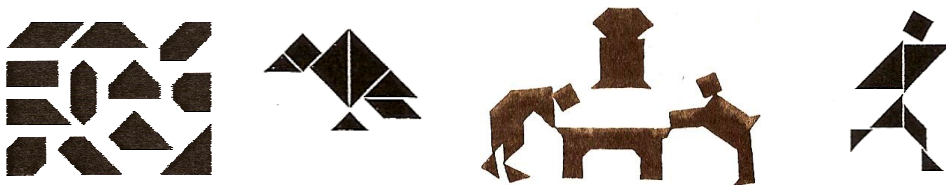
Tangramy



Tangram je čínský hlavolam. Čtverec je rozdělen na 7 geometrických útvarů – rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky, kosodélník a čtverec. Všechny sedm částí je třeba sestavit tak, aby vytvářely jednu z daných figur (zvířecí či lidskou) nebo různé geometrické obrazce. Sestavováním jednotlivých obrazců se procvičuje konstruktivní představivost, smysl a cit pro geometrické obrazce, obecně známé předměty, zvířata a lidské postavy; některé z možností jsou uvedeny níže:

Vytváření obrazců musí přitom respektovat jistá pravidla

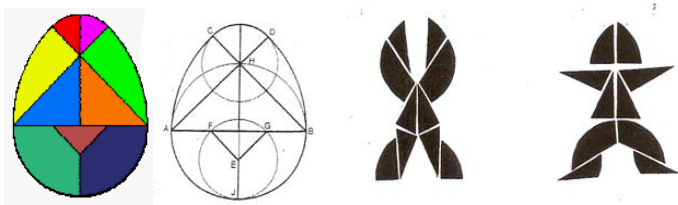
- *Pokládání jednotlivých dílků skládačky do předem daného obrysu se zakreslením částí*
- *Pokládání jednotlivých dílků skládačky do předem daného obrysu bez zakreslení částí*
- *Vytváření různých geometrických obrazců podle předlohy v jiné velikosti)*
- *Vytváření různých obrazců – geometrických útvarů (trojúhelník, obdélník, kosodélník, pětiúhelník aj.), obecně známých předmětů (dům), postav lidí a zvířat (dokonce naznačujících pohyb)*
- *Vytváření obrazců dle vlastní fantazie*



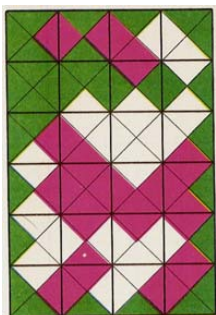
Tangramem se zabývali velmi podrobně čínští matematici. Zjistili, že lze z jeho částí sestavit celou sérii vypuklých (konvexních) mnohoúhelníků (vypuklý mnohoúhelník je ten, u něhož je velikost každého z vnitřních úhlů menší než 180).

Kolumbovo vejce

Kolumbovo vejce je podobnou skládačkou jako tangram. Vytvořené obrazce však mohou mít zaoblené tvary a tím např. osoby a zvířata působí přirozeněji.



Quadromino - italský skládačkový hlavolam

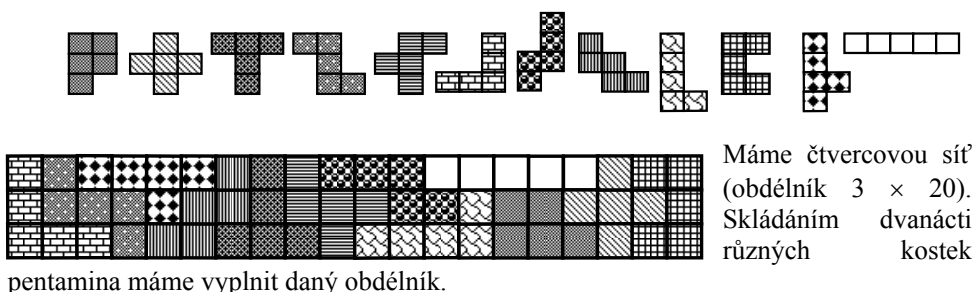


Cílem hlavolamu je sestavit z jednotlivých částí obdélník šest čtverců dlouhý a čtyři čtverce široký tak, aby:

1. Všechny trojúhelníky, které tvoří okraj obdélníku, byly stejné barvy – buď zelené, červené nebo bílé
2. Všechny čtverce se dotýkaly svými trojúhelníky stejné barvy (obdobně jako u domina se dotýkají plošky se stejným počtem teček)

Pentamino

Pentamino se skládá z dvanácti různých kostek, každá z nich má 5 čtvercových kostiček:



Máme čtvercovou síť (obdélník 3×20). Skládáním dvanácti různých kostek

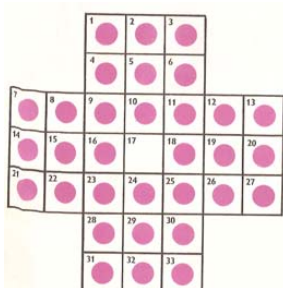
pentamina máme vyplnit daný obdélník.

Dalšími typy pro rovinné hlavolamy jsou např. hra Ypsilon (využívaná mimo jiné v televizní soutěži A-Z kvíz), hlavolamy s řeckým křížem, sestavení obdélníku z daných devíti, resp. třinácti čtverců aj. (bližší viz [1], [2]).

1.2. Mechanické hlavolamy

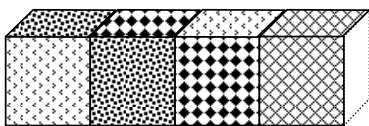
Mechanické – prostorové - hlavolamy jsou často vyrobené z umělé hmoty, kovu či ze dřeva, které je příjemné na dotyk, pokaždé překvapí svojí kresbou, barvou a předměty z něj vyrobené patří k oblíbeným dekoračním předmětům. Výhodou prostorových hlavolamů je možnost vnímat daný útvar z více pohledů.

Solitér



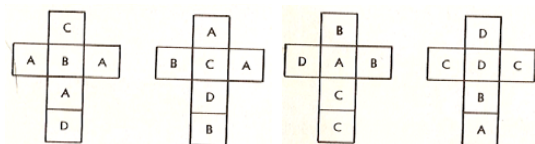
„Anglický solitér“ – původ není přesně znám, byl rozšířen již před několika staletími hlavně v Anglii. Cílem hlavolamu je přeskákat jednotlivé kolíky tak, aby zůstal jeden jediný přesně ve středu hracího pole. Při řešení tohoto hlavolamu si řešitel procvičuje taktické a strategické myšlení a schopnost zapamatovat si cesty vedoucí k úspěchu. Výchozí pozice souhlasí s vyobrazením na obrázku. Jinou variantou je výchozí pozice, kdy na počátku hry je volná pozice č.33.

Barevné kostky



Hlavolam spočívá v tom, že jsou k dispozici čtyři krychle, na jejichž stěnách se vyskytují čtyři barvy: např. červená, modrá, žlutá, šedá. Stěny krychlí jsou vybarveny různě. Úkolem je srovnat krychle do řady a vytvořit kvádr s rozměry $4 \times 1 \times 1$ tak, aby se na každé obdélníkové stěně kváдру vyskytovaly všechny čtyři barvy, [4].

Rozložíme-li jednotlivé krychle do roviny, získáme následující sítě (písmena představují jednotlivé barvy):



Řešení je pak určeno dle klíče:

Spodní stěna:	DBCA
Vrchní stěna:	BCAD
Právěrací stěna hranolu:	ADCB
Odvěrací stěna hranolu:	CABD

Variantou tohoto hlavolamu je použití krychlí, kde místo barev mohou být na stěnách umístěny vlajky států, případně je možno využít variantu se šesti krychlemi. Nutno však poznamenat, že se nejedná o klasické hrací kostky, ale čísla jsou umístěna dle jiného klíče, [1].

2. Závěr

V příspěvku jsou nabídnuty pouze některé náměty pro využití hlavolamů k rozvoji prostorové představivosti zejména v počáteční motivační fázi. Řešení hlavolamů možno zařadit jak mezi manipulativní, tak i mentální činnosti, [3]. Některé z řešitelských strategií, které se uplatňují při řešení hlavolamů, je pak možnost matematicky popsat, avšak to přesahuje rámec předloženého příspěvku. Další náměty lze čerpat z [5].

Literatura

1. BAKALÁŘ, E., KOPSKÝ, V. *I dospělí si mohou hrát*. Pressfoto, vydavatelství ČTK, Praha 1987.
2. DUDENEY, H., E. *Matematické hlavolamy a hříčky*. Olympia, Praha 1995. ISBN80-7043-225-X.
3. PERNÝ, J.: *Krychle, pohyb a prostorová představivost II*. Učitel matematiky 12 (2004), 4(52), s. 221-230.
4. PŘÍHONSKÁ, J: *Barevné kostky aneb matematika hrou*. In: Sborník mezinárodní konference ICPM'05, TU v Liberci 2006, s. 203 – 209.
5. <http://knihy.abz.cz/prodej/hlavolamy-pro-rozvoj-predstavivosti-a-mysleni>

Kontaktní adresa

RNDr. Jana Příhonská, Ph.D.
TU v Liberci, Fakulta pedagogická
Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Studentská 2, 461 17 LIBEREC
Telefon: +420 485 352 370, e-mail: jana.prihonska@tul.cz

PREFERENCIA STAVU V OTÁZKACH SLOVNÝCH ÚLOH S OPERÁTORMI

Janka RUPPELDOVÁ

Abstrakt

Analýzou formulácií otázok spejúcich k vytvoreniu slovných úloh s operátormi študentmi predškolskej a elementárnej pedagogiky boli zistené niektoré kognitívne fenomény. Pozornosť sme zamerali na jav preferencie kategórií stav - operátor v otázkach a následne v študentských riešeniach slovných úloh.

PREFERENCE OF STATE IN QUESTIONS OF WORD PROBLEMS WITH OPERATORS

Abstract

While analysing preschool and elementary students' questions formulated to create word problems with operators several cognitive phenomena were identified. Our attention was aimed at the phenomenon of preference of categories state – operator in questions and consequently in students' solutions of word problems.

Úvod

V rámci nášho rozsiahleho výskumu zameraného na didaktiku slovných úloh s operátormi bola identifikovaná skupina kognitívnych javov rozhodujúcich o miere porozumenie týmto úlohám žiakmi. V náväznosti na tento výskum vznikla otázka, do akej miery sú študenti, budúci učitelia 1. a 2. stupňa ZŠ, pripravení na prácu so slovnými úlohami s operátormi.

Z množstva fenoménov vyplývajúcich z analýz riešiteľských procesov žiakov sa javili dominantné dve stratégie - stratégia založená na potrebe jedného zo stavov v úlohe a stratégia narábania len s operátormi. Na tieto dva javy - potrebu stavu a prácu len s operátormi – sme sa zamerali pri analyzovaní testov zadaných študentom. Cieľom nášho príspevku je prezentovať výsledky týkajúce sa preferencií spomínaných stratégií študentmi predškolskej a elementárnej pedagogiky pri formulovaní a riešení slovných úloh s operátormi.

Metodológia

Od januára do apríla roku 2007 bola uskutočnená prvá etapa výskumu s 30 študentmi – budúci učiteľmi 1. a 2. stupňa ZŠ, ktorí sa v rámci seminára Teória vyučovania matematiky mali možnosť s danou problematikou oboznámiť. Základné charakteristiky výskumu a analýza myšlienkového procesu jednej študentky boli prezentované v Ruppeldtová (2007). V novembri a decembri roku 2007 prebehla druhá etapa, ktorej sa zúčastnilo 13 študentov elementárnej pedagogiky (EP) v rámci

didaktického seminára a 13 prevažne externých študentov predškolskej pedagogiky (PP), ktorí tvorili kontrolnú vzorku, keďže sa doposiaľ počas štúdia na fakulte nestretli s tematikou slovných úloh s operátormi z didaktického hľadiska.

	študenti	ročník	počet
1.etapa	matematiky (M)	3.+ 4.	6
	elementárnej pedagogiky (EP)	3.+ 4.	24
2.etapa	elementárnej pedagogiky (EP)	4.+ 5.	13
	predškolskej pedagogiky (PP)	2.	13

Tabuľka 1

Výskumný nástroj z prvej etapy bol štylisticky a terminologicky upravený a použitý v druhej etape. Zadanie pozostávalo z dvoch častí: textu, ktorý navodzoval situácie s určitým kontextom, a pokynov pre študentov. Úlohou študentov bolo dotvoriť text naformulovaním zmysluplnej otázky (Verschaffel, Greer, De Corte, 2000) a vyriešiť slovnú úlohu. Jedným zo zadaní výskumného nástroja bol text nasledovného znenia:

V januári v rámci výpredaja kabát zlacnel o 500 Sk, vo februári došlo k prehodnoteniu cien - kabát zdražel o 800 Sk. V marci bol nový výpredaj, a tak kabát zlacnel o 600 Sk.

s pokynmi pre študentov:

- Vytvorte k danej situácii otázku tak, aby vznikla úloha, ktorú by žiaci mohli riešiť.*
- Vyriešte Vami vytvorenú úlohu - aspoň dvoma spôsobmi, ktoré očakávate ako riešenia detí.*

Z charakteristík slovnej úlohy spomenieme, že všetky čísla v zadaní sú vo funkcii operátorov (Hejný, 2001), vyjadrujúcich zmeny stavov – cien kabáta v jednotlivých mesiacoch po zlacnení alebo zdražení. Úloha má procesuálny (dynamický) charakter (Hiebert, Lefevre, 1986; Hejný, 2003). Pod zmysluplnou otázkou rozumieme otázku, na ktorú odpovedať si vyžaduje využitie zadaných informácií, nie nevyhnutne všetkých. Za najočakávanejšie otázky považujeme:

- otázku na operátor – na celkovú zmenu ceny kabáta (niektoré formulácie uvádzame ako ukážky):

Ako sa zmenila cena kabáta po zlacnení v marci oproti cene pred zlacnením v januári?

O koľko celkovo zdražel alebo zlacnel kabát od januára do konca marca?

- na jeden zo stavov – počiatočný alebo koncový – pri dodaní informácie o tom druhom pri konvergentných úlohách:

Koľko stál kabát pred zlacnením v januári, ak v marci po zlacnení stál 700 Sk?

Koľko stál kabát v marci po zlacnení, ak v januári pred zlacnením stál 1200 Sk?

Formulácie otázok i riešiteľské procesy študentov boli skúmané metódou atomárnej analýzy (Hejný, 1992). Úroveň kognitívneho myslenia sme hodnotili využívajúc Teóriu izolovaných a generických modelov (Hejný, Littler, 2006).

Výsledky experimentálneho zistenia

Podľa smerovania otázky študenta na jeden zo stavov S_i alebo operátorov O_i , prípadne dvoch otázok zameraných na stav a operátor, sme zostavili tabuľku početnosti výskytu stavov S_i a operátorov O_i vo výzve úlohy:

	študenti	počet	S	O	S+O
1.etapa	M	6	4	1	1
	EP	24	14	9	1
	spolu	30	18	10	2
2.etapa	EP	13	6	4	3
	PP	13	7	5	1
	spolu	26	13	9	4
celkovo		56	31	19	6

Tabuľka 2

V 1. etape 20 študenti (18+2) z 30 sa pýtali na niektorú z cien kabáta, pričom doplňujúci údaj – jeden zo stavov – poskytlo 8 študentov. Zo spomínaných 20 študentov dvaja položili aj druhú otázku, týkajúcu sa zmien ceny kabáta. Jedna tretina zo študentov svoju otázku zamerala len operátorovo.

Výsledky analýz 2. etapy ukazujú, že študenti elementárnej pedagogiky, aj napriek oboznámeniu sa so slovnými úlohami s operátormi, v 9 (6+3) prípadoch z 13 otázku zamerali na jeden z dvojice stavov – cenu kabáta pred zmenami v januári alebo po zmenách v marci, pričom v 4 prípadoch uviedli konkrétnu hodnotu druhého z dvojice stavov. Traja študenti zo spomínaných 9 položili aj ďalšiu otázku zameranú operátorovo. Otázky len operátorového charakteru sformulovalo 5 študentov. Študenti predškolskej pedagogiky dosiahli približne rovnaké skóre (8=7+1) v počte otázok zameraných na niektorý zo stavov, avšak druhú otázku, orientovanú operátorovo, položil len jeden študent. V 3 prípadoch doplnili konkrétnu hodnotu jedného zo stavov. Na zmeny cien kabáta sa spýtalo 5 študentov.

Jedným z ďalších fenoménov, týkajúcich sa riešiteľských procesov študentov, je zavedenie neznámej x (prípadne použitie iného písmena $y, m, \dots$) vo funkcii niektorého zo stavov, najčastejšie počiatočného stavu; a to v 1. etape 6 študentov odboru M a 17 študentov EP, v 2. etape 8 študentov EP a 5 študentov PP. Tento jav sa prejavil aj u študentov, ktorých otázky boli zamerané operátorovo – na celkovú zmenu ceny kabáta za celé časové obdobie. Pri operátorovom riešení tak študenti dospeli k zápisu matematického modelu úlohy v tvare $x - 500 + 800 - 600 =$ (alebo $\Rightarrow$) $x - 300$ (obr.1), ktorý svedčí o prítomnosti neznámeho stavu v mysli študentov, napriek chápaniu, že celková zmena nezávisí od stavu.

a) Ako sa zmenila cena kabátu (v marci) podľa pôvodnej ceny po rôznych predhodnotených cenách?

b)

$$\begin{array}{l}
 x - 500 + 800 - 600 \\
 \downarrow \\
 x - 300
 \end{array}$$

Kabát bol o 300 Sk lacnejší!

Obr.1

Z hľadiska hodnotenia riešiteľka je schopná pracovať na abstraktnej úrovni, keďže vstupný stav je reprezentovaný písmenom, čo umožňuje študentke interpretovať výsledný nápis $x - 300$ ako operátor.

Medzi reprezentatívne ukážky obidvoch diskutovaných javov patrili riešenia:

- študentky Andrei (PP) – obr.2

ak stál kabát 1000 SK aká bola jeho
cena po zlacnení v marci a zdražení
vo februári.

$$\begin{aligned} 1000 - 500 &= 500 \\ 500 + 800 &= 1300 \\ 1300 - 600 &= \underline{\underline{700 \text{ SK}}} \end{aligned}$$

Po zlacnení v marci stál 700 SK
a zdražením vo februári 1300 SK.

Obr. 2

V mysli študentky po prečítaní textu predstavujúceho situáciu úlohy problém nie je riešiteľný bez dodania ďalšieho údaju, a preto otázku začína podmienkou „ak stál kabát 1000 Sk“. Samotná formulácia otázky v tvare oznamovacej vety je zameraná na stavy - cenu kabáta po zlacnení v marci a po zdražení vo februári. Druhá časť otázky je pravdepodobne dotvorená po prečítaní pokynu – aspoň dvoma spôsobmi, ktorý si riešiteľka vysvetlila ako aspoň dve otázky. Z formulácie otázky usudzujeme, že riešiteľka pozná len jednu stratégiu, a preto kladie otázky na „medzistav“ – cenu kabáta po zdražení vo februári.

Riešenie je rozčlenené do troch krokov, ktoré sledujú jednotlivé zmeny v cene kabáta s dôrazom na jednotlivé stavy, pričom výsledky predstavujúce odpovede sú klasicky zvýraznené dvojitém podčiarknutím.

Fragmentácia (Hejný, 2003) celého procesu pri riešení je dôkazom dominancie stavov, pretože každý riadok predstavuje jednu zmenu ceny kabáta v čase, umocňujúcu potrebu poznania stavu po každej zmene.

Vstupný údaj 1000 Sk reprezentuje vo vedomí riešiteľky určité číslo, ktoré môže byť volené ľubovoľne, a napriek rôznosti čísel získaných v priebehu riešenia, proces riešenia zostáva rovnaký. Teda predložené riešenie je chápané ako generický model pre všetky prípadné možnosti. Vstupné číslo je vo všetkých prípadoch nutnou súčasťou riešenia. Ku konštatovaniu celkovej zmeny sa riešiteľka nedopracuje, operátorové riešenie je vytesnené agresivitou stavov.

- študentky Viery (PP) – obr. 3

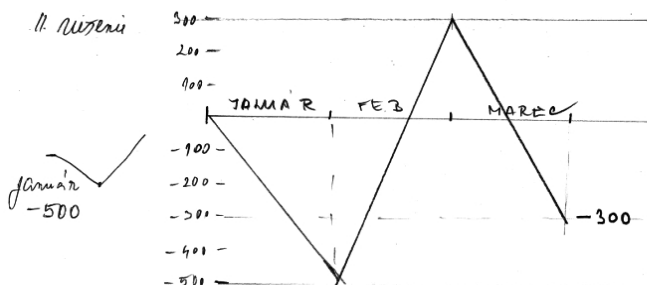
Riešiteľka má skúsenosti s riešením operátorových úloh, jednoznačne formuluje otázku zameranú operátorovo, kvôli spresneniu škrta v otázke slovo marci a nahrádza ho presnejším marcovej úprave cien. Prezентuje dve stratégie riešenia:

a) aritmetickú - pri riešení sleduje zmeny od prvej po poslednú a získava celkovú zmenu. Korektná odpoveď je završením tohto procesu.

o koľko bol kábel drahší, ale keď sa cena zvýšila, tak sa cena znížila, takže kábel je rovnaký pred zľavou.

$$-500 + 800 - 600 = -300$$

Kábel je lacnejší o 300 Sk



Obr.3

b) grafickú, ktorá je odpoveďou na pokyn aspoň dvoma spôsobmi. Pokúsime sa modelovať myšlienkový pohyb riešiteľky rozložený do troch fáz formou vnútorného jazyka:

1. „Ako inak môžem úlohu riešiť? Čo skúsiť vizualizáciu – napríklad graf?“
2. „Lenže grafom znázorňujeme stavy, a nie zmeny. A ja neviem, aká bola pôvodná cena kabáta.“
3. Riešiteľka vezme ceruzku a začne črtat' ľavý obrázok – najprv krátku úsečku: „toto bola pôvodná cena; neviem koľko to je, ale viem, že v januári cena poklesla o 500 Sk“. Nakreslí úsečku nadol a pripíše k nej slovo január a údaj -500“. „Potom cena vzrástla ...“ Kreslí úsečku nahor a prichádza AHA okamžik „Áno, dá sa to takto zobrazit“. Celý graf vpravo je potom iba realizácia myšlienky odhalenej v troch opísaných fázach.

Graficky sú stavy reprezentované koncovými bodmi úsečiek. Jednotlivé zmeny počas mesiacov sú znázornené úsečkami, ktoré vizuálne dominujú v grafe. Ich sklon vyvoláva predstavu poklesu alebo nárastu ceny. Grafické znázornenie evokuje spojitosť zmien počas mesiacov, čo nezodpovedá skutočnosti, keďže zmeny sú skokovité. Napriek tomu, grafická interpretácia úlohy na tejto úrovni patrí medzi ojedinele sa vyskytujúce v riešeníach študentov.

Záver

Uvedomujeme si, že naša výskumná vzorka nie je dostatočne bohatá na to, aby bolo možné robiť štatistické závery. Avšak polarita vnímania stavu a operátora bola skúmaná v mnohých predchádzajúcich experimentoch. Analýzy riešiteľských procesov ukazujú, že práca so stavmi je jednoduchšia ako s operátormi, pokiaľ sa nemôžu oprieť o stavy. Naše doterajšie skúsenosti potvrdzujú, že vo väčšine prípadov pri práci so slovnými úlohami s operátorom prevláda potreba zadania alebo narábania so stavom.

Nová myšlienka, ktorou tento článok do našich výskumov prispieva, spočíva v nástroji výskumu. Od skúmanej osoby sa vyžaduje predovšetkým vytvorenie úlohy na základe situácie popísanej výlučne pomocou operátorov bez jediného stavu a následne

riešenie danej úlohy. Posun ťažiska nástroja – z riešenia na tvorbu úlohy je posunom k vyššej intelektuálnej autonómii skúmanej osoby. Tri ilustrácie predstavujú tri základné úrovne schopnosti operátorového uvažovania riešiteľa:

1. Operátor bez stavu nemôže existovať.
2. Pri práci s operátormi sú prítomné aj stavy, ale výsledné číslo úvah je operátor.
3. Schopnosť pracovať výlučne s operátormi.

Ukazuje sa, že použitý výskumný nástroj je zároveň diagnostickým nástrojom schopnosti práce s operátormi. Navyše práca s rôznymi počiatočnými stavmi v jednej úlohe môže byť reedukačným prostriedkom k pochopeniu nezávislosti celkovej zmeny od stavov pri daných jednotlivých zmenách a viesť k pochopeniu riešenia úlohy len využitím operátorov.

Literatura

1. Hiebert, J., Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. In J. Hiebert (Ed.), Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics. Hillsdale, NJ.: Lawrence Erlbaum Associates, pp.1-27.
2. Hejný, M.(1992).Analysis of students' solutions of equations $x^2 = a^2$ and $x^2 - a^2 = 0$. ADUC, 1992, No 1, pp. 65–82.
3. Hejný, M. (2001). Otváranie a utváranie matematického sveta. In: Kolláriková, Z., Pupala, B. (eds.). Predškolská a elementárna pedagogika. Portál, Praha, s. 307–345.
4. Hejný, M. (2003). Anatomia slovnej úlohy o veku. Disputationes Scientifcae Universitatis Catholicae in Ružomberok, 2003, roč. 3, č. 3, s. 21-32.
5. Hejný, M.; Littler, H. G. (2006). Transmissive and constructivist approaches to teaching. Creative Teaching in Mathematics. Charles University, Prague, pp. 11-33.
6. Ruppeldtová, J. (2007). Analýza otázok a riešení slovných úloh s operátormi.(Prípadová štúdia). In: Zborník príspevkov z Letnej školy z teórie vyučovania matematiky Pytagoras 2007, Bratislava, v tlači.
7. Verschaffel, L., Greer, B., De Corte, E. (2000). Making Sense of Word Problems. Swets & Zeitlinger Publishers B.V., Lisse, The Netherlands.

Kontaktní adresa

*Janka Ruppeldtová, RNDr.
Pedagogická fakulta, Univerzita J.A. Komenského,
Bratislava, Slovenská republika
e-mail: jana.ruppeldtova@fedu.uniba.sk*

ROZWÓJ LOGICZNEGO MYŚLENIA DZIECI WE WCZESNYM OKRESIE SZKOLNYM

Grażyna RYGAL

Abstract

Wśród celów nauczania we wczesnym okresie szkolnym jest wyrabianie u uczniów umiejętności logicznego myślenia. Matematyka należy do tych przedmiotów, które najbardziej mogą przyczynić się do rozwoju logicznego myślenia u dziecka.

Artykuł przedstawia kilka ćwiczeń pozwalających na rozwijanie u dzieci umiejętności logicznego myślenia. Wśród nich jest zabawa z „wieżą z Hanoi”, ćwiczenie z tablicą liczb od 1 do 100 i rysowanie spiral.

DEVELOPMENT OF CHILDREN'S LOGICAL THINKING DURING PRIMARY SCHOOL PERIOD

Abstract

One of the goals of learning during primary school period is forming pupil's logical thinking. Mathematics belongs to subjects which can help in development of child's logical thinking.

This paper is about several exercises aimed at forming logical thinking of pupils. These are the game "Tower of Hanoi", exercises with a table of numbers from 1 to 100 and spiral drawing.

1. Wprowadzenie

Młodszy wiek szkolny to bardzo szczególny czas w życiu dziecka. Rozpoczyna ono szkołę, uczy się nowych rzeczy, intensywnie poznaje świat, odkrywa swoje umiejętności. Maria Żebrowska [1] wyróżnia 6 stadiów rozwoju młodego człowieka: okres niemowlęcy, wiek poniemowlęcy, wiek przedszkolny, młodszy wiek szkolny i okres młodzieńczy.

Młodszy wiek szkolny nazwany jest w psychologii *wiekem pamięci*. To właśnie w tym okresie wzrasta szybkość, trwałość i skuteczność zapamiętywania. Doskonali się też mowa dziecka jako narzędzie komunikacji społecznej [2]. Dlatego w tym okresie procesy myślenia powinny być aktywizowane i pobudzane przez stosowanie ciekawych ćwiczeń oraz zabaw. Bardzo ważnym także na tym etapie rozwoju jest wyrabianie u uczniów umiejętności logicznego myślenia, jako podstawy poprawnego formułowania wypowiedzi i wszelkiego działania uporządkowanego.

Brak właściwego pobudzania procesów myślowych dzieci w tym wieku może skutkować później trudnościami w uczeniu się [3]. Skutki tego odczuje uczeń w wieku dorastania, czyli w dalszych etapach edukacyjnych. Czasem straty te są nie do odrobienia.

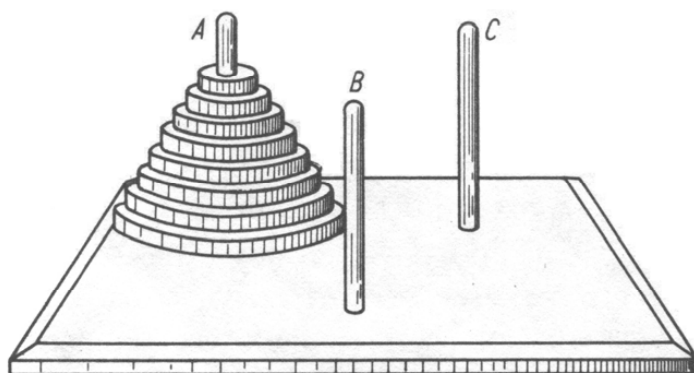
Młodszy wiek szkolny to stadium operacji konkretnych charakteryzujących się wiązaniem operacji myślowej z działaniem. Myślenie uczniów w tym okresie cechuje jedność opartego na operacjach z konkretnymi przedmiotami zmysłowo-obrazowego poznawania i logicznego poznawania rzeczywistości [4]. Bardzo ważny jest też proces dokonywania analizy i syntezy. Poziom rozwoju tych umiejętności jest związany z procesami abstrahowania, uogólniania, klasyfikacji, porównywania, systematyzowania niezbędnych przy kształtowaniu i poszerzaniu zasobu pojęć, wydawaniu prawidłowych sądów, dociekaniu przyczyn i skutków, a zatem związków przyczynowo-skutkowych.

Matematyka jest przedmiotem, który najbardziej może przyczynić się do rozwoju logicznego myślenia. Stosowane przez nauczyciela środki dydaktyczne i metody aktywizujące w znacznej mierze pomagają w rozwoju intelektualnym dziecka, wyróżniającym się w twórczym, logicznym i krytycznym myśleniu. Uczenie matematyki może sprawiać dzieciom wiele radości.

Dziś w polskiej szkole młodszy wiek szkolny to dzieci uczące się w klasach I – III, gdzie odbywa się nauczanie zintegrowane. Nie wyróżnia się przedmiotów szkolnych. Nie ma więc wydzielonych lekcji matematyki, jednak treści matematyczne są zapisane w programie szkolnym i są realizowane w formie bloków tematycznych. Poniżej przedstawiono trzy przykłady zabaw matematycznych rozwijających myślenie logiczne uczniów we wczesnym okresie szkolnym.

2. Wieża z Hanoi

Zapoznajemy uczniów z legendą, która stanowi instrukcję zabawy [5, 6]. „*Jak głosi stara hinduska legenda, przy stworzeniu świata, w jego środku, pod dachem świątyni umieszczone zostały trzy diamentowe paleczki. Na jedną z nich nałożone były 64 złote krążki o zmniejszających się średnicach, tworząc złoty stożek. Dzień i noc, zmieniając bezustannie, mnisi przekładali krążki na trzecią paleczkę. Musieli jednak zachować pewne zasady. Mogli posilkować się drugą paleczką, jednakże nie wolno im było przenosić jednocześnie więcej niż jeden krążek i umieszczać większy krążek na mniejszym. Gdy wykonają swoje zadanie – nastąpi koniec świata! Nie obawiajmy się – nie doczekamy. Gdyby każdy ruch trwał tylko 1 sekundę, to pracownicy mnisi trudziliby się prawie 600 miliardów lat*” (rys. 1).



Rys. 1. Wieża z Hanoi [5]

Po przeczytaniu legendy – instrukcji proponujemy uczniom zabawę używając plastikowych modeli „Wieży z Hanoi” i rozpoczynamy ją od 3 krążków na pierwszym pręcie. Liczymy ile przestawień wykonaliśmy aby osiągnąć sukces. Teraz pora na

zabawę z czterema, pięcioma, sześcioma, a później z ośmioma krążkami. W celu ułatwienia uczniom zapisu wykonanych ruchów można notować je jak w Tabeli 1 oznaczając krążki liczbami 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 zaczynając od najmniejszego, a pręty literami A, B, C.

Tabela 1. Proces przekładania krążków „Wieży z Hanoi”

Przeniesienie	Pręt A	Pręt B	Pręt C
0	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	. . .	. . .
1	. 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	. . 1	. . .
2	. . 3, 4, 5, 6, 7, 8	. . 1	. . 2
3	. . 3, 4, 5, 6, 7, 8	. . .	. 1, 2
4	. . . 4, 5, 6, 7, 8	. . 3	. 1, 2
5	. . 1, 4, 5, 6, 7, 8	. . 3	. . 2
6	. . 1, 4, 5, 6, 7, 8	. 2, 3	. . .
7	. . . 4, 5, 6, 7, 8	1, 2, 3	. . .
8	 5, 6, 7, 8	1, 2, 3	. . 4
...	...	...	...

Zabawa uczy cierpliwości, logicznego myślenia, stosowania określonych reguł, poszukiwania strategii.

3. Tablica liczb naturalnych od 1 do 100 (kwadrat stupolowy)

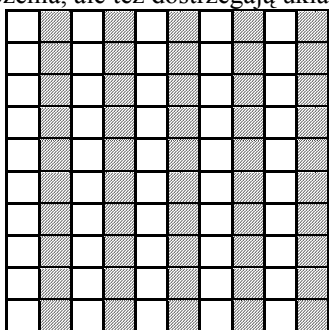
Przygotowujemy dla uczniów kilka tabliczek z liczbami naturalnymi od 1 do 100 (rys. 2) [7].

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	24	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

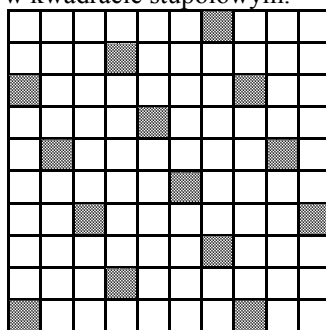
Rys. 2. Kwadrat stupolowy

Kwadrat stupolowy zawiera wiele ciekawych układów liczb. Proponujemy uczniom zamalowanie liczb parzystych (rys. 3), następnie wielokrotności liczby 7 (rys. 4). Warto zwrócić uwagę, że ten wzór naśladuje ruch konika szachowego w dół. Na kolejnym kwadracie stupolowym dzieci zamalowują wielokrotności liczby 4 (rys. 5), a na następnym wielokrotności liczby 3 (rys. 6).

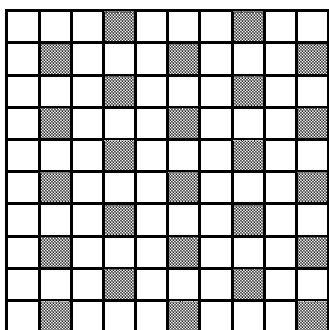
Dzięki tej zabawie uczniowie poznają wielokrotności liczb, ćwiczą tabliczkę mnożenia, ale też dostrzegają układy geometryczne w kwadracie stupolowym.



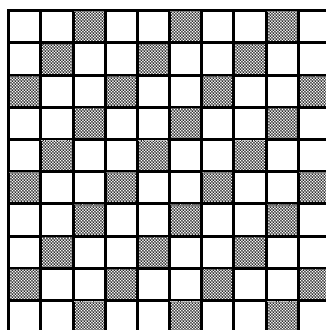
Rys. 3. Liczby parzyste



Rys. 4. Wielokrotności liczby 7



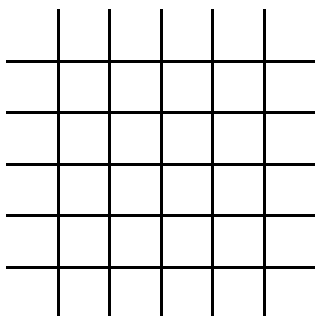
Rys. 5. Wielokrotności liczby 4



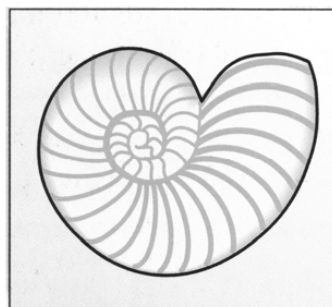
Rys. 6. Wielokrotności liczby 3

4. Rysowanie spiral

Przygotowujemy dla uczniów kartki z siatką kwadratową (rys. 7) [7]. Zabawę rozpoczynamy od przypięcia na tablicy obrazka przedstawiającego zdjęcie muszli głowonoga morskiego (rys. 8). Poniżej zapisujemy ciąg liczb: 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, Wówczas zadajemy dzieciom pytanie: Co ma wspólnego muszla i ciąg liczb? Poprzez zabawę w rysowanie spiral spróbujemy odpowiedzieć na to pytanie.



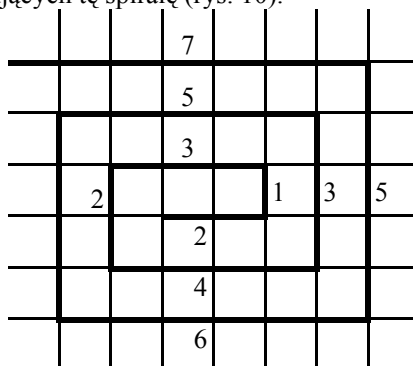
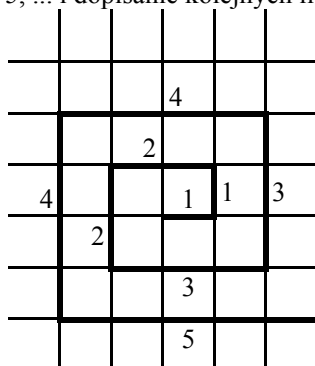
Rys. 7. Siatka pomocnicza



Rys. 8. Muszla głowonoga morskiego

Na papierze z siatką kwadratową wspólnie z dziećmi rysujemy spiralę opisaną przez wspomniany ciąg liczb. Rozpoczynamy od środka kartki. Poruszamy się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Powstaje spirala (rys. 9). Zachęcamy uczniów aby narysowali dalej tę spiralę i podali kolejne liczby ją opisujące.

Następnie prosimy o narysowanie samodzielnie spirali opisanej ciągiem liczb: 2, 1, 3, 2, 4, 3, 5, ... i dopisanie kolejnych liczb opisujących tę spiralę (rys. 10).



Rys. 9. Spirala z ciągu liczb 1, 1, 2, 2, ... Rys. 10. Spirala z ciągu liczb 2, 1, 3, 2, 4, ...

Zabawa ta pozwala uczniom na znajdowanie pewnych prawidłowości. Oczywiście musi też paść odpowiedź na pytanie postawione na początku zabawy. Muszla i zaprezentowane ciągi liczb zawierają przykłady linii spiralnych.

5. Zakończenie

Zdolność do precyzyjnego i logicznego myślenia, na którą składają się umiejętności dostrzegania przyczyn, kojarzenia pojęć, podejmowania samodzielnego myślenia jest bardzo ważnym czynnikiem decydującym o szkolnych postępach dziecka. Stosowanie we wczesnym wieku szkolnym wyżej zaprezentowanych zabaw stwarza uczniom szansę na rozwijanie samodzielnego myślenia. Nauczyciele pracujący z uczniami w tym okresie powinni tak organizować proces nauczania, aby stwarzać jak najwięcej sytuacji, w których dziecko będzie wykorzystywać i rozwijać samodzielne myślenie.

References

1. *Psychologia rozwojowa dzieci i młodzieży t. 1-3*. Pod red. ŻEBROWSKA M., wyd. 12, Warszawa: PWN, 1986, s. 876. ISBN 83-01-0631-81.
2. FONTANA D. *Psychologia dla nauczycieli*. Wyd. 1, Poznań, Zysk i S-ka Wydawnictwo, 1998, s. 419. ISBN 83-7150-421-7.
3. RYGAŁ G. *Wybrane aspekty nauczania matematyki uczniów o specjalnych potrzebach edukacyjnych w klasach IV – VI szkoły podstawowej*. Wyd. 1, Częstochowa, Wydawnictwo AJD, 2008, s. 98. ISBN 978-83-7455-020-8.
4. GRUSZCZYK-KOLCZYŃSKA E. *Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki*. Wyd. 3, Warszawa, WSiP, 1997, s. 291. ISBN 83-02-06528-5.
5. JELEŃSKI S. *Lilavati*. Wyd. 9, Warszawa, WSiP, s. 312. ISBN 83-02-00762-5.
6. *Instrukcja do gry „Piramida z Legendą”*, Częstochowa, FPHU „Marek”, 2008.
7. LANGDON N. SNAPE C. *Ścieżki matematyki*. Wyd. 2, Gdańsk, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, 1988, s. 48. ISBN 83-85694-75-7.

Contact address

Grażyna Rygał Dr
Akademia im. Jana Długosza w Częstochowie
Al. Armii Krajowej 13/15, 42-200 Częstochowa, Polska
Phone: +48 34 361 22 69, e-mail: g.rygal@ajd.czyst.pl

BŁĘDY (NIE TYLKO UCZNIOWSKIE) W ROZWIĄZYWANIU ZADAŃ TEKSTOWYCH

Jolanta SEIDEL, Maria SOBIESZCZYK

Abstrakt

W edukacji matematycznej zadania tekstowe odgrywają istotną rolę, gdyż rozwijają logiczne myślenie, kształtują umiejętności rachunkowe, ujawniają sens pojęć matematycznych i ukazują zastosowanie poznanej wiedzy w życiu codziennym. Jednak poziom umiejętności ich rozwiązywania jest niski, a przyczyną tego stanu są między innymi liczne błędy popełniane przez uczniów w tym procesie. Należy zastanowić się nie tylko nad stwierdzeniem i klasyfikacją popełnianych błędów, ale też nad ich źródłem.

MISTAKES (NOT ONLY MADE BY STUDENTS) IN SOLVING TEXT-BASED TASKS

Abstract

Text-based tasks play a very import role as they develop logical thinking, form computational skills, reveal the essence of mathematical notions and show how the acquired knowledge is applied in everyday life. However, the level on which these tasks are solved appears to be very low, and the reasons for this are, for instance, numerous mistakes made by the students in the process of task solving. That is why the definition, classification and the origin of those mistakes require careful consideration.

Wstęp

Błąd (ale i też chwilowa pomyłka) towarzyszy ludzkiej aktywności od zawsze. Człowiek ma prawo w swoim działaniu do popełniania błędów pod warunkiem, że będzie miał świadomość ich skutków i potrzeby ich poprawy, jeżeli to możliwe. Jest to składnik naturalny i nieunikniony ludzkiego działania, mający też swój wymiar pozytywny w rozwoju wiedzy, w uczeniu się. Błąd, tak w życiu, jak i w edukacji nie powinien być uważany za nieszczęście, za katastrofę, i nie jest wskaźnikiem braku postępu. Ważne jest jednak, aby był uświadomiony, zanalizowany i ustalone zostały jego przyczyny. Jak stara maksyma głosi o „uczeniu się na błędach” nie powinny one być utrwalane poprzez powtarzalne okoliczności. W codziennej życiowej działalności, przy odczuwalnym społecznym przyzwoleniu do popełniania błędów, łatwiej jest się nam do błędu przyznać, uzasadnić jego popełnienie obiektywnymi przyczynami, a szczególnie wtedy, gdy skutki jego nie mają życiowych konsekwencji.

Dlaczego w takim razie inaczej jest w szkole? Uczniowi na matematyce podkreśla się jego błędy, sumuje, i na ich podstawie ocenia. Dlaczego nauczyciele nie wnikają w typy popełnianych błędów i źródła ich pojawiania się, ograniczając się tylko do ich zarejestrowania, stwierdzenia i ilościowej oceny? Szukając odpowiedzi na te pytania należy przyjąć, że brak refleksji, czy też niechęci do niej i głębszego wnikania w naturę błędów uczniowskich oraz ich źródeł może spowodować kumulowanie się trudności, niepowodzenia w uczeniu się matematyki, a w najlepszym przypadku niechęć do przedmiotu.

Jak rozumieć błąd w matematyce?

Niezależnie od organizacji szkolnego uczenia się matematyki na poziomie klas niższych należy zastanowić się nad charakterem matematyki jako przedmiotu nauczania. Zachowuje bowiem ona wewnętrzną, odrębną specyfikę organizacyjną, w której pozornie drobna luka w wiedzy i jej rozumieniu łatwo powoduje następne nieporozumienia, narastające i nawarstwiające się, i sprawia w konsekwencji lawinę nie do zatrzymania. Pomyłka rachunkowa może wywołać błędne rozumowanie w problemie matematycznym, przez co proste zadanie staje się trudnym problemem (Z. Krygowska, 1989). Specyficzny język matematyczny, szczególnie na pierwszym poziomie uczenia się, jest dla dziecka uczącego się źródłem nieporozumień. Staje się to szczególnie wtedy, gdy w imię większej przystępności nauczyciel wprowadza do niego własne terminy, często oderwane od ich semantycznych znaczeń. Wielość terminów matematycznych i ich życiowych synonimów powoduje zagubienie się dziecka i nieadekwatne skojarzenia pojęciowe. W matematyce funkcjonują też pozorne sprzeczności, które uczeń najpierw musi zrozumieć, zaakceptować i właściwie się nimi posługiwać. Ma to miejsce w konieczności automatycznego opanowania algorytmów i jednocześnie rozwijania myślenia i rozumowania pojęciowego. Podobnie ma się sprzeczność wynikająca z naturalnego myślenia codziennego i myślenia formalnego, które zresztą oparte na często niejasnych konwencjach tę sprzeczność jeszcze bardziej pogłębia.

Uczenie się matematyki polega też na przechodzeniu z jednej rzeczywistości matematycznej do drugiej, a przejściu temu towarzyszy mniej lub więcej progów pojęciowych. Przejście ze świata liczb jednocyfrowych do dwu i wielocyfrowych wiąże się z pokonywaniem mniejszych i większych trudności.

Typologie błędów w matematyce

Próby takiej typologii można podejmować z punktu widzenia różnych kryteriów. Jeżeli za punkt widzenia przyjmujemy profilaktykę i terapię błędów to typologia ta obejmuje następujące kategorie:

- Błędy wynikające z postaw i zachowań ucznia, który nie interesuje się rozwiązywanym zadaniem, byle co pisze i mówi, nie skupia uwagi na wykonywanej czynności, nie ma nawyku autokontroli,
- Błędy wynikające z luk w wiedzy i umiejętnościach, które dzięki własnej aktywności uczeń może uzupełnić, gdy mu się na to da czas,
- Błędy oparte na lekkomyślnym zgadywaniu,
- Błędy oparte na świadomym, logicznie niepoprawnym rozumowaniu,
- Błędy ujawniające głęboko zakorzenione fałszywe koncepcje, które uczeń utrwała z braku dyskusji nad nimi (Z. Krygowska, 1989).

Inne klasyfikacje błędów popełnianych przez uczniów w matematyce (M. Ciosek, 1992; Z. Dybiec, 1996) biorą się z wieloaspektowości i złożoności ich pojawiania się. Rzadko w procesie świadomego uczenia się błąd występuje w postaci jednostkowej. Najczęściej popełniony jeden błąd pociąga za sobą następne. Zawsze jest jednak tak, że błąd jest skutkiem zróżnicowanych przyczyn. Tak więc kryteria, które są podstawą klasyfikacji błędów są jednocześnie wskazaniem ich źródeł. Błędy mające te same korzenie tworzą całe rodziny. Studiowanie takiej rodziny umożliwia wykrycie źródeł i przyczyn jej powstawania. W ten też sposób można odróżnić chwilową pomyłkę od błędu.

Źródła błędów w matematyce

W oparciu o wieloaspektowe typologie błędów można wymienić następujące źródła błędów popełnianych w matematyce a tkwiące w:

- procesie i stylu nauczania i metodach jego organizacji, w osobowości nauczyciela jego chęci w dochodzenia do źródeł,
- specyfice dziedziny wiedzy matematycznej: arytmetyce, geometrii, logice, teorii mnogości,
- cechach osobowościowych ucznia i jego czynnościach umysłowych pojawiających się w trakcie rozpatrywania określonego problemu matematycznego,
- braku wiedzy, niepoprawnych skojarzeniach, sztywności myślenia,
- obliczeniach, ograniczeniach w logicznym wnioskowaniu, języku matematycznym,
- przeciążeniu informacyjnym,
- wielości sposobów i metod rozwiązywania zadań,
- preferowaniu tendencji algorytmicznych.

Tak jak błędy najczęściej nie występują jednostkowo, tak i źródeł ich jest wiele i to w złożonej postaci. Odkrycie ich i systematyczne analizowanie oraz eliminowanie powinno doprowadzić do skutecznego i skutecznego redukowania popełnianych przez ucznia błędów.

Analiza błędów uczniowskich

Umiejętność rozwiązywania zadań tekstowych jest jedną z podstawowych i najważniejszych umiejętności kształtowanych w ramach edukacji matematycznej, zwłaszcza w szkole podstawowej. Inne, a szczególnie arytmetyczne umiejętności: liczenie w pamięci i pisemnie, dokonywanie pomiarów i operowanie wyrażeniami dwu i jednomianowymi mają charakter usługowy w stosunku do rozwiązywania zadań tekstowych. Zaś umiejętność ich rozwiązywania ma umożliwić uczącemu się dziecku radzenie sobie w różnych życiowych sytuacjach. Dotychczasowe badania tej umiejętności (M. Cackowska, Z. Dolecka, 2004) pokazują, że tylko 48 % uczniów klas I-III taką umiejętność posiada. Dlatego należy przyjrzeć się najczęściej popełnianym błędom, a następnie opracować strategie ich niwelowania.

W tym celu przeprowadzono badania testem zawierającym po 2 zadania tekstowe typowe i problemowe. Badaniami objęto 33 uczniów z klasy III. Ich prace zostały poddane analizie popełnionych błędów w kategoriach ustalonych wyżej. W sumie przeanalizowano 132 rozwiązane zadania tekstowe. Wyniki przedstawia tabela 1.

Tabela 1. Rodzajów błędów popełnianych w rozwiązywaniu zadań tekstowych

RODZAJE BŁĘDÓW	ILOŚĆ	ODSETEK	RANGA
błędy obliczeniowe	19	10,9	4
pomylenie pojęć i luki w wiedzy	16	9,2	6
zastosowanie błędnej metody lub zmiana metody w trakcie rozwiązywania	18	10,3	5
błędne rozumowanie przez tzw. „skrót myślowe”	4	2,2	8
przenoszenie nieadekwatnych strategii	3	1,7	9
niedbałość w zapisie formalnym	21	12,0	3
błędne przedstawianie zależności w postaci graficznej	12	6,9	7
czysto formalne sprawdzanie wyniku i obliczeń	60	34,2	1
Brak lub błędne sformułowanie odpowiedzi	22	12,6	2
SUMA	175	100,0	

Z przedstawionych danych wynika, że uczniowie popełnili najwięcej błędów z grupy braku samokontroli. Niektórzy uczniowie podejmowali próby „sprawdzania” swojego rozwiązania. Tę czynność podejmowali w sposób czysto formalny, nie upewniając się, czy wynik spełnia warunki zadania. Sprawdzenie obliczeń natomiast polegało na powtórnym zapisie tego samego działania i z tym samym błędem.

Druga grupa błędów wynikała z niedbałości w formalnym zapisie rozwiązania i formułowania odpowiedzi. Część dzieci nie wiedziała, co oznacza otrzymany wynik, zatem rozpoczynała formułować odpowiedź nie kończąc jej, lub całkiem z niej rezygnowała.

Trzecią grupę błędów stanowiły błędy obliczeniowe i stosowanie niewłaściwej metody lub jej zmiana w trakcie rozwiązywania zadania. Uczniowie dopasowywali metodę do danych lub typu zadania, a następnie włączali inną metodę nieadekwatną do potrzeb.

Dużą grupę błędów stanowiły luki w wiedzy, np. uczniowie mylili porównywanie ilorazowe z różnicowym, prostokąt z kwadratem, nie pamiętali wzoru na obwód

prostokąta itp. Uczniowie również rysunkiem wspomagali rozumowanie nad rozwiązaniem zadania. Jednak błędny rysunek /graf, schemat/ nie prowadził właściwie rozumowania a wręcz powodował przyjęcie błędnej strategii.

Jak „wyleczyć uczniów” z błędów w matematyce?

Gdyby odpowiedź na to pytanie była prosta, prawdopodobnie problem ten już by nie istniał. Rozpoznawanie zwykłej pomyłki od istotnego błędu będzie wtedy skuteczne, gdy nauczyciel będzie temu problemowi poświęcał czas. Ażeby „wyleczyć uczniów z błędów” trzeba wiedzieć, czego ten błąd jest symptomem i jakie są jego źródła. Na to trzeba mieć również czas, trzeba traktować każdego ucznia indywidualnie, i co najważniejsze uczeń musi mieć do nauczyciela zaufanie. Niestety nie sprzyjają temu przepełnione klasy, przeciążone nadmiarem treści programy nauczania, które zresztą trudno dostosować do indywidualnych potrzeb uczniów. Błędy stają się katastrofą zarówno ucznia, jak i nauczyciela. Ponieważ wiele błędów pojawia się na skutek nieuwagi i braku samokontroli, zatem jednym ze sposobów niwelowania ich jest wdrażanie do autokontroli, do sprawdzania wykonanych operacji matematycznych. W procesie rozwiązywania zadań tekstowych G. Polya (1993) zwraca uwagę na wielokrotne sprawdzanie rozwiązania zadania, poprawności obliczeń, proponuje szacowanie wyniku co w konsekwencji ma ukształtować nawyk samokontroli.

Literatura

1. Cackowska M., Z. Dolecka., Edukacja matematyczna po pierwszym etapie reformy. *Życie Szkoły* 2004, nr 3,
2. Ciosek M., Błędy popełniane przez uczących się i ich hipotetyczne przyczyny. *Dydaktyka Matematyki*, t. 3, Warszawa 1992,
3. Dybiec Z., Błędy w procesie uczenia się matematyki. UJ, Kraków 1996,
4. Krygowska Z., Zrozumieć błąd w matematyce. *Dydaktyka Matematyki*, t. 10, Warszawa 1989
5. Lewowicka H., Kłopoty w uczeniu się matematyki. *Matematyka*, 2004, nr 1,
6. Polya G., Jak to rozwiązać. Warszawa 1993,

Kontaktні adresa

*Dr Jolanta Seidel
Uniwersytet Kazimierza Wielkiego
Instytut Pedagogiki
85-064 Bydgoszcz
ul. Chodkiewicza 30
e-mail: joab53@poczta.onet.pl*

*Dr Maria Sobieszczyk
Uniwersytet Kazimierza Wielkiego
Instytut Pedagogiki
85-064 Bydgoszcz
ul. Chodkiewicza 30
e-mail: sobieszm@poczta.onet.pl*

PODRĘCZNIK DLA UCZNIA KLAS I-III SZKOŁY PODSTAWOWEJ. SZANSA CZY ZAGROŻENIE EDUKACJI?

Jolanta SEIDEL, Maria SOBIESZCZYK

Abstrakt

Rozpoczęta w Polsce w 1999 roku reforma edukacji miała przynieść wiele zasadniczych, a przede wszystkim korzystnych zmian. Mija już prawie dekada od jej wprowadzenia, a ciągle istnieje wiele kontrowersji i sprzecznych opinii. Dotyczą one między innymi organizacji i planowania pracy, oceny uczniów, kompetencji nauczyciela klas I- III, a także pakietów edukacyjnych dla ucznia (podręczników).

Prezentowany artykuł i towarzyszący mu poster (wystawa) wybranych fragmentów polskich podręczników dla edukacji wczesnoszkolnej, ze szczególnym uwzględnieniem części podręczników dotyczącej edukacji matematycznej jest próbą odpowiedzi na zawarte w tytule pytanie.

THE SCHOOLBOOK FOR A 1-3 GRADES PUPIL OF PRIMARY SCHOOL. A CHANCE OR A THREAT OF EDUCATION?

Abstract

The Reform of Education, which began in Poland in 1999, was to bring about a number of essential and (most of all) beneficial changes. The decade has almost passed since it was introduced but there are still many controversial and contradictory opinions. They refer to organizing and planning the work, pupils' evaluation, competencies of teachers of 1-3 grades and also educational packages for pupils (schoolbooks).

The presented article and the presentation of some parts of Polish early-education schoolbooks which accompanies it, is the attempt to answer the question which appears in the title, with the emphasis on those parts of schoolbooks which deal with Mathematical education.

Wprowadzenie

Podręcznik jest najczęściej wykorzystywanym przez nauczyciela środkiem do realizacji celów dydaktycznych i wychowawczych w procesie edukacyjnym. Określa go wiele definicji. Według Cz. Kupisiewicza „podręcznik stanowi jeden z najważniejszych środków nauczania. Od poziomu, układu zawartych w nim informacji zależą też jego funkcje dydaktyczne. Z kolei umiejętność posługiwania się nim przez nauczyciela i przez ucznia wpływa w dużej mierze na końcowe efekty pracy dydaktycznej – wychowawczej szkoły” (1978, s. 106). Ponadto podręcznik jest konkretnym, pokazywanym zbiorem informacji, w jego strukturze powinna być wybrana określona teoria kształcenia, jego treści winny być podporządkowane zasadom nauczania – uczenia się

(J. Skrzypczak 1996, s.21). Należy pamiętać że podręcznik w edukacji wczesnoszkolnej należy do podstawowych narzędzi pracy nauczyciela i ucznia. Powinien współdziałać z tzw. *żywym nauczaniem* i całym zestawem innych środków dydaktycznych. Czy rzeczywiście jest tak przez ostatnie dziesięć lat?

Transformacja ustrojowa lat dziewięćdziesiątych w Polsce, a także reforma edukacyjna z 1999 roku stworzyła dużą szansę wydawnictwom. Zaczęło pojawiać się coraz więcej podręczników zatwierdzonych przez Ministerstwo i dopuszczonych do użytku szkolnego. Takie zatwierdzenie powinno gwarantować jakość tych podręczników, ale czy tak rzeczywiście jest? Aktualnie ta lista jest dość długa. Nauczyciele, w tym także nauczyciele klas I- III, mogą wybierać, przebierać – rodzi się jednak pytanie: Czy mają dokładne rozeznanie rynku podręczników? Czy nie stracili przypadkiem już orientacji, co i gdzie zostało wydane? Często jedynie prężnie działające (bogatsze) wydawnictwa docierają z promocją, a to wcale nie musi przekładać się na dużą wartość tych podręczników. Jeden z ostatnich ministrów ograniczył nieco liczbę podręczników do wyboru przez jedną szkołę i stworzył możliwość wyboru podręcznika spośród jedynie dwóch, trzech. Chciał w ten sposób nieco obniżyć koszty pakietów edukacyjnych. Trudno jednak dociec jaki jest tego efekt, gdyż obecny minister chyba o tym zagadnieniu nieco zapomniał. Myśli raczej o (kolejnej!!!) modernizacji polskiej szkoły!

Koncepcja podręcznika dla ucznia klas I – III – kontrowersje, rozterki i niepokoje

Budowa podręcznika dla ucznia klas I – III jest w tej chwili dwojaka. Najczęściej jest to podręcznik zintegrowany, w którym występują treści ze wszystkich obszarów edukacyjnych (polonistycznego, matematycznego, środowiskowego, plastycznego, technicznego, muzycznego i zdrowotno – ruchowego). Taka budowa występuje głównie w pakietach edukacyjnych dla uczniów klasy pierwszej. Natomiast klasa druga i trzecia ma w niektórych pakietach wydzieloną część matematyczną.

Wśród wielu opinii na temat współczesnych podręczników rysują się dwa stanowiska: pozytywne, pokazujące nową szansę dla podręczników i negatywne ukazujące zagrożenia i niepokoje.

Współczesne podręczniki mają obecnie piękną edytorską formę, wzbogacone zostały w obszerną i urozmaiconą dydaktyczną obudowę, uczeń zamiast kilku podręczników w tornistrze nosi jeden- zintegrowany, teksty w podręcznikach skierowane są do ucznia, nauczyciela, a także rodzica. To tylko niektóre plusy (nie zawsze jednak jest to takie oczywiste jak pokazuje praktyka szkolna). Ponadto nauczyciel edukacji początkowej wybierając podręcznik musi wykazać się odwagą podjęcia tej decyzji i to on faktycznie ponosi odpowiedzialność za efekty realizowanej przez siebie koncepcji edukacyjnej. Wykaz zalet podręczników jest zapewne niepełny ale nie brak również spostrzeżeń krytycznych, wątpliwości.

Ze względu na ramy opracowania ograniczymy się w tym zakresie jedynie do podręcznika dotyczącego edukacji matematycznej:

- Współcześnie w teorii preferuje się matematykę realistyczną jak zauważa H. Siwek „związaną z konkretnymi realnymi, prawdopodobnymi sytuacjami, konstruującą pojęcia abstrakcyjne na podstawie sytuacji wziętych z życia, rozwiązującą problemy, jakie stwarza otaczająca rzeczywistość”(2006, s.71-72). Jednak jak pokazuje analiza niektórych podręczników zdarzają się w nich zadania pseudorealistyczne, a nawet pseudomatematyczne.

- Konstrukcja ćwiczeń matematycznych często wyklucza możliwość by dziecko doszło do wiedzy samodzielnie. W podręcznikach zintegrowanych czy też nawet w wydzielonych częściach do nauczania matematyki, przeważają zadania z narzuconym sposobem rozwiązania. Dzieci dostają gotowy przepis, a „uczeń nie jest prowadzony w tym procesie za rękę” jak piszą D. Klus- Stańska i M. Nowicka „uczeń jest po prostu na rekach niesiony ku celowi (2005, s. 112). Szkoda, że liczba kart pracy uniemożliwia samodzielną pracę ucznia.
- Wspomniane autorki uważają, że konstrukcja podręczników skoncentrowana jest głównie na aspekcie technicznym kompetencji matematycznych, ich zawartość paraliżuje myślenie dzieci zamiast je stymulować, a każdy ruch jest wyreżyserowany (D. Klus- Stańska i M. Nowicka 2005, s. 177-178). No i trudno się z Autorkami nie zgodzić. Wielu podręcznikach mechanizacja czynności uczniów jest tak daleka, że dzieci skupiają się raczej na odkodowaniu poszczególnych kroków, a nie na myśleniu. Zastanawiają się jedynie co wpisać, a czasami dokładnie widzą - czy należy wpisać liczbę jednocyfrową czy dwucyfrową - bo liczba kretek dokładnie im to wskazuje, lub strzałka pokazuje miejsce. Nawet udzielenie odpowiedzi pełnym zdaniem jest często niemożliwe, wystarczy jedynie wpisać liczby.
- Niektóre podręczniki opracowane są w taki sposób, że funkcje podręcznika pełnią „karty pracy”. Nie wydaje się nam, by ta swoista „kartkomania” miała coś wspólnego z nowoczesnością i efektywnością edukacji matematycznej
- Niepokój budzi także podręcznik, w którym wstępują wszystkie rodzaje edukacji. Często podręczniki takie w bardziej lub mniej uświadomiony sposób preferują któryś z obszarów edukacyjnych. Czy taki podręcznik z nazwy „zintegrowany” nie wypacza właśnie tej idei?
- Z własnych obserwacji poczynionych na praktykach śródrocznych naszych studentów możemy stwierdzić, że nauczyciel bardzo często traktuje podręcznik (a jeszcze częściej karty pracy do niego dołączone) jako jedyne źródło wiedzy. Ponadto nauczyciele bardzo często nie realizują (nie interpretują programu nauczania, a realizują podręcznik przeprowadzając zajęcia zgodnie ze scenariuszami zajęć dołączonymi do podręcznika.
- Kontrowersje budzi sposób wyboru podręcznika przez nauczyciela. Wybory podręczników są przypadkowe. Najczęściej jest to kilkuminutowe przejrzenie pakietu po prelekcji przedstawiciela wydawnictwa. Często jednak ta prezentacja nie ma nic wspólnego z doradztwem metodycznym. Przyznajemy, zdarzają się spotkania z autorami podręczników podczas, których prezentują koncepcję podręcznika, wyjaśniają, przyjmują uwagi krytyczne i itp.

Zakończenie

Lista zarzutów mogłaby być jeszcze dłuższa, sadzimy jednak, że warto się i nad tymi przedstawionymi głęboko zastanowić. Co zatem zmienić? Jakie znaleźć optymalne rozwiązania? Czy edukację matematyczną łączyć w jedną całość (w jeden zintegrowany podręcznik) z poszczególnymi obszarami edukacyjnymi czy wydzielić?

A może warto zastanowić się nad myślą J. Holta, który wspominał swą praktykę nauczycielską i pisał: „Byłem nauczycielem pełnym inwencji i nowych pomysłów, obmyślałem świetne plany lekcji, pokazy, pomoce dydaktyczne mające poprawić motywację klasy – cały ten kram. Dopiero stopniowo i z dużym bólem - bo wiercie mi, to było bolesne – przekonałem się, że dzieci zaczęły uczyć się więcej dopiero wtedy, kiedy ja zacząłem mniej nauczać (cyt. za: R. Meighan, 1996, s. 154).

Literatura

1. KLUS STAŃSKA D., NOWICKA M. [2005] *Sensy i bezsensy edukacji wczesnoszkolnej*. Warszawa WSiP.
2. KUPISIEWICZ Cz. *Podstawy dydaktyki ogólnej*. Warszawa PWN 1978.
3. MEIGHAN R. *Zasady rekonstrukcji edukacji w ujęciu Johna Holta*. „Forum Oświatowe nr 1-2. 1996.
4. SIWEK H. *Nowe kierunki w edukacji matematycznej dziecka*. W: *Wczesna edukacja dziecka*. Pod redakcją J. Bałachowicz, A. Kowalskiej, Warszawa WSP TWP 2006.
5. SKRZYPCZAK J. *Konstruowanie i ocena podręczników*. Poznań-Radom, Wyd. Instytutu Technologii Eksploatacji, 1996.

Kontaktні адреса

Dr Jolanta Seidel
Uniwersytet Kazimierza Wielkiego
Instytut Pedagogiki
85-064 Bydgoszcz
ul. Chodkiewicza 30
e-mail: joab53@poczta.onet.pl

Dr Maria Sobieszczyk
Uniwersytet Kazimierza Wielkiego
Instytut Pedagogiki
85-064 Bydgoszcz
ul. Chodkiewicza 30
e-mail: sobieszm@poczta.onet.pl

DYNAMICKÉ TESTOVANIE MATEMATICKÝCH SCHOPNOSTÍ DETÍ ZO SOCIÁLNE ZNEVÝHODNENÉHO PROSTREDIA – POHĽAD PRVÝ

Iveta SCHOLTZOVÁ, Edita ŠIMČÍKOVÁ

Abstrakt

V rámci riešenia grantového projektu APVV *Dynamické testovanie latentných učebných kapacít detí zo sociálne znevýhodneného prostredia* bolo realizované pilotné testovanie matematických schopností žiakov. Cieľom testovania bolo overiť vhodnosť matematického zamerania navrhnutých úloh a systém edukačnej inštrukcie k jednotlivým úlohám, monitorovať reakcie žiakov na formulácie úloh a spôsob riešenia úloh žiakmi. Analýza výsledkov ukázala nevyhnutnosť realizovať korekcie v súčasnom návrhu testovacieho nástroja v dvoch smeroch: výber vhodných tematických okruhov z matematiky pre testovanie a precizovanie edukačných inštrukcií k jednotlivým úlohám.

DYNAMIC TESTING OF MATHEMATICAL ABILITIES OF CHILDREN FROM SOCIALLY DISADVANTAGED ENVIRONMENT – FIRST VIEW

Abstract

Within APVV grant scheme project of *Dynamic testing of latent learning capacities of children from socially disadvantaged environment* a pilot testing has been carried out focusing on pupils' mathematical abilities. Its aim was to verify the appropriateness of math-based approach to designing both testing items and the system of instructional mediation for solving particular tasks. Pupils' reaction to the formulation of tasks and pupils' solutions were monitored. Subsequent analysis has indicated inevitability of correcting and redesigning the test draft in two ways: selecting math thematic areas more suitable for testing, and more precise elaboration of task's instructional mediation.

Východiská predvýskumu

Na Prešovskej univerzite v rámci riešenia grantového projektu (Agentúra na podporu výskumu a vývoja MŠ SR) *Dynamické testovanie latentných učebných kapacít detí zo sociálne znevýhodneného prostredia* prebieha výskum, v procese ktorého bude vytvorený a na slovenskej populácii detí zo sociálne znevýhodneného prostredia overený originálny diagnostický nástroj. Jeho zámerom bude testovanie latentných učebných potencialít žiakov v oblasti matematických a komunikačných schopností. Diagnostický nástroj bude vytvorený za účelom testovania zóny najbližšieho vývinu žiaka, t.j. rozsahu schopností nachádzajúcich sa medzi doposiaľ skrytými potencionálnymi schopnosťami žiaka a schopnosťami evidentnými v podobe súčasného výkonu. Teoretické východiská pre dynamické testovanie boli formulované

v príspevkoch Kovalčíková, Džuka (2007) a Džuka, Kovalčíková (2008). Determinanty z pohľadu matematiky sú uvedené v príspevkoch Prídavková, Tomková (2008) a Šimčíková (2007).

Pre testovanie matematických schopností a tvorbu úloh bolo vymedzených šesť tematických okruhov:

1. Geometrické predstavy.
2. Vytváranie súborov a triedenie.
3. Porovnávanie a usporiadanie.
4. Číselné predstavy.
5. Počtové operácie.
6. Kombinatorika a postupnosti.

K jednotlivým testovacím doménam boli vytvorené návrhy úloh spolu so súborom edukačných inštrukcií. Pre pilotné testovanie bolo vyselektovaných päť úloh.

1. úloha – číselné predstavy (číselné postupnosti).

Sledované matematické javy: doplniť neúplný klesajúci číselný rad, nájsť pravidlo pre vytvorenie postupnosti, identifikovať zápis čísla v desiatkovej sústave, použiť odčítanie pre doplnenie ďalších členov postupnosti.

2. úloha - geometrické útvary.

Sledované matematické javy: vytvoriť množinu prvkov danej vlastnosti, dichotomicky triediť objekty podľa veľkosti, rozlišovať rovinné geometrické útvary, uplatniť konjunkciu dvoch výrokov, správne použiť kvantifikátor.

3. úloha - propedeutika delenia prirodzených čísel.

Sledované matematické javy: deliť na rovnaké časti, vytvoriť štruktúrovaný model prirodzeného čísla, aplikovať kvantifikátory.

4. úloha - orientácia v priestore (dvojrozmernom).

Sledované matematické javy: orientovať sa v rovine na základe pojmov vpravo, vľavo, hore, dole, určiť polohu objektu vzhľadom na iný objekt, uplatniť konjunkciu troch výrokov.

5. úloha - porovnávanie prirodzených čísel a propedeutika odčítania.

Sledované matematické javy: vytvoriť štruktúrovaný model prirodzeného čísla, porovnať počet prvkov v dvoch množinách využitím простého zobrazenia (zobrazenie množiny do množiny, resp. z množiny na množinu), prezentovať výsledok porovnania (viac, resp. menej), určiť rozdiel.

Cieľom pilotného testovania bolo:

- overiť vhodnosť matematického zamerania navrhnutých úloh,
- overiť systém pre tvorbu súboru edukačných inštrukcií k jednotlivým úlohám,
- monitorovať reakcie žiakov na formulácie úloh,
- monitorovať spôsob riešenia úloh žiakmi.

Metodika predvýskumu

Vzorka predvýskumu

Vzorku pilotného testovania tvorili traja žiaci zo sociálne znevýhodneného prostredia, ktorí pred vstupom na základnú školu nenavštevovali predškolské zariadenie: Patrik (9 rokov - 3. rok školskej dochádzky), Lukáš (8 rokov - 1. rok školskej dochádzky), Roman (7 rokov - 1. rok školskej dochádzky). Pre monitoring kognitívnych procesov pri riešení testových úloh boli do predvýskumu zaradení aj traja žiaci 2. ročníka tej istej školy z majoritnej populácie (nebola u nich komunikačná bariéra na zdôvodnenie riešenia, aj keď mali poruchy reči).

Metódy predvýskumu

Metódou predvýskumu bol kognitívny test tvorený úlohami s edukačnými inštrukciami a participačné pozorovanie. Počet testových položiek bol 10 (5 testových úloh a 5 analogických úloh). Ku každej úlohe mali žiaci pripravené pomôcky, ktoré slúžili na priamu manipuláciu pri prvotnom riešení zadania, ale aj pri edukačných inštrukciách.

Realizácia predvýskumu

Predvýskum bol realizovaný vo vyučovacom čase. Na testovanie žiakov boli vytvorené priaznivé podmienky v školskej knižnici. Pred samotným testovaním administrátor nadviazal s respondentom kontakt. Testovanie prebiehalo individuálne, administrátor zadával úlohy postupne vo verbálnej rovine (s použitím pomôcok), úlohou respondenta bolo odpovedať slovne, ukázať na obrázku, alebo vyriešiť úlohu manipulačne. Žiaci druhého ročníka mali svoj postup riešenia vysvetliť. Čas potrebný na riešenie bol v rozpätí 25 – 30 minút pre jedného respondenta.

Na monitorovanie priebehu predvýskumu bol urobený videozáznam. Priebeh testovania bol zaznamenávaný do pozorovacích hárkov zostavených pre každú testovú položku, napr. etapa vyriešenia úlohy, časový rozsah riešenia, resp. iné dôležité údaje.

Spracovanie výsledkov predvýskumu

Výsledky predvýskumu boli spracované vo forme tabuliek, každá testová položka a každý respondent testovania osobitne. Dvojica tabuliek predstavuje výsledky riešenia úloh z tej istej matematickej oblasti – testová a analogická úloha.

Záver z predvýskumu

Riešenie dynamického testu

Úloha na číselné predstavy (číselné postupnosti) nebola vyriešená ani jedným respondentom pri použití všetkých edukačných inštrukcií. Žiaci mali tendenciu vytvárať nie zostupný, ale vzostupný číselný rad. Neidentifikovali zákonitosť, podľa ktorej bol číselný rad vytvorený. Neaplikovali operáciu odčítania.

Úlohu o geometrických útvaroch vyriešili všetci respondenti bez použitia edukačných inštrukcií. Žiaci správne rozlišovali geometrické útvary, vytvorili súbor objektov požadovanej vlastnosti, uplatnili konjunkciu troch výrokov, adekvátne vnímali použitý kvantifikátor.

Propedeutika delenia prirodzených čísel bola zvládnutá každým respondentom, u jedného respondenta bolo nutné zdôrazniť kvantifikátor. Žiaci prirodzeným spôsobom rozdelili dané objekty do rovnakopočetných skupín.

Orientácia v rovine nebola respondentmi zvládnutá. Problémom neboli pojmy hore, dole, vpravo, vľavo, problémom bolo uplatnenie konjunkcie, t. j. *vpravo hore a zároveň vľavo od ...*.

Úloha na porovnávanie prirodzených čísel a propedeutiku odčítania bola čiastočne vyriešená dvoma respondentmi. Žiaci s odstupňovanou pomocou (použité všetky edukačné inštrukcie) zvládli vyjadrenie výsledku porovnania (vzťah viac resp. menej), ale neboli schopní verbálne prezentovať určenie rozdielu (odpoveď na otázku „o koľko“).

Pozorovanie priebehu testovania

Respondenti nemali problém porozumieť formulácii úloh z jazykového hľadiska. Komunikácia bola prirodzená a plynulá.

Žiaci pri riešení často nepostupovali systematicky (úloha na orientáciu v rovine), ich riešenia boli uponáhľané, nepremyslené, náhodné, často menili svoje riešenie.

Uplatnenie manipulácie s pomôckami pri riešení úloh sa ukázalo ako veľmi vhodné, pomôcky boli výrazným prostriedkom motivácie aj aktivizácie detí a zároveň zabezpečili „prirodzené“ spôsoby riešenia úloh.

Testovanie bolo náročné na administráciu - komunikácia s respondentom, príprava pomôcok pre jednotlivé úlohy, zaznamenávanie údajov z pozorovania, zhotovovanie videozáznamu.

Dynamické testovanie je náročné na dodržanie časového limitu riešenia testu vzhľadom na psychohygienické hľadisko (koncentrácia pozornosti).

Neočakávané reakcie respondentov viedli k difúzii edukačných inštrukcií.

Matematický obsah úloh bol zvolený primerane veku, ale nie schopnostiam žiakov. Ako problematické sa ukázalo stanoviť náročnosť úlohy tak, aby na jednej strane bola nad rámec matematických schopností testovaného žiaka, ale aby sa súčasne žiak v procese dynamického testovania naučil riešiť danú úlohu. Žiacke riešenia poskytli mnoho podnetov pre ďalšie skúmanie.

Analýza výsledkov testovania ukázala nevyhnutnosť realizovať korekcie v súčasnom návrhu testovacieho nástroja v dvoch smeroch:

- výber vhodných tematických okruhov z matematiky pre testovanie,
- precizovanie edukačných inštrukcií k jednotlivým úlohám.

Je nevyhnutné vytvárať zásobník ďalších testových položiek a postupne ich overovať v edukačnej realite.

Literatura

1. DŽUKA, J. KOVALČÍKOVÁ, I. (2008, v tlači) Dynamické testovanie latentných učebných schopností. *Československá psychologie*.
2. KOVALČÍKOVÁ, I., DŽUKA, J. Dynamic testing and assessment of latent learning capacities. *Annales Paedagogicae Nova Sandes –Presoves I.* str.29-35. Nowy Sacz 2007. ISBN 978-83-60822-27-2.
3. PRÍDAVKOVÁ, A., TOMKOVÁ, B. Determinanty dynamického testovania matematických schopností detí zo sociálne znevýhodneného prostredia. (*V tomto zborníku.*)
4. ŠIMČÍKOVÁ, E. Príprava žiakov nultého ročníka základnej školy na ich kontinuálnu matematickú edukáciu. *Inovácia v matematickej príprave žiakov na 1. stupni ZŠ. Zborník príspevkov z vedecko-odbornej konferencie konanej 19.10.2007 v Trnave.* str. 102-108. Trnava 2007. ISBN 978-80-8082-158-6.

Príspevok vznikol s podporou APVV MŠ SR (APVV-0073-06).

Kontaktní adresa

*doc. RNDr. Iveta Scholtzová, PhD., PaedDr. Edita Šimčíková
Prešovská univerzita, Pedagogická fakulta, Katedra matematickej edukácie
17.novembra 1, 081 16 Prešov, Slovensko
Telefon: +421 51 7470541 , +421 51 7470543
E-mail: scholtzi@unipo.sk, editasim@unipo.sk*

TRUDNOŚCI STUDENTÓW PEDAGOGIKI Z MATEMATYKĄ

Helena SIWEK

Streszczenie

Przygotowanie studentów pedagogiki do nauczania matematyki wymaga:

1. pokonania przez nich lęku przed matematyką,
2. zmiany nastawienia do matematyki jako zbioru algorytmów do obliczeń na odkrywanie i tworzenie pojęć i praw matematycznych.

Artykuł omawia trudności z taką realizacją przedmiotu „edukacja matematyczna dzieci”, która dąży do wywołania takich zmian.

MATHEMATICAL DIFFICULTIES FACED BY STUDENTS OF PEDAGOGY

Abstract

Preparing students of pedagogy to teaching mathematics requires:

1. overcoming the fear of mathematics,
2. changing the attitude towards mathematics seen as calculations into exploring and creating mathematical ideas and rules.

The difficulties concerning such implementation of the subject called “mathematical education of children” are discussed in the article.

1. Przygotowanie studentów do kształcenia matematycznego dzieci

Przygotowanie matematyczne na studiach pedagogicznych jest niewystarczające w zakresie nowoczesnych treści dotyczących tego przedmiotu, ale także dyscyplin pokrewnych. W związku z globalizacją, integracją wiedzy, rozwiązywaniem problemów interdyscyplinarnych, to nie może być wąska wiedza i ograniczona tylko do pojęć, faktów i praw matematycznych. Nie można w krótkim czasie przygotować studentów, którzy w większości nie lubią matematyki, wykazują rażące braki, nie rozumieją specyfiki elementarnych pojęć i rozumowań z tego przedmiotu, do odpowiedzialnej pracy z dziećmi, wprowadzającej je w myślenie i aktywność matematyczną. Problem jest o tyle trudny, bo wymaga nie tylko (znowu mówiąc skrótowo) „nauczenia” studentów pewnych rzeczy z matematyki, ale oduczenia i odzwyczajenia od bezmyślnego operowania liczbami, schematycznego rozwiązywania zadań tekstowych, usilnej dążności do stosowania regułek itd. Przypomnieć tutaj można znaną myśl Seneki: *Oducza się umysł powoli, czego się uczył długo*. Pamiętajmy o tym, że absolwent wczesnoszkolnej edukacji zintegrowanej-pedagog, nie będzie uczył pedagogiki (która na jego kierunku zajmuje przeważającą część pensum godzin), ale będzie kształcił polonistycznie, matematycznie itd. w formie zintegrowanej. I do tego powinien być bardzo dobrze przygotowany.

Francuski matematyk, fizyk, filozof i pisarz B. Pascal, żyjący w XVII wieku twierdził, że mało ludzi zajmuje się człowiekiem, więcej matematyką. Wyrażał w ten

sposób postulat naukowego zajmowania się wychowaniem i nauczaniem, miejscem człowieka w świecie, a nie tylko rozwiązywaniem problemów matematycznych. Teraz, w odniesieniu do omawianego kierunku studiów, trzeba postawić tezę odwrotną: powinno być więcej dydaktyki języka polskiego, dydaktyki matematyki i pozostałych przedmiotów, a mniej nauk o człowieku, mniej teoretycznej pedagogiki. Rozwój teorii pedagogicznych i psychologicznych zaowocował mnogością subdyscyplin, które powinien znać zawodowy pedagog, ale nie musi ich znać nauczyciel-specjalista od edukacji wczesnoszkolnej. Natomiast powinien znać np. przemiany w koncepcjach kształcenia matematycznego, wiedzieć, że przez stulecia panowało w szkołach nauczanie mechanistyczne, które wymagało od nauczyciela wyposażenia uczniów w pamięciową wiedzę, mechanistyczne stosowanie regulek i algorytmów, nauczanie odtwarzania z pamięci faktów i określeń i umieć się do tego ustosunkować i to zmieniać. W pewnej mierze taki styl nauczania, ukierunkowany na wiedzę encyklopedyczną, w wielu szkołach istnieje do dziś. Duży odsetek nauczycieli pracujących w klasach I-III nie rozwija myślenia uczniów, nie uczy ich stawiania pytań, dostrzegania i rozwiązywania problemów, tylko ćwiczy w wykonywaniu rachunków i rozwiązywaniu schematycznych zadań, dających się zaszufladkować do określonego typu, wymagających łatwo dostępnej sprawności. W dobie technicyzacji życia i społeczeństwa informacyjnego i informatycznego nie do przecenienia jest znajomość matematyki, i to mądrej matematyki, ukierunkowanej na umiejętność odkrywania i tworzenia. Kandydat na nauczyciela już na egzaminie wstępnym powinien wykazać się umiejętnością ścisłego myślenia oraz logicznego wyciągania wniosków, być świadomym, że matematyka jest jednym z podstawowych przedmiotów w jego wykształceniu i nie dziwić się, że na studiach są przedmioty z nią związane. Niestety na studiach pedagogicznych te przedmioty występują w minimalnym zakresie.

2.Trudności studentów z matematyką

W ramach „edukacji matematycznej w systemie integralnym” student powinien zapoznać się z teoretycznymi podstawami procesu kształtowania pojęć matematycznych, poziomów rozumienia pojęć, problematyką myślenia matematycznego i różnych rodzajów rozumowań, typologią zadań tekstowych i metod oraz etapów ich rozwiązywania, a także z projektami dydaktycznymi bazującymi na sytuacjach realistycznych i wprowadzających takie pojęcia matematyki elementarnej, jak: liczba naturalna, system dziesiętkowy, działania na liczbach naturalnych, proste figury geometryczne, mierzenie, przekształcenia, zadania tekstowe. Studenci mają poznać nie tylko „czego” mają uczyć, ale także „jak” mają uczyć.

Celem zajęć powinno być przygotowanie ich do nowoczesnego, integralnego systemu nauczania, w którym matematyka stanowi jeden z aspektów bogatej rzeczywistości poznawanej przez dziecko. Równocześnie jednak, niezależnie od systemu edukacyjnego, należy zwracać uwagę, że matematyka musi zachować swoją specyfikę i nie powinna być sprowadzana do rachunków. Konieczne jest też, by realizowano ją tak, aby przyczyniać się do wszechstronnego rozwoju uczniów, być w zgodzie z wynikami badań dydaktycznych i pedagogicznych, stwarzać dobre podstawy do nauczania na wyższych poziomach kształcenia.

W ostatnich latach obserwuje się regres w umiejętnościach matematycznych studentów pedagogiki, kierunku wczesnoszkolnej edukacji zintegrowanej. Wynika to zapewne z różnych źródeł - ogólne obniżenie poziomu matematyki w szkołach, mała liczba tygodniowo lekcji matematyki na każdym etapie edukacji, brak matematyki (obowiązkowo) na maturze, wreszcie zmarginalizowanie przedmiotu edukacja

matematyczna w systemie integralnym na studiach. Na podstawie obserwacji zajęć dydaktycznych z tego przedmiotu, kolokwii i egzaminów można sformułować następujące spostrzeżenia:

- Studenci pojmują matematykę jako rachunki. Nie rozumieją głęboko pojęć, których mają w przyszłości uczyć. Nie odróżniają sprawności rachunkowej od znaczenia i sensu takich elementarnych pojęć matematycznych, jak np. liczba naturalna, działania arytmetyczne, pozycyjny system dziesiętkowy, figury geometryczne, miara, ułamki, liczby całkowite, opisy definicyjne, prawa, algorytmy.
- Nie znają języka matematycznego, popełniają w komentarzach do rozwiązań zadań rażące błędy: mylą np. sześcian i sześciokąt, równość z równaniem, uważają, że dzielenie jest przemienne, dopisują działania uzyskując błędne równości typu: $6+12=18:3=6$, nie potrafią obliczyć obwodu prostokąta pisząc np. $\text{obwód}=4 \cdot 3^2$, $\text{obwód}=4\alpha^2$, mylą prawa z algorytmami pisząc np. o algorytmie łączności dodawania, prawie rozdzielności dodawania względem odejmowania.
- Nie potrafią rozwiązać bardziej złożonych zadań tekstowych z klas początkowych sposobem ucznia; nieraz w ogóle nie potrafią rozwiązać zadań poprawnie-liczą byle co, byle policzyć, byle wykorzystać dane, które wystąpiły w zadaniu. Wobec zadań z treścią tracą zdrowy rozsądek, a negatywne emocje z przeszłości blokują lub ograniczają ich myślenie. Na przykład w zadaniu: *Tata Jacka pożyczył 3000zł z banku. Począwszy od kwietnia spłaca raty po 432zł. W którym miesiącu zapłaci ostatnią ratę i ile ona będzie wynosić?* wystąpiło mnóstwo tego typu błędów. Niektórzy stwierdzali: „nie umiem rozwiązać” lub „nie ma dzielenia przez liczbę trzycyfrową”, co w odniesieniu do klasy III jest prawdą, ale nie powinno to przeszkodzić w rozwiązaniu zadania np. przez dodawanie rat w kolejnych miesiącach czy szacowanie i sprawdzanie przez mnożenie, lub metodą prób i błędów, lub za pośrednictwem interpretacji kolejnych spłat na osi liczbowej, i w końcu po jednym z tych sposobów - wykonaniu odpowiedniego odejmowania.
- Nie czytają tekstów matematycznych, a także publikacji z dydaktyki matematyki ze zrozumieniem. Nie podchodzą do zadań problemowo, nie umieją szacować, a wręcz dziwią się na widok zadań wymagających szacowania i dyskusji, a nie zamkniętego i jednoznacznego wyniku; mają trudności z matematyzacją sytuacji realistycznych, wykazując przyzwyczajenie do schematycznych i jednoznacznych rozwiązań. Wydaje im się, że istnieją najlepsze i ustalone rozwiązania dydaktyczne, niechętnie podejmują dyskusję i rozważania nad różnymi możliwościami w projektowaniu dydaktycznym.
- Uczą się najczęściej pamięciowo „wkuwając” teorię; studenci najchętniej „klepią” na pamięć określenia, zasady, przywiązują się do „uczonych” sformułowań, natomiast w dużym stopniu nie widzą i nie potrafią stosować teorii w konkretnych sytuacjach. Jeśli np. należało na kolokwium zinterpretować cztery etapy rozwiązania zadania tekstowego (Polya), rozwiązując konkretne zadanie i równolegle powołać się na teorię, to najczęściej wymieniali tylko nazwy etapów komentując, że „nie spodziewali się zadań”.
- Boją się matematyki, są niechętnie nastawieni do tego przedmiotu, z lękiem podejmują działania w ramach przedmiotów wymagających odwołania do matematyki (tylko elementarnej). Aby ośmielić studentów, zmierzać do tego by polubili i poznali matematykę, której mają uczyć, trzeba byłoby powoli naprawiać, uściślać, pogłębiać wiedzę z matematyki elementarnej i ukazywać w działaniu,

eksperymentowaniu, obserwowaniu itp. ciekawsze sposoby poznawania matematyki niż wyniesione z doświadczenia szkolnego.

- Nie mają żadnych (lub bardzo małe) doświadczeń w pracy z dziećmi. Wśród studentów jest coraz mniej nauczycieli, w większości przypadków są to osoby tuż po maturze, które nie mając praktyki w szkole nie rozumieją potrzeb dzieci, nie rozumieją trudności z realizacją materiału. Wielu więc zabiegów wymaga takie przygotowanie studentów, aby skutkowało dobrym rozumieniem i operowaniem pojęciami matematycznymi, gdy już podejmą pracę w szkole. Nieraz też wydaje im się, że uczyć małe dzieci jest bardzo łatwo; przecież każdy umie liczyć. Nie rozumieją, że matematyka ze szkoły średniej nie przydaje się jako podstawa do nauczania matematyki w klasach początkowych, że do tego trzeba dobrze zrozumieć i poznać fenomenologię liczb naturalnych, ułamków, miary, figur geometrycznych płaskich i przestrzennych itd., i że kształcenie matematyczne to nie uczenie rachunków i rozwiązywania schematycznych zadań, ale przede wszystkim rozwijanie logicznego i matematycznego myślenia.

3. Analogie między trudnościami uczniów i studentów

Studenci pedagogiki mają ogromne trudności w stosowaniu pojęć i rozumowań matematycznych w interpretacji teorii w konkretnych sytuacjach. Tę umiejętność powinni osiągnąć w czasie własnej aktywności, w szczególności nauczyć się analizować własne błędy, ale także błędy i trudności dzieci z matematyką. Okazuje się, że występuje analogia, szczególnie paralelizm między błędami popełnianymi przez studentów i przez uczniów. Zasygnalizujemy ten problem na przykładzie jednego z najważniejszych pojęć jakim jest pozycyjny system dziesiętkowy.

Dość dużo studentów, mając podać na sprawdzianie pisemnym pięć pierwszych rzędów w układzie dziesiętkowym podawało je błędnie, a mianowicie: M, T, S, D, J lub JM, JT, JS, JD, J. Z zapisu tego wynikało, że na piątym miejscu występują miliony. Dostrzeżenie błędu nastąpiło dopiero po ilustracji na konkretnych przykładach odczytywania liczby typu 45 328. W czasie innego kolokwium zapytaliśmy więc o wyjaśnienie na czym polega błąd w zapisie pięciu pierwszych rzędów w dziesiętkowym systemie: M, T, S, D, J, podanie poprawnych rzędów i omówienie zasady konstrukcji kolejnych rzędów w systemie dziesiętkowym. Okazało się, że bardzo mało studentów potrafiło wyjaśnić i poprawić błąd, a w propozycjach rozszerzenia tabeli dziesiętkowej pojawiły się przedziwne zapisy, na przykład:

- 1) MT, MS, MJ, TS, TD, TJ, S, D, J
- 2) J, D, SJ, SD, S, TJ, TD, T, MJ, MD, MS
- 3) J, D, S, SJ, SD, T, TJ, TD, TS, M, MJ, MD, MS, MT.

Odpowiedzi te świadczą o zdegenerowanym formalizmie, o stosowaniu symboliki literowej bez odwoływania się do jej znaczeń. Błędy te pokazują, że studenci beztrudno używają symboli i tworzą nonsensowne zapisy- w pierwszym przykładzie odpowiednio na 4., 5., i 6. miejscu wystąpiły tysiące jedności (zamiast jedności tysięcy JT), tysiące dziesiątek (zamiast dziesiątek tysięcy DT) i tysiące setek (zamiast setek tysięcy ST). Podobne nonsensy występują na dalszych miejscach – miliony jedności (MJ), miliony setek (MS), i miliony tysięcy (MT), zamiast jedności milionów (JM), dziesiątek milionów (DM) i setek milionów (SM). Interpretując znaczenie terminu „miliony jedności”, studenci zauważyli, że chodziłoby tutaj np. o miliony trójek, piątek, siódemek itp., a nie o trzy, pięć, siedem milionów. W zapisie 2) i 3) nie tylko odwrócono kolejność pozycji umieszczając jedności po lewej stronie, ale używano byle jak symboli na oznaczenie kolejnych pozycji. Wyraźnie wystąpiły tutaj, ale i również w

innych sytuacjach, trudności z przekraczaniem progów, ze zrozumieniem, że każde trzy kolejne rzędy (pozycje) tworzą inną grupę.

Trudności studentów z pojęciem dziesiętkowego systemu pozycyjnego na poziomie symbolicznym (operującym literami) są podobne do trudności uczniów na poziomie konkretnym, podczas operowania dużymi liczbami. Uczniowie nie potrafili np. podpisać co 200 000 punktów na osi zaczynającej się od 400 000. Trudności tkwiły także w zaznaczeniu miliona, np. zapominano o dodaniu jednego zera na końcu liczby lub pisano ich za wiele. Wśród prac znajdowały się takie, w których po milionie od razu pojawiały się jego wielokrotności. Tak więc zamiast 1 200 000, 1 400 000 i 1 600 000 uczniowie pisali 2 000 000, 3 000 000, 4 000 000. Również wystąpiły błędne podpisy zamiast: 460 000, 580 000, 640 000, 740 000, 1 620 000 uczniowie pisali: 400 600, 500 800, 600 400, 700 400, 1 600 200.

Analiza błędów i ich rozumne poprawianie ma ogromne znaczenie w kształceniu matematycznym uczniów i studentów. Tak na temat roli błędów pisał 70 lat temu S. Szuman, a co współcześnie też jest jak najbardziej aktualne: „... błędy myślenia dziecka mogą nam, w pewnej mierze, pozwolić wnikać w tajniki jego myślenia i zapoznać nas z jakościowym rozwojem myślenia dzieci szkolnych. Odpowiedź całkiem poprawna na dany test wykazuje tylko sprawność myślenia dziecka, ale nie pozwala odgadnąć jaką drogą myślową i jakimi sposobami myślenia dziecko wynik poprawny osiągnęło.”

Literatura

1. Cackowska M., *Co dalej z edukacją wczesnoszkolną?* w: *Współczesne tendencje rozwoju pedagogiki wczesnoszkolnej*, (red.) E. Kozak-Czyżewska, D. Zdybel, B. Kępa, MAC, Kielce 2005.
2. Cooper J.M.(red.), *Classroom Teaching Skills*, Lexington, Massachusetts-Toronto 1982.
3. Karaś A. *Operatywne rozumienie liczb naturalnych przez uczniów szkoły podstawowej*, praca mgr, archiwum AP, Kraków 2007.
4. Polya G., *Jak to rozwiązać?*, Wyd. Nauk. PWN, Warszawa 1993.
5. Siwek H., *Kształcenie zintegrowane na etapie wczesnoszkolnym. Rola edukacji matematycznej*, Wyd. Nauk. AP, Kraków 2004.
6. Szuman S., *Rozwój myślenia u dzieci w wieku szkolnym*, Książnica – Atlas, Lwów Warszawa 1938.

Kontakt i adres

Helena Siwek
Instytut Matematyki AP
ul. Podchorążych 2
30-084 Kraków
E-mail: smsiwek@cyf-kr.edu.pl

TVOŘENÍ ÚLOH JAKO JEDNA Z CEST ROZVÍJENÍ PROFESNÍ KOMPETENCE UČITELŮ

Marie TICHÁ

Abstrakt

Potřeba nabývat matematické vzdělání roste. To klade vysoké nároky na profesní kompetence učitelů. V tomto příspěvku je naznačeno tvoření úloh jako jedna z cest, jak zkvalitňovat oborově didaktické kompetence učitelů primární školy. Ty chápeme jako prohlubování znalostí matematického obsahu a jeho didaktického zpracování a uplatňování těchto znalostí ve školní praxi. Východiskem jsou úlohy vytvořené konkrétními respondenty (studenty učitelství příp. učiteli).

PROBLEM POSING AS ONE OF THE WAYS DEVELOPING TEACHERS' PROFESSIONAL COMPETENCE

Abstract

The need to acquire mathematical literacy grows. This puts great demands on teachers' professional competence. In this contribution, problem posing is outlined as one of the ways of empowering subject-didactical competence of primary school teachers, i.e. how to deepen the knowledge of subject and its didactical elaboration as well as application of this knowledge in school practice. This paper starts with examples of problems posed by concrete respondents (teacher-students and primary school teachers).

O kompetencích; několik úvodních poznámek

Matematické vzdělávání chápeme jako součást všeobecného vzdělávání zaměřeného na všestranný rozvoj žákovy osobnosti. V programovém prohlášení pro jednání 53. konference CIEAEM (International commission for the study and improvement of mathematics education) bylo konstatováno, že společnost se „matematizuje“, matematika je součástí mnoha oblastí života. Proto roste význam matematického vzdělávání a potřeba dosažení funkční matematické gramotnosti. To klade velké nároky na učitele. Proto se již několik let zabýváme hledáním cest, jak kultivovat (a) nazírání učitelů na podstatu a cíle matematického vzdělávání a (b) profesní kompetence učitelů. Pod označením „profesní kompetence učitele“ rozumíme soubor dovedností, které učitel potřebuje ke kvalitnímu vykonávání své práce (Slavík, 2004; Macháčková, Tichá, 2006).

V dosavadním výzkumu jsme ukázali, že významnou roli hraje oborově didaktická kompetence, tedy znalost obsahu i didaktických přístupů k němu a uplatňování těchto znalostí ve školní praxi. (V této souvislosti připomeňme, že často jsou ve světě a v poslední době i u nás citované Shulmanovy myšlenky: má-li se učitelství stát

profesí, je třeba usilovat o vytvoření „poznatkové baze učitelství“ (knowledge base for teaching), která zahrnuje „znalosti vědních obsahů“, „didaktické znalosti obsahu“ a „znalosti kurikula“ (Shulman, 1986; Švec, 2006; Janík, 2007).

Výrazně se nutnost kvalitní oborově didaktické kompetence učitele projevila v experimentech prováděných v prostředí zlomků. Ukazuje to i následující epizoda z vyučování.

Učitelka navrhla experiment: „Dám každému žákovi pruh papíru rozdělený na čtyři stejné části. Budu se ptát, co vidí. Budu zjišťovat, zda při postupném překládání papíru začnou mluvit o zlomcích. A také, zda tutéž část pojmenují např. polovina i dvě čtvrtiny, čtyři osminy.“ (podrobněji v Hošpesová, Tichá, 2005).

Učitelka rozdala žákům pruhy papíru rozdělené přeložením na čtyři shodné části a zadala úkol: „Podívejte se, co máte před sebou, a zkuste to vyjádřit.“

Odpovědi žáků byly různé, například: „Celek rozdělený na čtyři části.“ „Jsou to čtyři obdélníky spojený.“ „Úsečka, která má čtyři části.“ Poté učitelka požádala žáky, aby to, co vidí, zapsali „matematicky“. Žáci navrhli opět různé možnosti. Tři z nich učitelka nechala napsat na tabuli: 1, 4 a $\frac{4}{4}$. Poté žáky vyzvala, aby rozhodli, která z možností je

správná. Nakonec přijala za správnou pouze první možnost (číslo 1).

Poté učitelka žáky vyzvala, aby rozdělili pruh papíru podle přeložení na čtyři oddělené části a aby to, co vidí, „matematicky“ zapsali. Objevily se různé návrhy: $\frac{1}{4}$,

$\frac{1}{1}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{4}{1}$, dokonce i $\frac{3}{4}$ (tři mezery mezi čtyřmi obdélníky). Z diskuse bylo patrné, že se

žáci snažili přijít s návrhem, který by učitelka přijala. Ta nakonec označila za správnou odpověď zlomek $\frac{4}{4}$ a vysvětlení žáka: „My víme, že jsme ten obdélník rozdělili na čtyři

části. Oni jsou to čtvrtiny. A my víme, že jsou tam čtyři. Tak jsem napsal čtyři čtvrtiny.“ Ostatní návrhy učitelka bez vysvětlení zamítla. V průběhu vyučovací hodiny jsme pozorovali, že stále narůstala nejistota učitelky i žáků. Žáci postupně ztráceli zájem a celkový dojem z vyučovací hodiny byl neuspokojivý jak pro učitelku, tak pro žáky (podrobněji v Hošpesová, Matějů, 2006).

Učitelka předložila žákům otázky, na které existovalo několik možných odpovědí, sama však akceptovala pouze některé a odmítla odpovědi, které nabízely možnosti dalších úvah. Nebyla schopná reagovat na odpovědi žáků, využít návrhy v nich obsažené a dovést žáky ke shrnutí a zdůvodnění. Tato epizoda posílila naše přesvědčení, že oborově didaktická kompetence zaujímá klíčové místo. Učitel, který chce tvořit pro žáky objevitelské klima, musí vycházet z kvalitní vlastní znalosti obsahu i možností jeho didaktického zpracování. Pokud znalosti učitele nejsou dostatečně hluboké, nemůže využít potenciál úlohy.

Obsah vyučování matematice na 1. stupni ZŠ se může jevit jako zdánlivě jednoduchý. Jedná se ale o propedeutiky různých témat. Proto dobrá znalost pojmů a chápání souvislostí jsou pro učitele předpokladem přípravy i realizace vyučování.

Problémy se zlomky; některé příčiny

Uvedená epizoda odráží fakt, že pojem zlomku patří k nejobtížnějším pojmům školské matematiky a to jak z hlediska žáků, tak učitelů.

Významným zdrojem nesnází se zlomky je skutečnost, že zlomek může být interpretován různě, může se k němu přistupovat z různých úhlů pohledu. (V současnosti je zpravidla uváděno pět vzájemně propojených subkonstruktů: část-

celek, poměr, operátor, podíl, míra, přičemž subkonstrukt „část-celek“ prostupuje všemi čtyřmi ostatními (Macháčková, Tichá, 2007). Avšak současně je třeba si uvědomit, že pokud zůstaneme pouze u interpretace část-celek (jak se často děje), značně tím ochudíme a zdeformujeme představy žáků (Charalambous, Pitta-Pantazzi, 1996).

Dalším zdrojem nesnází je to, že se nevěnuje patřičná pozornost soustavnému obohacování zásoby reprezentací a schopnosti „překládat“ mezi různými mody reprezentace, například mezi aritmetickou operací a slovní úlohou, tedy tvoření slovních úloh (e.g. Halford, 1993; Lesh, Post & Behr, 1987; Tichá, 2003). Naše škola tyto aktivity poněkud zanedbává a porozumění tím může být značně limitováno. Různé mody reprezentace (činnostní, ikonické i symbolické) jsou užívány na 1. stupni ZŠ, avšak ve vyšších ročnících jsou preferovány verbální a symbolické reprezentace. To se pak negativně projevuje u studentů učitelství pro 1. stupeň ZŠ, neboť nejsou schopni při řešení úloh používat činnostní a zvláště ikonické (vizuální, obrázkové) reprezentace.

„Účinnost“ tvoření úloh; několik příkladů

Mnozí didaktikové (Silver, Cai, 1996; English, Halford 1995) zdůrazňují potřebu rozvíjení dovednosti tvořit úlohy a spatřují v tom jednak cíl, jednak prostředek matematického vzdělávání. Ukazuje se, že tvoření úloh (zvláště slovních) je velmi dobrý diagnostický i reedukační prostředek. Analýza vytvořených úloh vede ke zjištění úrovně porozumění a k objevení eventuálních miskoncepcí a chybných úvah u každého respondenta (Tichá, 2003). Uveďme několik ukázek.

V několika letech po sobě jsme zadávali žákům 4.-8. ročníku (9-14 let) úkol: *Sestav takovou slovní úlohu, aby k jejímu vyřešení stačilo vypočítat $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$* . Tento úkol jsme posléze zadali i studentům středních a vysokých škol. Potvrdilo se, že miskoncepce vzniklé zřejmě už v období vytváření prekonceptů mají dlouhou setrvačnost – neporozumění a chyby se neustále opakovaly, tytéž chyby se vyskytly v různých věkových kategoriích. Je tedy otázka, do jaké míry jsou miskoncepce výsledkem vlastní „poznávací“ činnosti žáků a do jaké míry je žákům předali učitelé.

V úlohách vytvořených ku uvedenému součtu dvou zlomků se u části studentů učitelství pro 1. stupeň ZŠ objevily následující závažné miskoncepce:

- *V hlavním městě je $\frac{1}{4}$ nekuřáků a $\frac{1}{2}$ kuřáků. Kolik lidí kouří a nekouří. Spočítat dohromady.*

Tento typ úloh ukazuje, že jeho autor nechápe, že se jedná o dělení souboru podle jednoho znaku (tedy na podmnožinu a její doplněk).

- *Třídy 6.A a 6.B volily „učitele roku“. Nejvíce hlasů bylo pro paní Novákovou. Ze 6.A ji volila $\frac{1}{4}$ žáků, ze 6.B $\frac{1}{2}$. Jaká část žáků obou tříd volila paní Novákovou? (Kolik ze studentů obou tříd volilo paní Novákovou?)*

Autorka připojila výpočet: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ a odpověď: $\frac{3}{4}$ z celkového počtu žáků obou tříd volilo paní Novákovou.

Studentka si neuvědomila, že zlomek chápala střídavě jako operátor a jako veličinu. Neuvědomila si ani, že pracuje se třemi různými celky. Projevil se tu také různými autory zmiňovaný rušivý vliv znalostí počítání s přirozenými čísly (Charalambous, Pitta-Pantazzi, 1996)

Překvapivé byly pro nás úlohy, které studenti učitelství pro 1. stupeň ZŠ (někdy i učitelé) sestavovali k výpočtu $\frac{3}{4} \cdot 20$ (Byl jim zadán úkol: *Sestavte slovní úlohu, k jejímuž vyřešení stačí vypočítat $\frac{3}{4} \cdot 20$*). A zvláště nás překvapily problémy, které s tímto úkolem studenti i učitelé měli, jejich bezradnost. A to i proto, že v českých školách se tradičně zlomky zavádějí jako operátory konkrétních činností – tvoření a výpočet části celku (jakési „matematické stroje“, soubory instrukcí; například *Ve třídě je 20 žáků. $\frac{3}{4}$ z nich jsou děvčata. Kolik je ve třídě děvčat?*) Domnívali jsme se proto, že se s tímto úkolem snadno vyrovnají. To byl omyl.

Zřejmě ještě obtížnější úkol zadáme studentům, mají-li sestavit úlohu k násobení dvou zlomků. K výpočtu $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}$ předložila jedna studentka 3 úlohy:

1. Na stole ležely $\frac{2}{3}$ koláče. Dušan snědl $\frac{1}{4}$ ze $\frac{2}{3}$ koláče. Kolik koláče zbylo?
2. Na stole ležely $\frac{2}{3}$ kg mandarinek. Veronika snědla $\frac{1}{4}$ kg. Kolik mandarinek zbylo?
3. Sklenice byla ze $\frac{2}{3}$ plná. Gabriel vypil $\frac{1}{4}$. Z kolika byla sklenice plná?

Následoval rozhovor studentky (S) s experimentátorkou (E).

S: Tady (*ukazuje na úlohy 2 a 3*) nepočítám kus z něčeho, tady ubírám, dávám pryč.

Vlastně nevím, jak jsem to myslela.

E: Jak byste to mohla myslet?

S: Asi takhle (*kreslí obrázek - kruh*) – rozdělím na čtvrtiny a jednu dám pryč.

Ale vlastně, někdo by to mohl brát, že vypil čtvrtku celé sklenice.

Udělal jsem vlastně jen jeden dobře. ... Měla jsem se přesvědčit ...

E: Jak byste se chtěla přesvědčit?

S: No, asi jsem to měla nějak vypočítat. Nebo to dát vypočítat někomu, kdo to umí líp.

Uvedený rozhovor potvrzuje, že nestačí úlohu vytvořit. Je třeba ji i vyřešit a diskutovat o ní. Potvrzuje se tu potřeba provádění společné reflexe (Macháčková, Tichá, 2006). Vytvořit úlohy a promyslet je pomůže uvědomit si svá vlastní neporozumění, své omyly a nedostatky. Je to tedy cesta ke vytváření a zkvalitňování oborově didaktické kompetence.

Závěrem

Hloubku porozumění jsme zjišťovali na základě úloh vytvořených různými respondenty (studenty učitelství, učiteli i žáky). „Metoda tvoření úloh“ se v našem výzkumu ukázala být velmi přínosná. Ukázalo se při tom, že tvoření (slovních) úloh je nejen velmi dobrý diagnostický, ale i edukační a reedukační prostředek. V procesu formulování otázek a úloh se rozvíjí vytváření modelů, užívání různých modů reprezentace. Schopnost formulovat otázky a úlohy naznačuje vhléd do situace. Z formulací slovních úloh je možné získat mnoho didakticky zajímavých a cenných informací. Proto jsme tvoření úloh začali využívat i v další oblasti výzkumu - při zjišťování, jak je interpretován konkrétní zlomek, které z interpretací studenti učitelství

a učitelé uvažují a užívají. Zda a do jaké míry jsou schopni dívat se na konkrétní zlomek z různých úhlů pohledu (a v budoucnu neochuzovat žáky).

Literatura

1. ENGLISH, N.D, HALFORD, G.S. *Mathematics Education: Models and Processes*. Mahwah, NJ: LEA 1995.
2. HALFORD, G.S. *Children's Understanding: The Development of Mental Models*. Hillsdale: LEA 1993.
3. HOŠPEŠOVÁ, A., MATĚJŮ, B. Creativity and Classroom Discourse. *Department of Mathematics Report Series 14*. České Budějovice: JCU, PedF 2006, 69-72.
4. HOŠPEŠOVÁ, A., TICHÁ, M.: Developing mathematics teachers' competence. In M. Bosch (ed.) *CERME-4 Proceedings*. Sant Feliu de Guíxols, Spain 2005. 1483 – 1493, CD ROM
5. CHARALAMBOUS, Ch. Y., PITTA-PANTAZZI, D. Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics*. 2006, vol. 64, 293-316.
6. JANÍK, T. a kol. Pedagogical content knowledge nebo didaktická znalost obsahu? Brno: Paido 2007.
7. LESH, R., POST, T. & BEHR, M. Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In: C. Janvier (ed.) *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale: LEA 1987, 33-40.
8. MACHÁČKOVÁ, J., TICHÁ, M. Po stopách rozvíjení kompetencí učitelů: pohledy zevnitř i zvenku. In M. Uhlířová (ed.) *Matematika jako prostředí pro rozvoj osobnosti žáka primární školy*. Olomouc: UP, PedF 2006, 140-144.
9. MACHÁČKOVÁ, J., TICHÁ, M. Assessment of knowledge and conceptions through problem posing: The case of fraction. In *SEMT '07- Proceedings*. J. Novotná and H. Moraová (ed.). Praha: UK PedF, 2007, 178-186.
10. SHULMAN, L.S. Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher* 1986, vol.15, no. 2, 4-14.
11. SILVER, E. A., CAI, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. *Journal for Research in Mathematics Education*. 1996, vol. 27, no. 5, 521-539.
12. SLAVÍK, J. Profesionální reflexe a interpretace výuky jako prostředník mezi teorií a praxí. Konference *Oborové didaktiky v pregraduálním učitelském studiu*. Brno: PdF MUNI, 2004. www.ped.muni.cz.
13. ŠVEC, V. *Pedagogické znalosti učitele: teorie a praxe*. Praha: ASPI 2005.
14. TICHÁ, M. Following the path of discovering fractions. In J. Novotná (ed.) *SEMT '03 Proceedings*. Praha: UK PedF 2003, 17-27.

Poznámka: Výzkum byl podpořen granty GAČR 406/08/0710 a AV ČR, výzkumný záměr AV0Z10190503.

Kontaktní adresa

Marie Tichá, CSc.

Matematický ústav AV ČR, v.v.i.

Žitná 25, 115 67 Praha 1

Telefon: +420 222 090 726, e-mail: ticha@math.cas.cz

MODELOVÁNÍ V PROSTŘEDÍ ŽELVÍ GRAFIKY - PROGRAM OBKRESLOVAČKA

Dana TRŽILOVÁ

Abstrakt

Článek pojednává o činnostech a strategiích žáků mladšího školního věku při práci v počítačové aplikaci obsahující želví grafiku. Úkolem žáků je rozdělit předložený mnohoúhelník na pravoúhelník vytvořitelný procedurálním způsobem a na doplněk poskládatelný z elementárních geometrických tvarů.

MODELLING IN TURTLE GRAPHICS – APPLICATION CALLED ENCIRCLER

Abstract

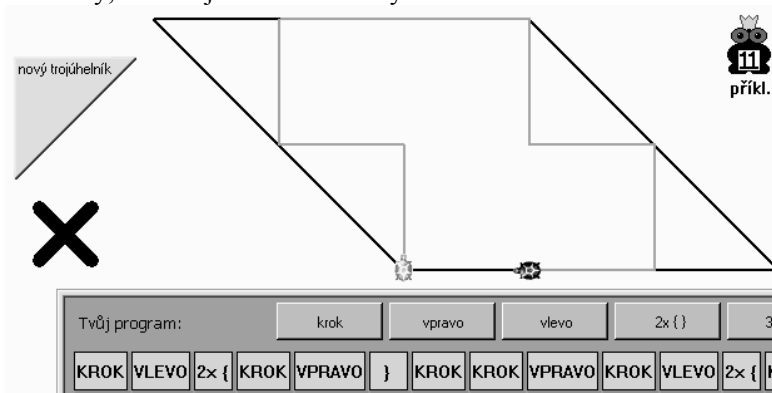
The article concerns activities and strategies of primary school children in computer application involving turtle graphics. The goal of children was to discover the dividing of a complicated polygon to a rectangle and a rest of the polygon which can be paved by triangle-shaped tile objects. To draw the rectangle children used an algorithm which was built from commands of given types.

1. Úvod

Známostí je, že smysluplná výuka geometrie na 1.stupni ZŠ se opírá o zkušenosti žáků, které jsou získané při řešení různých problémů. Např. František Kuřina říká: „Geometrie nemá na prvním stupni ani propedeuticky ráz deduktivní, ale je výrazně operační.“ [1] Podobně Milan Hejný tvrdí: „Experimentování je základní a nezastupitelný způsob získávání geometrických zkušeností. Žáci základních škol mají přirozenou touhu zkoumat svět vlastní aktivitou.“[1]. V současné době se dostává do popředí realizace osvojování geometrických pojmů a dovedností řešit problémy prostřednictvím experimentování v počítačovém prostředí. Vhodnou volbou dostupnou pro naše školy je prostředí želví geometrie, konkrétněji program LogoImagine.

Článek seznamuje využitím programu Obkreslovačka [3], který představuje jednu z nadstaveb želví geometrie. Žákům jsou zde postupně předkládány různé mnohoúhelníky a úkolem žáků je zobrazený mnohoúhelník vybarvit. Toto lze v Obkreslovače provést rozdělením mnohoúhelníka na dvě hlavní části, z nichž každá bude vyplněna barvou a to na základě odlišné činnosti žáků. Jednu část tvoří pravoúhelník se dvěma požadovanými vlastnostmi: lze ho vepsat do zobrazeného mnohoúhelníka a má maximální možnou rozlohu (přičemž základní dále nedělitelnou jednotkou délky je krok želvy). Pravoúhelník se automaticky vybarví, jestliže žáci želvou obejdou po jeho obvodu a vrátí želvu na startovní pozici. Druhou část tvoří v mnohoúhelníku zbylé rovinné obrazce, které žáci vybarví jejich vyskládáním pomocí

předem daných trojúhelníků. Popisovaný výzkum se snaží zachytit, jakým způsobem a jakými strategiemi žák rozdělí útvar na části vytvořitelné procedurálním způsobem (pomocí zadávání příkazů želví grafiky) a jakou oporu poskytují doplňkové elementární geometrické tvary, z nichž je možno útvar vyskládat.



obr. 1 – Prostředí testovací aplikace Obkreslovačka. Želva právě dokončuje obkreslení (šedě) procedurální části daného mnohoúhelníka (černě) pomocí žákem napsaného programu (dole).

2. Prostředí Obkreslovačky

Kvůli nízkému věku testovaných žáků byly v aplikaci Obkreslovačka zjednodušeny příkazy želví grafiky. Psaní příkazů bylo nahrazeno sestavováním programu použitím ikonových tlačítek. Žáci mohli svůj program libovolně upravovat přesouváním tlačítek s příkazy a rovněž mohli výsledek svého programu kdykoliv graficky zobrazit. Svoji práci mohli žáci poslat ke kontrole teprve tehdy, když si byli jistí, že nakreslili pravoúhelník. Protože žáci mladšího školního věku nemají znalosti a dovednosti práce s velikostí úhlu, byly nástroje želvího kreslení omezeny na příkazy KROK (dopředu o pevnou vzdálenost), VLEVO (otočení vlevo o 90°) a VPRAVO (otočení vpravo o 90°), což umožňovalo pohyb pouze po čtvercích základní mřížky velikosti KROK. Příkazy pro ovládání želvy byly doplněny řídicími příkazy pro cyklus. Velikosti úhlů předkládaných mnohoúhelníků však tvořily násobky úhlu 45° . K objevenému pravoúhelníku tedy žáci přidávali rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky o délce odvěsen jeden KROK, tak aby zaplnili mezery v předloženém mnohoúhelníku. Tyto trojúhelníky bylo možno přemísťovat po mřížce táhnutím myši a otáčet je o 90° . Přitom nebylo dovoleno umístit dva trojúhelníky tak, aby spolu vyplnily čtverec. Tímto způsobem bylo zaručeno, že celý předložený mnohoúhelník bude vybarven pokud žáci odhalí vepsaný pravoúhelník o maximální rozloze.

Po každém požadavku žáka na vykreslení želví čáry nebo na kontrolu správnosti řešení byla uložena data tak, aby se při pozdější analýze mohla zobrazit. Toto soustavné zaznamenávání umožňovalo vysledovat žakovu strategii.

Prostředí nabízelo čtyři úrovně, které se lišily obtížností daných mnohoúhelníků a režimem práce:

- Úroveň 1 obsahovala pouze pravoúhelníky, složené ze čtverců základní mřížky, např. obdélníky různých tvarů, čtverce, šestiúhelníky tvaru L. Vždy záleželo na počáteční pozici želvy.
- Úroveň 2 obsahovala mnohoúhelníky i se stranami pod úhlem násobku 45° , takže želví program nestačil k pokrytí celého mnohoúhelníka. Tato úroveň byla stěžejní pro výzkum, protože žáci poprvé rozhodovali, která část útvaru je procedurální a která nikoliv.

- Úroveň 3 se od druhé úrovně nelišila obtížností tvarů, ale režimem práce. Žáci nejprve museli vytvořit program k obkreslení procedurální části a poté mohli použít dlaždice. Úroveň zkoumala, nakolik si žák dokáže procedurální část představit, nikoliv ji obdržet pouhou manipulací s dlaždicemi.
- Nejtěžší 4. úroveň s režimem práce stejným jako v úrovni 3. obsahovala tvarově složité mnohoúhelníky, složitější k naprogramování procedurální části. Prosté poskládání příkazů za sebou by zde vedlo k příliš dlouhým zápisům program, protože délka programu byla omezena délkou řádky pro umístění ikon programových kroků. Žák byl nucen použít programových struktur, např. vnořených cyklů, ke zkrácení zápisu svého programu.

3. Průběh testování

Před testováním proběhl pretest na Základní škole Mladé v Českých Budějovicích na šestnácti žácích. Pretest ověřil, že žáci jsou schopni sledovat pokyny asistenta a že nemají potíže s ovládáním aplikace. Vlastní testování proběhlo v květnu až červnu 2007 na dvaceti převážně jihočeských základních školách. Čtyřicet vyškolených asistentů – studentů učitelství otestovalo 220 žáků pátých a čtvrtých ročníků ZŠ. Žádné z testovaných dětí nemělo žádné zkušenosti s programováním v Logu ani s aplikací Imagine, většina žáků neměla žádné zkušenosti s počítači ve škole. Test trval 2 x 45 minut. Skládal se z úvodního tréninku a tří nebo čtyř úrovní hry v prostředí aplikace Obkreslovačka (podle individuální rychlosti). Každá úroveň „hry“ předkládala žákům šest úkolů. Trénink měl za cíl seznámit žáky s prostředím aplikace, tj. s funkcí jednotlivých tlačítek a způsobem editace programu. Trénink probíhal pod dohledem dvou asistentů, kteří žáky hromadně vedli návodnými úkoly (nakreslit čtverec, zkusit použít opakování, vytvořit schody, vrátit želvu zpět na startovní pozici...) a individuálně pomáhali.

Ve všech čtyřech úrovních testu žáci pracovali sami. Asistenti je pouze sledovali popř. pomáhali když se děti dostali do pro ně neřešitelné situace. Jejich úkolem bylo jednak motivovat žáky a jednak zachytit informace, které by program nedokázal zaznamenat. Pro řešení úloh nebyl stanoven žádný časový limit.

4. Výsledky testování

V první úrovni testování lze žáky, podle jejich strategie řešení úkolu, rozdělit do dvou téměř stejně početných skupin. Hlavním rozdílem je frekvence ověřování vytvářených programů. První skupinu tvoří žáci, kteří především v počáteční úrovni velice často ověřovali svůj program. Po každé změně program ověřili tak, že nechali želvu vykreslit čáru. Někteří z nich dokonce budili dojem, že postupují metodou pokus – omyl: náhodně vybírali nějaký nový příkaz na konec programu, ihned jej ověřili, a pak jej smazali nebo ponechali. Typickým příkladem bylo otočení želvy v konkrétním úhlu pravoúhelníka. U značné části žáků z této skupiny frekvence kontrol žákovských programů počítačem s rostoucím počtem vyřešených problémů klesala. Zůstala však méně početná skupina žáků, kteří dávali přednost okamžité zpětné vazbě poskytované počítačem, i když bylo množství počítačových kontrol počítáno.

Druhou skupinu tvořili žáci, kteří kontrolovali svůj program po velkých částech, popř. až když si mysleli, že mají program hotový. Pozorováním bylo zjištěno, že část z žáků, kteří zřídka používali ověření programu vykreslením čáry, si pomáhala znázorněním předpokládaného pohybu želvy prstem na monitoru, popř. vstávali a natáčeli se podle směru želvy. Většina žáků z této skupiny nedovedla nalézt drobné chyby ve svých programech a dávala přednost zcela novému sestavení části programu, ve které se vyskytla chyba. Výjimkou nebylo přepracování celého programu. Zde se

ukázalo, že se žáci zpočátku nedokázali orientovat ve svém programu, protože opravovali často i delší části, než bylo nezbytně nutné. Proto poměrně častou strategií bylo smazat program a začít jej vytvářet znovu, a to pro opačný průchod želvy obrazcem. Tedy když se žákovi nepodařilo sestavit program, kdy želva začala procházet křivku, ohraničující obrazec, směrem doprava poslali želvu v dalším pokusu opačným směrem, tj. doleva.

Ve fázi tréninku byli žáci seznámeni s používáním závorek vyznačujících skupinu příkazů, která se má opakovat. Avšak většina žáků radila spíše příkazy sekvenčně za sebou. Do třetí úrovně byly však zařazeny útvary, které nebylo možno obkreslit pouhým skládáním tlačítek za sebe. Z analýzy testu vyplynulo, že většina žáků začíná používat cyklus pro zápis programu teprve tehdy, kdy je nucena svůj program zkrátit. Impulsem pro používání programové struktury tedy nebyla snaha o zjednodušení nebo zesrozumitelnění programu, ale snaha o jeho zkrácení. Do výše popsané situace se dostávali žáci nečekaně i v úrovni jednodušší, a to tehdy, když zbytečně prodlužovali program skládáním nefunkčních sekvencí programu (např. VLEVO VPRAVO VLEVO apod.). Potom kvůli zkrácení přidávali cyklus jen do poslední části programu místo kontroly programu celého. Nejčastěji byl cyklus využit pouze pro opakování jednoho příkazu (3x [KROK]). Skupiny, které vložily do cyklu více příkazů (např. ... 2x [KROK VLEVO KROK VPRAVO] ...), mohly najít opakující se část tvaru nebo najít opakující se sekvence programu. Pozorováním bylo zjištěno, že převládal přístup popsaný jako druhý.

Někteří žáci objevili souvislost mezi středovou souměrností a programem, který by byl celý zapsán jako cyklus (např. 2x [KROK KROK VLEVO KROK VLEVO]). Ti se pak snažili odhalit souměrnost v dalších obrázcích a cyklus použít jako univerzální přístup k psaní programu pro takový typ obrázku. Jedna skupina odhalila v jednom obrázku souměrnost osovou, a protože pro něj nedokázala program jako cyklus napsat, úlohu opustila, aniž by se pokusila o jiné řešení. Vypadá to, že si mylně vztáhla tuto vlastnost vykreslování tvarů i pro osovou souměrnost.

Celkový dojem z hlavního testu byl, že žáci mají větší potíže s napsáním programu, než s odhalením rozdělení útvaru na procedurální a dlaždicovou část. Vícekrát bylo vidět, že dlaždice jsou rozmístěny správně, ale žáci nejsou schopni napsat program, který vyplní zbylý pravouhelník. Ukazuje se, že je potřeba delší doby, po kterou budou žáci manipulovat se želvou a psát program, než budou připuštěni do hlavního testu. To lze zařadit delším a cílenějším tréninkem a delší první úrovní testování.

5. Závěr.

Na uvedených příkladech jsme se snažili ukázat jak lze rozvíjet geometrické poznatky řešením úloh, které mají blízko ke hravé dětské činnosti. Zaujetí s jakým žáci řešili problémy v Obkreslovače vypovídá o tom, že děti vítají řešení problémů v počítačovém prostředí. Je třeba nabídnout dětem více takovýchto programů.

Literatura

1. HEJNÝ, M. KUŘINA, F. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. Portál, Praha. 2001
2. KUŘINA, F. *Geometrie a svět dětí (o vyučování geometrie na prvním stupni)*. Pedagogické centrum, Hradec Králové. 2001

3. TRŽILOVA, D. VANÍČEK, J. *Procedural building-up of geometrical object in concepts and strategies of primary school pupils*. Proceedings of the 11th European Logo Conference. 19-24 srpna 2007 Bratislava

Kontaktní adresa

*PaedDr. Dana Tržilová, Csc.
Jihočeská univerzita, Pedagogická fakulta
Jeronýmova 10, 371 15 České Budějovice
Telefon: +420 387 312 194
E-mail: trzilova@pf.jcu.cz*

SÉMANTICKÝ PROSTOR EDUKAČNÍ IMPLEMENTACE ICT

Martina UHLÍŘOVÁ

Abstrakt

Realizované výzkumné šetření ATCAT (Attitudes towards Computer Assistant Teaching) bylo zaměřeno na problematiku edukační implementace ICT v rámci prostředí primární školy. Hlavní výzkumnou metodou měření byla zvolena metoda sémantického diferenciálu. V textu příspěvku je věnována pozornost zejména postojům učitelů vzhledem k možnosti edukačního využití počítačů se zaměřením na primární matematiku.

THE ICT EDUCATIONAL IMPLEMENTATION SEMANTIC SPACE

Abstract

The ATCAT (Attitudes towards Computer Assistant Teaching) study was designed to provide information to better understand how educational technologies are accepted by teachers. This article is aimed at the elementary teacher attitudes towards the using of educational technologies in education, especially in teaching elementary mathematics. The research data used were collected by a special questionnaire for measurement of attitudes which was created on the principle of semantic differential.

1. Úvod

Informační a komunikační technologie (ICT) se staly již samozřejmou součástí našeho každodenního života. Škola jako nedílná součást společnosti by měla reflektovat aktuální požadavky společnosti a připravovat jedince v duchu formující se informační společnosti. Proces implementace ICT do edukační reality, zejména prostředí primární školy, je však teprve v počátcích (Uhlířová, 2004a). Jak upozorňuje B. Brdička (Brdička, 2003), implementaci ICT nelze chápat jako izolovaný jev spojený s vybavováním škol počítači. Je dlouhodobým komplexním procesem, přičemž technologie by neměly být cílem, nýbrž didaktickým prostředkem a moderním edukačním prostředím. V souladu se závěry výzkumného šetření *Quo Vademus* (Venezky, Davis, 2002), vnímáme jako jeden z klíčových faktorů podmiňujících úspěšnost implementace ICT osobnost učitele. Kladný postoj učitele k možnosti začlenění ICT do výuky chápeme jako nezbytnou vstupní podmínku. Domníváme se, že pouze učitel, který vnitřně přijme ICT jako progresivní výukové prostředky a netradiční kognitivní prostředí, může být aktivním „realizátorem“ požadované transformace.

2. Výzkumné šetření ATCAT (Attitudes towards Computer Assistant Teaching)

Výzkumné šetření ATCAT bylo zaměřeno na analýzu postojů učitelů 1. stupně ZŠ k možnostem implementace počítačů do edukačního prostředí primární školy, konkrétně

primárního matematického vzdělávání. Vymezit a analyzovat **sémantický prostor edukační implementace ICT** bylo jedním z dílčích cílů výzkumu. Jako hlavní výzkumná metoda šetření byla zvolena metoda sémantického diferenciálu.

2.1. Metoda sémantického diferenciálu

Metoda **sémantického diferenciálu** (Chráska, 2004a,b, Kerlinger 1972) je diagnosticko výzkumnou technikou, která je řazena mezi nepřímé metody a která stojí na rozhraní kvantitativního a kvalitativního výzkumu. Tato metoda je vhodná pro zkoumání subtilních a těžko postižitelných stránek edukační reality, je vhodná ke zkoumání vnitřních postojů a měření individuálního chápání významu slov. Kořeny metody sémantického diferenciálu lze hledat v psychologii - metoda umožňuje vyšetřovat konotativní významy pojmů či jejich vzájemných vztahů – pojmových indikátorů. (Konotativními významy rozumíme významy, které jsou asociované sledovaným indikátorem.) Měřením konotativních významů pojmových indikátorů zachycujeme potom v postatě postoje jednotlivých osob k těm prvkům reality, které dané indikátory reprezentují. (Chráska, 2004b). Autorem metody sémantického diferenciálu je americký psycholog Charles E. Osgood.

Základem Osgoodovy metody je metoda Lickertova škálování, kterou Osgood rozšířil o multidimenzionální charakter. Na základě výsledků faktorové analýzy Osgood nově vymezil trojici faktorů (dimenzí). Ty specifikují vnímání daného pojmu a umožňují tak vyjadřovat postoje paralelně ve více rovinách. Jsou to: Faktor hodnocení (Evaluative factor), Faktor potence (Potency factor), Faktor aktivity (Activity factor).

V souhlase s výzkumnými závěry M. Chrásky (Chráska, 2004a) pro naše sociokulturní prostředí jsme přistoupili k redukci tří původních faktorů na faktory dva – faktor hodnocení f_h a faktor energie f_e . Faktor hodnocení lze interpretovat ve smyslu hodnotící linie „dobro – zlo“, faktor energie jako „sílu, energii“ obsaženou v pojmu. Významy jednotlivých pojmů lze graficky znázornit v dvojrozměrném sémantickém prostoru. Na základě umístění a vzájemné polohy sledovaných (indikovaných) pojmů v sémantickém prostoru je možné analyzovat postoj respondentů ke zkoumané problematice.

2.2. Charakteristika výzkumného nástroje

Pro potřeby výzkumu jsme modifikovali dotazník ATTP (*Attitudes towards Teaching Profession*), který pro měření postojů k učitelské profesi sestavil a optimalizoval M. Chráska (Chráska, 2003). Do dotazníku ATCAT bylo pro vyhodnocení zařazeno 6 pojmových (vztahových) indikátorů vztahujících se k problematice edukační implementace ICT:

- Já a počítač (Indikátor A),
- Já a počítač ve výuce matematiky (Indikátor B),
- Já a nové metody a formy práce (Indikátor C),
- Já a technické prostředky (Indikátor D),
- Využití počítače ve výuce (obecně) (Indikátor E),
- Počítač a získávání nových informací (Indikátor F).

Hodnotící karta každého sledovaného pojmu byla tvořena 10 sedmibodovými škálami bipolárních párů adjektiv Š1 až Š10. (Ukázka záznamového archu pro indikátor A - Já a počítač je na obrázku č. 2.1.) Úkolem respondenta bylo označit míru souhlasu dané vlastnosti pro jednotlivé konkrétní pojmy či vztahy.

Obrázek č. 2.1 Záznamový arch pro indikátor A - Já a počítač

Já a počítač			
Š1	špatné	☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐	dobré
Š2	snadné	☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐	obtížné
Š3	nepříjemné	☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐	příjemné
Š4	lehké	☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐	těžké
Š5	ošklivé	☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐	krásné
Š6	nenáročné	☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐	náročné
Š7	kyselé	☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐	sladké
Š8	tmavé	☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐	světlé
Š9	bezproblémové	☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐	problémové
Š10	nedůležité	☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐	důležité

V úvodním textu dotazníku bylo respondentům zdůrazněno, že šetření je zaměřeno na jejich vnitřní postoj, pocit, který v nich konkrétní vztah mezi pojmy vyvolává.

2.3. Charakteristika výzkumného souboru

Výzkumného šetření ATCAT se celkem zúčastnilo 148 respondentů - učitelů 3., 4. a 5. tříd ZŠ. Mezi školami byly zastoupeny školy městské (92 škol, tj. 62,2 %) i vesnické (56 škol, tj. 37,8 %). Mezi respondenty byli učitelé s různou délkou učitelské praxe (27,1 % začínajících učitelů s délkou praxe 0 – 3 roky, 47,3 % učitelů zkušených s délkou praxe 4 - 10 let a 29,7 % učitelů „expertů“ s délkou praxe delší než 10 let). Z hlediska zkušenosti učitelů s prací na počítači byla skupina respondentů také heterogenní. 32,4 % učitelů teprve začíná pracovat s počítačem, 55,4 % učitelů již lze považovat za zkušené uživatele (pracují s počítačem 4 až 10 let), 8,1 % učitelů pracuje s počítačem více než 10 let. Pouze 4,1 % respondentů uvedlo, že dosud nepracovalo s počítačem.

2.4. Analýza sémantického prostoru

Na základě počítačového zpracování získaných dat byly vypočítány základní statistické charakteristiky a sestaven graf sémantického prostoru všech respondentů

2.5. Tabulka č. 2.1 Popisné statistiky měření - hodnocení a energie pojmových indikátorů

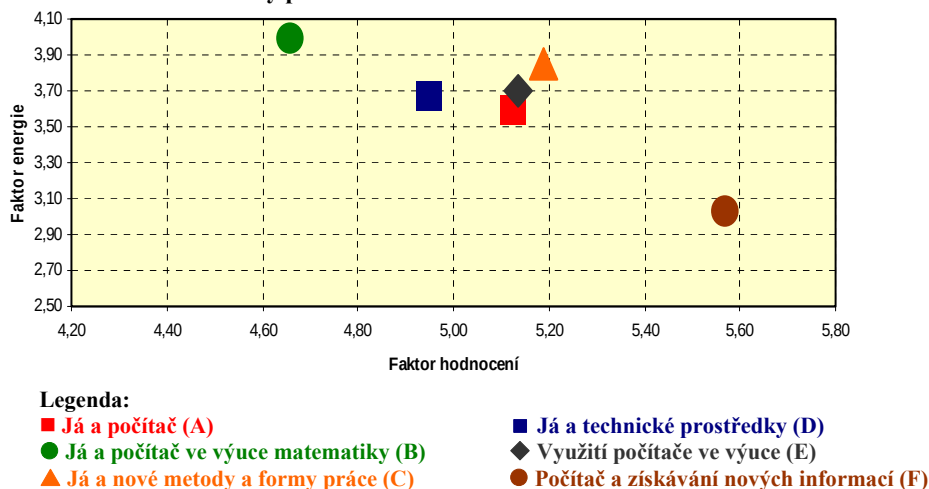
Hodnocení a energie pojmových indikátorů					
		fh	fe	sh	se
A	Já a počítač	5,00	3,59	1,15	1,23
B	Já a počítač ve výuce matematiky	4,55	3,99	1,06	1,13
C	Já a nové metody a formy práce	5,07	3,85	0,84	0,95
D	Já a technické prostředky	4,81	3,67	1,17	1,28
E	Využití počítače ve výuce	5,05	3,70	1,08	1,19
F	Ziskávání nových informací	5,48	3,02	1,12	1,28

Legenda: fh - faktor hodnocení, fe - faktor energie, sh – směrodatná odchylka faktoru hodnocení, se - směrodatná odchylka faktoru energie

výzkumu. V tabulce č. 2.1 jsou uvedeny aritmetické průměry faktorů hodnocení a energie jednotlivých indikátorů v rámci souboru všech respondentů, příslušné směrodatné odchylky.

Názornou představu o vyhodnocení odpovědí souboru učitelů jako celku poskytuje dvojdimenzionální sémantický prostor učitelů zachycený na grafu č. 2.1. Jednotlivé indikátory jsou zobrazeny jako body kartézského systému na základě získaných faktorových skóre (faktoru hodnocení a faktoru energie). V rámci vyhodnocení výsledků jsme analyzovali vzájemnou polohu pojmů v sémantickém prostoru. Čím menší je vzájemná vzdálenost dvou pojmů, tím podobnější je vnímání těchto pojmů respondenty výzkumu.

Graf č. 2.1 Sémantický prostor učitelů



Na základě dosažených výsledků byla vytvořena následující pořadí pojmových indikátorů podle klesající tendence hodnoty faktorů.

Faktor hodnocení (fh)

1. Počítač a získávání nových inform.(F)
2. Já a nové metody a formy práce (C)
3. Využití počítače ve výuce (E)
4. Já a počítač (A)
5. Já a technické prostředky (D)
6. Já a počítač ve výuce matematiky(B)

Faktor energie (fe)

1. Já a počítač ve výuce matematiky (B)
2. Já a nové metody a formy práce (C)
3. Využití počítače ve výuce (E)
4. Já a technické prostředky (D)
5. Já a počítač (A)
6. Počítač a získávání nových inform.(F)

Učitelé nejvýše hodnotili pojem *Počítač a získávání nových informací* ($f_h = 5,48$), nejméně pak klíčový indikátor *Já a počítač ve výuce matematiky* ($f_h = 4,55$). Trojice indikátorů *Já a počítač*, *Využití počítače ve výuce* a *Já a nové metody a formy práce* měla velmi podobná hodnocení ($f_h \in \langle 4,55; 5,07 \rangle$). Učitelé se nejvíce shodovali v hodnocení pojmu *Já a nové metody a formy práce*, které vykazuje nejmenší směrodatnou odchylku $s_{hC} = 0,84$. Největší rozdíly byly v hodnocení pojmu *Já a počítač*, pro který byla stanovena odchylka $s_{hA} = 1,15$.

Pojmem, který je pro učitele spjat s nejvyšší náročností, (který dosáhl nejvyššího faktoru energie), je klíčový indikátor *Já a počítač ve výuce matematiky* ($f_e = 3,99$). Naopak indikátor *Počítač a získávání nových informací* je pro učitele spojen s nejmenší

náročností ($f_e = 3,02$). Učitelé se při posuzování energie opět nejvíce shodovali u pojmu *Já a nové metody a formy práce*, které vykazuje nejmenší směrodatnou odchylku $s_{eC} = 0,95$. Největší rozdíly byly stanoveny u pojmu *Počítač a získávání nových informací*, pro které byla stanovena odchylka $s_{eF} = 1,28$. (Viz. tabulka č. 2.1)

Jestliže bereme v úvahu oba dva faktory, je indikátor *Počítač a získávání nových informací* pro učitele spojen s nejvyšší „užitnou“ hodnotou při vynaložení minimální energie. Naopak využití počítače ve výuce matematiky je pro respondenty spojeno s maximální námahou při očekávání minimálního edukačního přínosu. Postoje respondentů k počítači, k možnostem využití počítače ve výuce (obecně), k novým metodám a formám práce a k technickým prostředkům jsou velmi podobné. (Psychologickou příbuznost odpovídajících indikátorů AEDC dokládá jejich „shluk“ na grafu č. 2.1.)

Zajímavé je vnímání pojmového indikátoru *Já a nové metody a formy práce*. Přestože je pro učitele tento indikátor spojen s velkou náročností, přisuzují mu značnou hodnotu, velký edukační význam. Uvedená zjištění je možné interpretovat tak, že učitelé vnímají „nové metody a formy práce“ pozitivněji než samotné „technologie“. Pro úspěšnou implementaci ICT je tedy významné, aby učitelé přijali počítač nejen jako užitečný nástroj, ale také jako vhodné prostředí pro uplatňování nových metod a forem práce.

Je překvapivé, jak rozdílně učitelé vnímají využití počítače ve výuce (obecně) a využití počítače ve výuce matematiky. Využití počítače ve výuce matematiky je pro učitele, ve srovnání s obecnou představou edukační aplikace, spojeno s maximální náročností při minimálním edukačním zhodnocení. Výsledky ukazují, že učitelé nejsou přesvědčeni o smysluplnosti zařazování počítačů do výuky primární matematiky, o edukačním přínosu multimediálně koncipované výuky.

Přesnější popis sémantického prostoru poskytuje analýza vzdálenosti seskupení indikátorů pomocí D Statistiky. Jako měřítko vzdálenosti pojmů jsme užili tzv. lineární distanci D (*Kerlinger, 1972, Chráška, 1985*). V našem případě bylo pro 6 pojmových indikátorů ($n = 6$) určeno 15 různých hodnot lineární distance D. Vypočítané vzdálenosti pojmů (lineární distance D) byly zaneseny do symetrické D-matice typu 6 x 6 (tabulka č. 2.2).

Tabulka č. 2.2 D matice - LINEÁRNÍ DISTANCE indikátorů - souborné zpracování

jev	A	B	C	D	E	F
A	x	0,6100	0,2655	0,1900	0,1059	0,7259
B	0,6100	x	0,5480	0,4314	0,5607	1,3297
C	0,2655	0,5480	x	0,3002		0,9110
D	0,1900	0,4314	0,3002	x		0,8984
E	0,1059	0,5607	0,1606	0,1911	x	0,8022
F	0,7259	1,3297	0,9110	0,8984	0,8022	x

Z D-matice je patrné, které pojmy jsou si významově blízké a které jsou si významově vzdálené. Zvýrazněné hodnoty v matici ukazují na čtveřici pojmových indikátorů A, C, D a E, které jsou pro respondenty výzkumu pojmově blízké (ve shodě s grafickou reprezentací v rámci grafu č. 2.1). Izolované zůstávají pojmy *Já a počítač ve výuce matematiky* a *Počítač a získávání nových informací*. Lze konstatovat, že číselné hodnoty matice plně korespondují s předcházejícími závěry.

3. Závěr

V rámci deskripce sémantického prostoru postojů učitelů k možnostem edukačního využití počítače bylo překvapivé, jak rozdílně učitelé vnímají možnost využití počítače v rámci výuky (obecně) ve srovnání s využitím počítače ve výuce matematiky. Využití počítače ve výuce matematiky je pro učitele, ve srovnání s obecnou představou edukační aplikace, spojeno s maximální náročností při minimálním edukačním zhodnocení. Výsledky ukazují, že učitelé dosud nejsou přesvědčeni o smyslnosti zařazování počítačů do výuky primární matematiky, o edukačním přínosu multimediálně koncipované výuky matematiky.

Informační a komunikační technologie mohou významně přispět k proměně tradiční školy na moderní výukové prostředí. Výsledky výzkumu vnímáme jako výzvu pro transformaci pregraduální přípravy učitelů primární školy směrem k aktuálním trendům.

Literatura

1. BRDIČKA, B. *Role internetu ve vzdělávání*. 1. edition. Prague: Charles University, 2003. 122 s. ISBN 80-239-0106-0
2. CHRÁSKA, M. Konstrukce dotazníku pro měření postojů k učitelské profesi na bázi sémantického diferenciálu. *Sborník XXI. vědeckého kolokvia o řízení osvojovacího procesu*. Vyškov: VVŠPV 2003 [CD ROM]. ISBN 80-7231-105-0.
3. CHRÁSKA, M. Postoje k učitelské profesi v pregraduální učitelské přípravě. In: *Sociální a kulturní souvislosti výchovy a vzdělávání: 11. výroční mezinárodní konference ČAPV*. [On-line]. 10.10. 2004a) <http://www.ped.muni.cz/capv11/>
4. CHRÁSKA, M. Měření postojů k učitelské profesi pomocí sémantického diferenciálu. In *Teorie a praxe Acta paedagogicae Universitatis Presoviensis*. 2004b) s.25-33. ISBN 80-244-0758-2
5. KERLINGER, F. N. *Základy výzkumu chování*. Praha: Academia, 1972.
6. PŘÍHONSKÁ, J.: Presentation software and it's use in teaching matmematics. In: *Matematyka XII*. Akademia Im.J.Dlugosza, Czestochowa 2007. ISSN 1896-0286
7. UHLÍŘOVÁ, M. Akceptují učitelé počítač? In: *Cesty (k) poznávání v matematice primární školy*. Olomouc: Palacky University Press, 2004. ISBN 80-244-0818-X.
8. UHLÍŘOVÁ, M. Přijali učitelé počítač? *E-Pedagogium* (on-line), 2004a, roč. 4, č. 1. Dostupné na [www: <http://epedagog.upol.cz/eped1.2004/index.htm>](http://epedagog.upol.cz/eped1.2004/index.htm). ISSN 1213-7499.
9. UHLÍŘOVÁ, M. Informační gramotnost a ICT kompetence učitele. In: *Aktuální problémy pedagogiky ve výzkumech studentů doktorských studijních programů II*. Olomouc: Votobia Praha, 2004b. s. 205 – 208. ISBN 80-7220-201-4.
10. VENEZKY, R, DAVIS, C. Quo Vademus. The Transformation of Schooling in Networked World. OECD, 2002 . On-line, dostupné na <http://www.oecd.org/dataoecd/48/20/2073054.pdf> [2.7.2004].

Příspěvek byl vypracován s podporou projektu FRVŠ č. 809/2008.

Kontaktní adresa

RNDr. Martina Uhlířová, PhD.

Katedra matematiky PdF UP v Olomouci

Žižkovo nám. 5, 771 40 Olomouc

Telefon: +420 585 635 712, e-mail: martina.uhlirova@upol.cz

PROBLEMATIKA MATEMATICKY NADANÝCH DĚTÍ V PŘÍPRAVĚ UČITELŮ NA PRVNÍM STUPNI ZŠ

Milena VAŇUROVÁ

Abstrakt

Příspěvek se zabývá charakteristikami a projevy dětí nadaných v matematice a problémy spojenými s přípravou budoucích učitelů prvního stupně ZŠ na identifikaci a rozvíjení talentu matematicky nadaných dětí.

MATHEMATICALLY GIFTED CHILDREN AND PREPARATION OF TEACHERS FOR DEVELOP THEIR TALENTS

Abstract

The paper contains characteristics and abilities of mathematically gifted children in early grades and in primary school level and indicates problems joined with preparation of students to find out and to develop mathematically talented pupils.

V současné době se do popředí zájmu dostává problematika péče o nadané děti. Ve světě probíhají v posledních desetiletích výzkumy a i u nás se věnuje řada odborníků, psychologů a pedagogů nadaným dětem. Ukazuje se, že nadání a talent se nerozvíjejí bez pomoci. K tomu, aby děti dosáhly mimořádných schopností v určité oblasti potřebují vhodné podmínky, tj. podnětné prostředí, vyučování na vysoké úrovni a podporu ze strany okolí. Nedávné změny v legislativě umožnily učitelům i rodičům řešit různými způsoby problémy talentů a dokonce vyžadují reagovat na jejich specifické vzdělávací potřeby a vytvářet pro ně vhodné podmínky. Se skutečnou realizací tohoto požadavku je však spojeno několik úskalí souvisejících s identifikací nadaného žáka, s vytvářením podmínek pro jeho optimální rozvoj, s respektováním jeho individuálních vlastností a v neposlední řadě s adekvátní přípravou učitelů.

Projevy matematicky nadaného dítěte.

Obvykle se uvádí, že nadání je soubor schopností, které umožňují jedinci dosahovat výkonu nad rámec běžného průměru populace. Identifikace mimořádného nadání pro matematiku v mladším věku dítěte je velmi náročná, protože je obtížné stanovit, zda se jedná o zrychlený vývoj žáka v oblasti matematických schopností nebo o mimořádné nadání. Často děti, u kterých se v dětství projevovalo zdanlivě výrazné nadání se v dospělosti zařadily do průměru. Naopak mezi vynikajícími vědci najdeme osobnosti, které se jako děti jevily ve srovnání s vrstevníky jako průměrné či podprůměrné. Schopnosti totiž nejsou neměnné a talent se může projevit různými způsoby v nečekaných situacích během celého života. Zde nám však jde o rané odhalení

talentu a podporu jeho rozvoje. Projevy nadání v předškolním věku obvykle jako první odhalí rodiče (pokud ovšem žije dítě ve stimulující rodině), nebo na ně upozorní učitelé.

Na základě práce s dětmi v předškolním a mladším školním věku a z rozhovorů s jejich rodiči a učiteli uvádějí Blažková, Sytařová (2007) některé projevy matematicky nadaných dětí v oblasti aritmetických, algebraických a geometrických představ: V oblasti aritmetické mají nadané děti přesnou představu přirozeného čísla, někdy i dalších číselných oborů (záporných čísel, zlomků nebo desetinných čísel), orientují se v číselné řadě, chápou podstatu poziční číselné soustavy. Některé děti se zajímají o písmena, číslice i čísla od dvou let, ve třech letech je již umí zapsat. Děti provádějí číselné operace sčítání a odčítání dokonce i s vícecifernými čísly z paměti. V šesti letech počítají na úrovni žáka 2. stupně ZŠ a účelně používají kalkulátor.

V oblasti geometrických představ prokazují velmi dobrou úroveň geometrické a prostorové představivosti, správně identifikují geometrické útvary. Skládají různé složité skládky, puzzle i hlavolamy, sestavují složité modely a stavby ze stavebnice. Některé děti dokáží s porozuměním číst plánek stavby, nebo jej vytvořit.

V oblasti algebraické dokáží velmi brzy zobecňovat, přejít od konkrétního názorného myšlení k abstraktnímu. Mají poměrně dobře rozvinuté slovně logické komponenty (dokáží symbolicky zapsat a pochopit vyjádření číselného nebo algebraického výrazu, např. „Číslo 5 zvětší o tři“, nebo „Číslo x zvětší o 3“). Chápou závislosti, objeví jejich princip. Problémy jim nečiní řešení úloh s kombinatorickými náměty, projevuje se u nich pravděpodobnostní myšlení, dokáží posoudit, co je více, či méně pravděpodobné. Se zájmem řeší logické i slovní úlohy.

V obecné rovině se u dětí projevuje výrazná vnitřní motivace, podněty svého zájmu si zpravidla vyhledávají samy. Zajímají se o řešení problémů, které doposud neřešily. Činí jim nesmírné potěšení, když se jim podaří na něco přijít nebo něco objevit. Snaží se všemu přijít na kloub, mají potřebu zdůvodnění, proč tomu tak je. Zajímají se o funkci různých přístrojů a aktivně je zkoumají. Umí identifikovat společné i rozdílné rysy předmětů, mimořádně si všímají rozdílů a detailů, např. rozlišují osobní automobily pomocí tvaru karoserie, do největších podrobností zkoumají vlaky, letadla aj. Hrají různé deskové hry, hry ve kterých je třeba uplatnit strategii, umí vytvořit počítačové programy, čtou encyklopedie a vyhledávají v nich to, co je zajímavé. Dokáží se plně koncentrovat na oblast svého zájmu a v této oblasti prokazují zpravidla vynikající znalosti (i když jiné poznatky a dovednosti jim mohou chybět). Projevuje se u nich kreativní myšlení, jsou zvědavé cílevědomé, dokáží pokládat otázky, které dospělí lidé vůbec nenapadnou. Samy jsou schopny vymyslet vlastní strategii řešení úlohy. Ve škole vyžadují úkoly navíc, aniž by to vnímaly jako práci navíc. Zpravidla dokáží vědomosti účelně využívat v dalším učivu, dokáží si vytvářet systém a chápou vztahy mezi jednotlivými pojmy. Při řešení úloh dokáží opustit stereotypní postupy nebo oprostít se od určitých omezení a jsou schopni vymyslet originální nebo netradiční řešení s jistou mírou vhledu a vtipu.

Příprava budoucích učitelů k objevování a rozvíjení talentu matematicky nadaných dětí

Zatímco žáci vyšších stupňů škol, u kterých se projeví výrazné matematické nadání, mají obvykle podporu svého učitele-matematika a svůj talent rozvíjejí účastí v různých soutěžích, matematických olympiádách nebo přestupem do speciálních matematických tříd, u nadaných žáků na 1. stupni základní školy je situace složitější. Informovanost učitelů, zejména na 1. stupni ZŠ, však zatím není dostačující a také v přípravě budoucích učitelů jsou v této oblasti značné rezervy. Problém je jak

v identifikaci, tak v následné péči o nadaného žáka zejména v nižších ročnících. Zde sice mohou pomoci pedagogicko psychologické poradny, budoucí učitelé by však měli být připravováni na práci s dětmi nadanými stejně jako na práci s dětmi s jinými specifickými potřebami učení.

Zaměříme se dále na přípravu studentů – budoucích učitelů na 1. stupni ZŠ v oblasti rozvíjení matematického talentu dětí. Jaké aspekty je třeba mít na zřeteli při zařazení této problematiky do kurzu matematiky a didaktiky matematiky ve studiu učitelství pro 1. stupeň ZŠ? Aby byli studenti jako budoucí učitelé schopni a připraveni rozvíjet matematické talenty, je třeba

- aby v první řadě měli sami zájem o práci s nadanými žáky, měli sami pozitivní vztah k matematice,
- aby dokázali identifikovat nadané žáky a seznámili se s typy nadaných dětí,
- aby se seznámili s různými přístupy a formami práce s nadanými žáky,
- aby byli schopni odhalit a akceptovat netradiční, originální způsoby řešení úloh těmito žáky,
- aby akceptovali jejich snahu přijít na podstatu věci, na jejich systém práce a požadavek na preciznost vyjádření,
- aby dokázali vytvářet podněcující situace,
- aby měli k dispozici, či dokázali si sami vyhledat nebo vytvořit úlohy, kterými lze matematické nadání rozvíjet,
- aby byli připraveni i na případné problémy nadaných dětí v sociální a emocionální oblasti.

Naplnit již první z uvedených požadavků není jednoduchý úkol. Na pedagogickou fakultu do studia učitelství pro 1. stupeň ZŠ většinou přicházejí studenti, kteří neměli výrazný zájem o matematiku. Jen výjimečně některý z nich maturoval z matematiky. Často jsou absolventy pedagogických škol, kde je slabá matematická příprava. Většinou se nijak netají tím, že je pro ně matematika „nutné zlo“. Při hlubším zamyšlení se nad užitečností a potřebností matematiky v anketách, které s nimi během studia realizujeme, si uvědomují, že jejich vztah k matematice ovlivnili především učitelé na různých stupních škol. Obvykle se ukáže, že jejich zpočátku pozitivní vztah k matematice se začal měnit v negativní v okamžiku, kdy učivu přestávali rozumět a nezažívali pocit úspěchu. Zamýšlíme se tedy nad tím, jak postupovat již v teoretických disciplínách, které předcházejí didaktice, abychom tuto nepříjemnou situaci napravili, když v nejbližší době nelze spoléhat na výraznou změnu postoje i předpokladů přicházejících studentů k matematice. Odstranění negativního vztahu studentů k matematice vidíme v přitažlivějším přístupu a volbě takových metod a forem práce, abychom docílili toho, že budou probírané látky rozumět. Osvědčilo se nám zařazení dvouhodinového volitelného semináře z matematiky od prvního ročníku do každého semestru, který je studenty hojně navštěvován, v němž se probíraná látka prohlubuje, opakují se problematické části učiva a je zde prostor a čas na to, abychom využívali metody a formy práce, které mohou sami uplatnit ve výuce na základní škole. Kromě toho sem průběžně zařazujeme zajímavé a problémové úlohy, matematické hádanky apod. většinou vybrané z matematických soutěží. Úkolem studentů je vyřešit tyto úlohy prostředky žáka 1. stupně ZŠ, svoje postupy zdůvodnit, uvažovat o eventuelních dalších způsobech řešení a zhodnotit je z hlediska efektivnosti.

Dalším výše uvedeným požadavkům na přípravu studentů k práci s nadanými žáky je k dispozici větší prostor v didaktických disciplínách, tj. v Didaktice matematiky a volitelných předmětech Metody řešení matematických úloh a Specifické vzdělávací potřeby v matematice, kde bylo dříve přece jen věnováno více pozornosti dětem s poruchami učení. Zatím jedním z úkolů, které plní studenti při své průběžné pedagogické praxi, je pozorovat projevy dítěte vyžadujícího specifický přístup v matematice a dále sledovat a pomoci učiteli při práci s ním. Ukazuje se, že v případě nadaného žáka si často studenti (někdy i učitelé) nedokáží poradit tak, aby jeho práce byla dostatečně produktivní. Například zadávají žákovi navíc úkoly stále stejného typu, na nichž procvičuje pouze učivo, které již umí. Nebo je žák nucen řešit úlohy jednotným naučeným postupem, který mu nevyhovuje a je pro něj zdoluhavý. Žák pak ztrácí motivaci, není spokojený a nerozvíjí se tak, jak by mohl a měl. Setkáváme se i s obavami některých studentů pracovat s nadaným žákem.

Ve volitelném semináři Metody řešení matematických úloh studenti získají poznatky o různých způsobech řešení matematických úloh obecně a speciálně úloh řešených na 1. stupni ZŠ. Seznámí se s možnostmi řešení úloh počínaje elementárními metodami až ke specifickým postupům využívajících různé úrovně matematického aparátu. To je předpokladem toho, aby byli schopni analyzovat různé způsoby řešení úloh žáky a odhalit jejich myšlenkové postupy. V semináři je také prostor na to, aby studenti v literatuře vyhledávali, sami tvořili a navrhovali další úlohy a problémy, které nejsou přímo závislé na učivu. Ve volitelném semináři Specifické vzdělávací potřeby v matematice se studenti hlouběji zabývají problematikou mimořádně matematicky nadaných dětí, způsoby a nástroje jejich identifikace, charakteristikami nadaných dětí, včetně jejich vztahu k okolí a s možnými úpravami způsobu výuky mimořádně matematicky nadaných dětí. V semináři využíváme zkušenosti studentů, kteří v rámci výzkumu a přípravy diplomových prací spolupracují s Centrem rozvoje nadaných dětí při Fakultě sociálních studií Masarykovy univerzity a individuálně pracují s matematicky nadanými dětmi na 1. stupni základní školy. Své kolegy podrobně seznamují s projevy matematického nadání konkrétního dítěte, ale i s projevy jeho chování ve škole, v rodině a charakteristikami v ostatních oblastech. Velmi zajímavé a cenné jsou zážitky studentů ze schůzek se svěřeným dítětem. Studenti rozebírají společné pozitivní charakteristiky nadaných, uvědomují si jejich odlišnosti, diskutují o problémech spojených s nadáním dětí a uvažují o vhodném řešení. Vyměňují si zkušenosti, prezentují překvapivé reakce dítěte na různé podněty a ukazují úlohy, které dětem zadali a při nichž se projevil netradiční a originální přístup nadaného dítěte k řešení.

Naším záměrem je, aby studenti učitelství pro 1. stupeň základní školy byli schopni rozpoznat matematické nadání dítěte. a udělali maximum pro to, aby mohlo svůj talent co nejlépe rozvíjet.

Literatura

1. BLAŽKOVÁ, R., SYTAŘOVÁ, I. *Nadané děti a matematika*. In Dimenze pedagogické práce s nadanými žáky. CD ROM, Brno, MSD 2007. ISBN 978-80-7392-006-7.
2. DOČKAL, V. *Zaměřeno na talenty aneb nadání má každý*. Praha: Nakladatelství Lidové noviny, 2005. ISBN 80-7106-840-3.

3. PORTEŠOVÁ, Š. *Obtíže v identifikování rozumově nadaných žáků a studentů*. Centrum rozvoje nadaných dětí. Dostupné na www: <<http://www.nadanedeti.cz>>
4. PRÍDAVKOVÁ, A. *Příprava učitelov elementaristov na prácu so žiakmi nadanými na matematiku*. In: *Příprava učitelov elementaristov a evropský multikultúrný priestor*. Prešov: PF PU v Prešove, 2005. s. 401 – 404. ISBN 80-8068-372-7.
5. VONDRÁKOVÁ, E. *RVP ZV a zkušenosti s nadanými a mimořádně nadanými žáky na 1. stupni ZŠ*. Metodický portál RVP ZV. 2006. Dostupné na www: <<http://www.rvp.cz/clanek/687/630>>
6. *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*. Dostupné na: <<http://www.vuppraha.cz>>

*Príspevek byl zpracovaný jako součást výzkumného záměru MSM 0021622443
Speciální potřeby žáků v kontextu Rámcového vzdělávacího programu pro základní
vzdělávání.*

Kontaktní adresa

*RNDr. Milena Vaňurová, CSc.
Katedra matematiky
Pedagogická fakulta MU
Poříčí 31, 603 00 Brno
Telefon: +420 549 491 678
E-mail: vanurova@ped.muni.cz*

KUŽELOSEČKY V CABRI

Tomáš ZDRÁHAL

Abstrakt

Nejlepší způsob, jak žákům základní školy přiblížit kuželosečky (a ostatně i další rovinné křivky) je dát jim návod, jak si je mohou sami vytvořit. Tradiční metoda “skládáním listu papíru” může být nahrazena dynamickým kreslením v Cabri Geometrii. Smyslem tohoto příspěvku je tuto metodu a postup ukázat

CONE SECTIONS IN CABRI

Abstract

The best way how students could be familiarized with cone sections (and actually with other plane curves) is to give them the instruction how they can form these curves by themselves. The traditional method “by folding of paper” can be replaced by dynamic drawing in Cabri Geometry. The aim of this paper is to show how it is possible to substitute this folding by roughing lines instead of crease of the paper. Cabri Geometry is very good tool to do it.

Využití moderních technických prostředků pro podporu vyučování matematice je bezesporu nosnou myšlenkou. Ukážeme, je dobrý prostředek k tomu, aby si žáci základní školy udělali dobrou představu o kuželosečkách, aniž o nich někdy předtím slyšeli.

Máme-li tedy k dispozici nainstalovaný program Cabri Geometrie (nebo nějaký grafický kalkulátor vyšší řady firmy Texas Instruments), naučíme se nejprve

- sestrojit přímku procházející daným bodem a kružnici s daným středem a daného poloměru
- umístit body do roviny a narýsovat úsečku danou dvěma body
- sestrojit osu úsečky
- nakreslit „stopu“ a „množinu bodů“ pohybujícího se objektu.

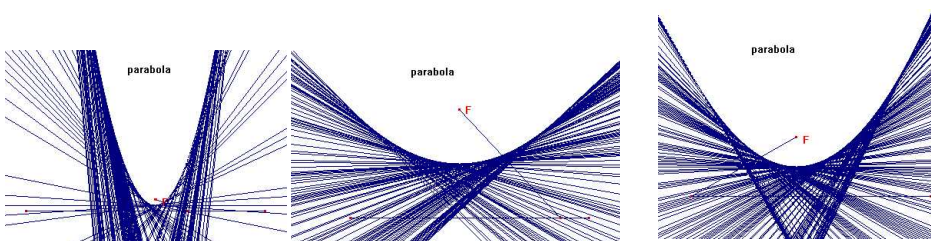
Předchozí úkony jsou v Cabri Geometrii realizovatelné snadno a intuitivně – s pomocí nápovědy je učitel zvládne téměř okamžitě. S jeho pomocí vše zvládnou bez problémů i všichni žáci a může se přistoupit ke kreslení kuželoseček.

Parabola

Narýsujeme úsečku a sestrojíme bod F , který na ní neleží. Označíme libovolný bod narýsované úsečky. Tyto dva body spojíme úsečkou. Sestrojíme osu této úsečky a zvolíme možnost „Stopu ano“. Označíme narýsovanou osu a pohybujeme bodem po úsečce. Program sám narýsuje množinu os; obálka této množiny má tvar paraboly. Pokud budeme chtít narýsovat jen tuto obálku, tj. tuto parabolu, zvolíme možnost „Množina bodů“.

Toto rýsování je pro žáky atraktivní, proto je nemusíme ani příliš pobízet k tomu, aby narýsovali a porovnali další paraboly, které se od původní budou lišit tím, že bod F bude mít větší, resp. menší vzdálenost od dané úsečky.

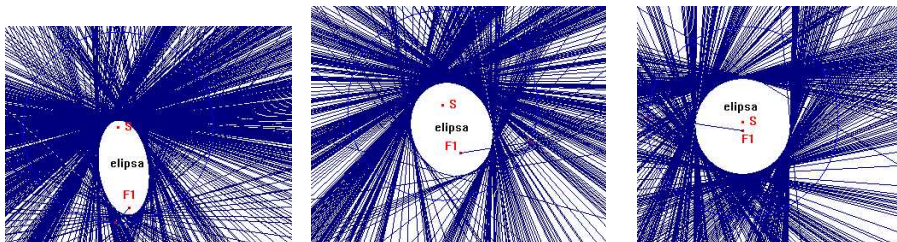
Pokud jsou žáci s programem Cabri Geometrie seznámeni poněkud více, můžeme je vhodnými úkoly a návodními otázkami nasměřovat k tomu, že zjistí, že parabola je množina bodů v rovině, které mají od bodu F (tzv. ohnisko paraboly) stejnou vzdálenost jako od přímky, která je v určena úsečkou, již celý obrázek začínali.



Elipsa

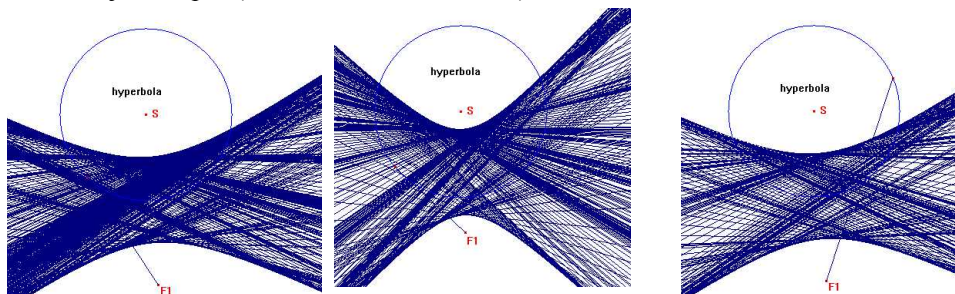
Narýsujeme kružnici se středem S a ve vnitřku kruhu určeného touto kružnicí označíme libovolný bod $F1$. Tento bod spojíme s libovolným bodem kružnice; tímto způsobem obdržíme úsečku a sestrojíme její osu. S touto osou pracujeme stejně jako v případě paraboly. Potom opět narýsujeme další elipsy, tak že zvolíme jiný bod $F1$. Budeme pozorovat, jak se elipsa „zakulacuje“, resp. „protahuje“, přibližuje-li se bod $F1$ ke středu kružnice S , resp. se od něho vzdaluje. Co se stane, pokud body $F1$ a S splynou?

Nakonec můžeme žákům demonstrovat, že vzniklá křivka má tuto vlastnost: Součet vzdáleností libovolného pevného bodu elipsy od bodu $F1$ (tzv. první ohnisko elipsy) a téhož bodu elipsy od bodu S (tzv. druhé ohnisko elipsy – obvykle značené $F2$) je konstantní.



Hyperbola

Budeme postupovat jako v předchozím případě, s tím rozdílem, že tentokrát bod F_1 umístíme vně kruhu určeného kružnicí. Také zde nakreslíme různé hyperboly tím, že měníme bod F_1 . Závěrem necháme žáky zkoumat, zda také hyperbola nemá podobnou vlastnost jako elipsa (viz součet vzdáleností ...)



Uveďme ještě, že počítačový program Cabri Geometrie je zřejmě nejrozšířenější ze všech softwarů tohoto typu a jak jsme se snažili ukázat (a jak jsem sami zjistili), dá se s úspěchem použít jako vhodná učební pomůcka i při výuce matematiky na základní škole.

Literatura

1. BENNET, A., NELSON, L. *Mathematics, an activity approach*. Allyn and Bacon, Inc., Boston, London, Sydney, Toronto, 1985.
2. MILLER, C., HEEREN, V. *Mathematical ideas*. Scott, Foresman, Glenview, Illinois, Oakland, London, 1982.

Kontaktní adresa

Tomáš Zdráhal
Katedra matematiky PF UJEP
Hoření 13, 400 96 Ústí nad Labem
Katedra matematiky PdF UP,
Žižkovo nám. 5, 771 40 Olomouc
E-mail: zdrahalt@pf.ujep.cz

PROJEKT „MATEMATIKA PRE ŽIVOT“ AKO JEDNA Z MOŽNOSTÍ ROZVÍJANIA MATEMATICKEJ GRAMOTNOSTI 10-ROČNÝCH ŽIAKOV

Veronika ZEĽOVÁ

Abstrakt

Jedným z cieľov vyučovania matematiky na 1. stupni základnej školy je okrem iného pripraviť žiaka na vysporiadanie sa s úlohami z reálneho života, na riešenie ktorých je potrebné použiť matematický aparát. Formovanie matematickej gramotnosti je celoživotný proces a škola v ňom má nepochybne dôležitú úlohu. V príspevku informujeme o projekte „Matematika pre život“, ktorý sme realizovali vo štvrtom ročníku vybraných základných škôl v školskom roku 2006/2007. Zároveň v ňom ponúkame čiastočné štatistické vyhodnotenie realizovaného experimentu.

PROJECT „MATHEMATICS FOR LIFE“ AS A WAY OF DEVELOPING MATHEMATICAL COMPETENCES OF 10 YEARS OLD PUPILS

Abstract

One of the goal of mathematical education at primary school is to prepare pupil for solving problems in real life, which demand using mathematical knowledge. Formation of mathematical literacy is whole-life process and school plays an important role in this process. In this contribution we are informing about the project „Mathematics for life“, which we realized in the 4th grade of chosen primary schools in the schoolyear 2006/2007. We also offer partial statistical interpreting of realized experiment.

1. Úvod

Pre jednotlivca je dôležité nielen disponovať vedomosťami z matematiky, ale aj vedieť tieto vedomosti aktivizovať pri riešení problémov reálneho života, ktoré vyžadujú použitie matematického aparátu. Matematika by ho mala naučiť nielen „počítať s číslami“, ale mala by mu aj napomôcť pri logickom myslení, usudzovaní, zovšeobecňovaní, triedení dostupných informácií a pod. V minulosti bol gramotný ten, kto vedel písať a čítať. V súčasnom svete nám však tieto zručnosti nestačia. Ako ukazujú medzinárodné výskumy zaoberajúce sa skúmaním matematickej gramotnosti (OECD PISA 2003, OECD PISA 2006, IEA TIMSS), naši žiaci nevedia dostatočne prepojiť vedomosti získané na hodinách matematiky s reálnym životom. Výsledky našich žiakov boli oproti výsledkom žiakov z iných krajín len priemerné. Podľa nášho názoru, s formovaním matematickej gramotnosti je potrebné začať už na prvom stupni základnej školy. Preto sme sa pokúsili navrhnúť projekt na jej rozvoj pre žiakov tretieho a štvrtého ročníka základnej školy

2. O projekte „Matematika pre život“

Analýza úloh, ktoré obsahujú didaktické materiály štandardne používané v treťom a štvrtom ročníku základnej školy ukázala, že učebnice a pracovné zošity obsahujú len nepatrné množstvo úloh rozvíjajúcich druhú a tretiu úroveň matematických kompetencií žiakov (kompetencie na úrovni prepojenia a reflexie - podľa členenia štúdie OECD PISA). Preto sme sa rozhodli navrhnúť zbierku pracovných listov, ktoré obsahujú práve úlohy rozvíjajúce matematickú gramotnosť na týchto úrovniach a ktoré môžu učitelia v praxi použiť ako doplnkový materiál na jej rozvoj. Rodičom žiakov zúčastnených výskumu bol zadaný dotazník, v ktorom sme sa pokúsili zistiť, s akými oblasťami z reálneho života sa žiaci primárnej školy dostávajú do kontaktu. Na základe týchto informácií sme vypracovali pracovné listy a zrealizovali v školskom roku 2006/2007 vyučovacie hodiny v treťom aj štvrtom ročníku na nasledujúce témy:

- V obchode
- V reštaurácii
- V cukrárni
- O čase
- Počítame úlohy o čase
- Návšteva divadla
- O matematických hrách
- Teplota
- Zdravie a choroba
- Zariadíme si izbu

V príspevku sa budeme zaoberať čiastkovými výsledkami výskumu realizovaného vo štvrtom ročníku základnej školy, ktorého sa zúčastnilo 161 žiakov (z toho 69 dievčat a 92 chlapcov), ktorí tvorili kontrolnú skupinu a 153 žiakov (z toho 77 dievčat a 76 chlapcov), ktorí tvorili experimentálnu skupinu.

Žiaci oboch skupín absolvovali vstupný test, ktorý sa skladal z dvoch častí. V prvej časti sme prostredníctvom exemplifikačných úloh zisťovali úroveň získaných vedomostí žiakov, ktoré nadobudli v priebehu štandardného edukačného procesu. V druhej časti vstupného testu sme prostredníctvom modifikovaných úloh výskumov OECD PISA a IEA TIMSS, ktoré boli prispôsobené schopnostiam a vedomostiam žiakov primárnej školy, zisťovali úroveň ich matematických kompetencií. Na základe vstupného testovania boli vytvorené dve rovnocenné skupiny, pričom v jednej z nich (experimentálnej) sme v priebehu školského roka 2006/2007 realizovali výučbu na vyššie uvedené témy (celkom 10 vyučovacích hodín v priebehu roka). V rámci každej vyučovacej hodiny žiaci okrem iného riešili jeden pracovný list, ktorý obsahoval úlohy zo života, na riešenie ktorých bolo nevyhnutné použiť matematický aparát. Žiaci pracovali s pracovnými listami samostatne, v niektorých prípadoch bola umožnená žiakom práca v skupinách. V priebehu vyplňania pracovného listu mali žiaci možnosť prekonzultovať úlohy s učiteľom. Hodiny sme tiež doplnili o didaktické hry, rozhovory so žiakmi, opakovanie a výklad učiva. V kontrolnej skupine prebiehala počas školského roka tradičná výučba.

3. Charakteristika výstupného testu

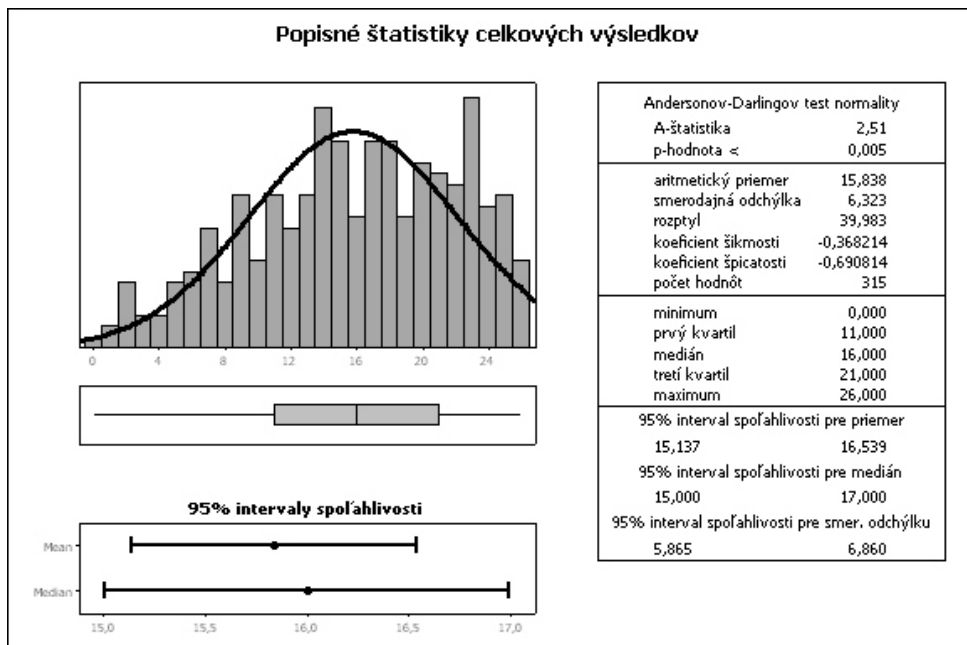
Výstupný test obsahoval 8 úloh, ktorých podrobnejší popis uvádzame v nasledujúcej tabuľke. Test bol zadaný žiakom v kontrolnej aj experimentálnej skupine na konci školského roka. Žiaci mali na vypracovanie testu 45 minút. Úlohy obsahovo pokrývali témy, ktorým sme sa počas školského roka venovali so žiakmi experimentálnej skupiny. Úplný text výstupného testu je dostupný na stránke www.matematickapointa.sk, ktorá bola vytvorená v rámci grantového projektu *Moderné informačno-komunikačné technológie ako prostriedok ďalšieho vzdelávania učiteľov-elementaristov v matematike* (MŠ SR KEGA 3/3027/05). Na stránke je tiež okrem iného možné nájsť ukážky vybraných pracovných listov, vstupné testy pre žiakov 3. a 4. ročníka, príspevky zaoberajúce sa matematickou gramotnosťou žiakov, ktoré boli publikované v zborníkoch z domácich aj medzinárodných konferencií.

Názov úlohy	Zdroj	Úroveň skúmaných kompetencií	Prepojenie s učivom základnej školy
Knihovnička	OECD PISA	Prepojenie	Delenie so zvyškom
Teplota	IEA TIMSS	Prepojenie	Celé čísla
Kroky	IEA TIMSS	Prepojenie	Násobenie prirodzených čísel, Slovné úlohy, Meranie dĺžky, Premena jednotiek
Cesta do školy	IEA TIMSS	Prepojenie	Práca s grafmi a tabuľkami
Plánovanie	IEA TIMSS OECD PISA	Reflexia	Orientácia v čase, Slovné úlohy
Čas	IEA TIMSS OECD PISA	Prepojenie	Orientácia v čase
Teplota II.	IEA TIMSS	Reprodukcia	Desatinné čísla
Detská izba	IEA TIMSS	Reflexia	Mierka mapy, Hľadanie jednoduchšej stratégie na vyriešenie problému

Tab. 1 Charakteristika úloh použitých vo výstupnom testovaní

4. Vyhodnotenie výstupného testovania

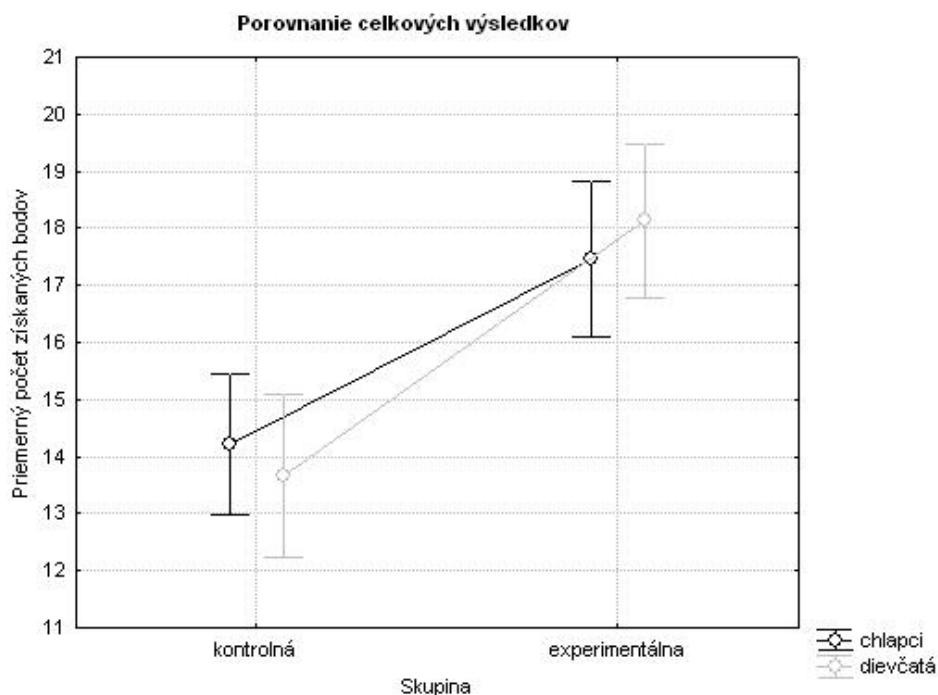
Na overenie normality získaných výsledkov sme použili Andersonov-Darlingov test, ktorý potvrdil normálne rozdelenie dát. Jednotlivé popisné charakteristiky týchto výsledkov uvádzame v nasledujúcom prehľade.



Obr. 1 Popisné štatistiky celkových výsledkov¹

¹ Hodnoty boli vypočítané štatistickým softvérom Minitab 15

Porovnanie výsledkov, ktoré dosiahli kontrolná a experimentálna skupina uvádzame v nasledujúcom grafe. Z grafu môžeme vidieť, že medzi experimentálnou a kontrolnou skupinou boli zaznamenané štatisticky významné rozdiely v prospech experimentálnej skupiny. Medzi chlapcami a dievčatami sme nezaznamenali významné rozdiely ani v kontrolnej, ani v experimentálnej skupine. Štúdia OECD PISA 2003 však uvádza, že chlapci boli v riešení úloh zo života úspešnejší ako dievčatá. Na základe nášho výskumu sa domnievame, že tento rozdiel medzi pohlaviami sa vytvára a formuje až na druhom stupni základnej školy.



Obr. 2 Porovnanie celkových výsledkov výstupného testu medzi kontrolnou a experimentálnou skupinou²

Faktorová analýza zozbieraných údajov ukázala, že žiaci experimentálnej skupiny boli úspešnejší ako žiaci kontrolnej skupiny v nasledujúcich úlohách: Cesta do školy, Čas, Detská izba, Knihovnička, Kroky, Teplota, Teplota II. V úlohe Teplota sme zaznamenali zároveň aj významný rozdiel medzi chlapcami a dievčatami v kontrolnej aj v experimentálnej skupine. V úlohe Plánovanie sme nezaznamenali štatisticky významný rozdiel medzi skupinami ani medzi pohlaviami. Na základe uvedeného zistenia a vlastných skúseností konštatujeme, že rozvíjanie tretej úrovne matematickej gramotnosti (úroveň reflexie) je náročnejší a dlhodobejší proces, preto podľa nášho názoru dosiahli žiaci experimentálnej skupiny v týchto úlohách len nepatrne lepšie výsledky.

² Graf bol vytvorený v štatistickom programe STATISTICA Cz 7

5. Záver

Problematika rozvíjania matematickej gramotnosti žiakov sa stáva v súčasnom svete veľmi aktuálnou. Cieľom vzdelávania je okrem iného aj rozvíjanie schopnosti žiaka vysporiadať sa s problémami reálneho života. Na riešenie niektorých úloh je nevyhnutné použiť matematický aparát, avšak ako ukazujú medzinárodné výskumy, naši žiaci nevedia v dostatočnej miere prepojiť vedomosti získané v škole so skutočným životom. Experiment, ktorý sme realizovali vo štvrtom ročníku základnej školy ukázal, že zaradením vhodných úloh do vyučovania matematiky je možné rozvíjať matematickú gramotnosť žiakov. Učitelia z praxe uvádzajú, že tvorba takýchto úloh je pre nich časovo náročná, preto v škole využívajú len dostupné didaktické prostriedky, ktoré podľa našej analýzy obsahujú nedostatočné množstvo úloh rozvíjajúcich najmä vyššie úrovne matematickej gramotnosti. Preto na stránke Katedry matematickej edukácie PdF PU www.matematickapointa.sk ponúkame učiteľom na stiahnutie úlohy, ktoré sa prioritne zameriavajú na rozvoj matematických kompetencií žiaka primárnej školy.

Experiment tiež ukázal, že nie je štatisticky významný rozdiel v úrovni matematickej gramotnosti medzi 10-ročnými chlapcami a dievčatami. Medzinárodná štúdia OECD PISA 2003 však uvádza, že chlapci disponujú vyššou úrovňou matematickej gramotnosti ako dievčatá. Príčiny tejto zmeny môžu byť rôzne, mohli by sme ich hľadať napríklad aj vo vyučovaní matematiky na druhom stupni základnej školy.

Literatura

1. HENDL, J. *Přehled statistických metod zpracování dat*. 2. vyd. Praha: Portál, 2006. ISBN 80-7367-123-9
2. KUBÁČEK, Z. a kol. *Matematická gramotnost' – správa*. Bratislava: ŠPÚ, 2004. ISBN 80-85756-89-9
3. SCHOLTZOVÁ, I. – ZEĽOVÁ, V. Jeden pohľad na diagnostikovanie matematickej gramotnosti. In *Inovácia v matematickej príprave žiakov na 1. stupni ZŠ*. Trnava: Trnavská univerzita, 2008. ISBN 978-80-8082-158-6
4. TOMÁŠEK, V. a kol. *Třetí mezinárodní výzkum matematického a přírodovědného vzdělávání*. Praha: UIV, 1998. ISBN 80-211-0298-5

Príspevok bol spracovaný ako súčasť grantového projektu „Moderné informačno-komunikačné technológie ako prostriedok ďalšieho vzdelávania učiteľov-elementaristov v matematike“ MŠ SR KEGA 3/3027/05

Kontaktní adresa

Mgr. Veronika Zeľová

Katedra matematickej edukácie, Pedagogická fakulta PU

Ul. 17. novembra 1, 081 16 Prešov, Slovensko

Telefon: +421 51 7470 544

E-mail: zelova@unipo.sk

INTERPRETAČNÉ PARADOXY V INTERNETOVEJ ŽIACKEJ KNIŽKE.

Katarína ŽILKOVÁ

Abstrakt

V snahe zintenzívniť komunikáciu školy s rodičmi žiakov často prebieha zverejňovanie zaznamenaných priebežných hodnotení a rôznych oznamov prostredníctvom informačno-komunikačných technológií. Funkciu komunikačného a informačného prepojenia školy s rodičmi v súčasnosti plní na mnohých školách internetová žiacka knižka. Spracovávanie elektronickej učiteľskej agendy je podmienené znalosťou základných princípov práce s údajmi. Kumuláciou interpretačných, matematických a prezentačných chýb môžu nastať paradoxné situácie so závažným dopadom na realitu.

INTERPRETATIVE PARADOXES IN INTERNET STUDENTS' GRADE BOOK

Abstract

In the effort to intensify the communication between the school and students' parents, the school often announces registered markings and various announcements by means of information and communication technologies. At many schools the function of communicative and informative interconnection is played by the internet students' grade book. Teacher's electronic recordkeeping requires basic data management and processing skills. Cumulation of interpretative, mathematical or presentational errors may lead to paradoxical situations with a significant impact on the real life.

1. Elektronická učiteľská agenda

Ku komplexnej práci učiteľa patrí administrácia učiteľskej agendy nielen o študijných výsledkoch svojich žiakov. Preto k základným kompetenciám učiteľa matematiky patrí evidencia parciálnych výsledkov svojich žiakov a ich spracovávanie, ktoré je zväčša ukončené hodnotením žiaka a informovaním rodičov.

Okrem písomných záznamov do relevantných pedagogických dokumentov a žiackych knižiek sa v poslednom období vyžadujú od učiteľov rôzne elektronické výstupy prostredníctvom informačno-komunikačných prostriedkov. Čoraz väčšej obľúbenosti sa zo strany rodičov tešia informačné zdroje zo strany školy, ktoré uľahčujú komunikáciu medzi školou, jednotlivými učiteľmi, rodičmi a žiakmi. Internetový portál s názvom "Škola na webe" (www.skolanawebe.sk) poskytuje školám produkty na administráciu kompletnej školskej agendy, od evidencie žiakov, zamestnancov, sledovanie ich dochádzky, spracovanie študijných výsledkov žiakov až po možnosť informovania rodičov. S aktívnym využívaním elektronickej učiteľskej agendy úzko súvisí nutnosť vzdelávať všetkých učiteľov prvého stupňa nielen v oblasti informačnej

gramotnosti, ale hlavne vo vyššie naznačenej oblasti spracovania údajov, vrátane využívania základných matematických štatistik a ich správnej interpretácie.

Pod spracovaním údajov rozumieme ich zber, zaznamenávanie, organizovanie, triedenie, grafickú reprezentáciu a korektnú interpretáciu. Definíciu pojmov *údaj* a *informácia* špecifikuje E. Partová, pričom zdôrazňuje “význam reprezentácie údajov z hľadiska ich informačnej hodnoty” (Partová, 2000, str. 116). Nasledujúca úloha poukazuje na potenciálne problémy, ktoré sa môžu vyskytnúť so spracovaním žiackych výsledkov na základe údajov získaných z internetovej žiackej knižky.

Úloha: V priložených údajoch (obr. 1, obr. 2) sú informácie o štvrtročnom študijnom výsledku žiaka sekundy osemročného gymnázia. Údaje sa pokúste spracovať tak, aby ste rodičovi poskytli prehľadnú informáciu o prospechu jeho dieťaťa.

Anglický jazyk	35/40b 9/10b
Biológia	10/10b 28. 5/30
Dejepis	1/3b 20/20b
Fyzika	2/0b 1/0b
Geografia	10/10b 3/0b 22/20b 1/0b 10/10b
Informatika	
Matematika	7/5 12/14 19/20
Nemecký jazyk	10/10b 1/1b 26/27b
Slovenský jazyk a literatúra	13/10b 20/20 20/20 10/10 10/10 13/10 34/35 32/35

Obr. 1. Údaje o štvrtročnom študijnom výsledku žiacky osemročného gymnázia získané z internetovej žiackej knižky.

Obr. 2. Klasifikačná transformačná tabuľka percentuálneho hodnotenia.

Percentuálne hodnotenie
100% - 90% výborný
89% - 75% chváľitebný
74% - 60% dobrý
59% - 45% dostatočný
44% - 0% nedostatočný

Autentické údaje na obr. 1 a obr. 2 sú získané z internetovej žiackej knižky bratislavského gymnázia a sú uvedené v pôvodnej podobe.

2. Problém interpretácie údajov

Z predložených údajov na obrázku je zrejmé, ktoré predmety sú klasifikované, pričom priebežné hodnotenie je vyjadrené bodovým pomerom. Priložená je tiež informácia, podľa ktorej je možné realizovať transformáciu percentuálneho hodnotenia na tradičnú klasifikačnú známku. *Vstupnými údajmi* teda sú: *názov vyučovacieho predmetu, bodové skóre žiaka a klasifikačná tabuľka*. Kým názov predmetu a percentuálny prepočet sú jednoznačne definované, bodové skóre žiakov môže pri interpretácii robiť problém.

Z anglického jazyka žiačka získala 35 bodov z celkového možného počtu 40 bodov a z ďalšieho testovania 9 bodov z 10 bodov. Teda, bez ujmy na všeobecnosti, môžeme zápis „a/b“ v uvedenej internetovej žiackej knižke interpretovať ako *pomer počtu žiakom získaných bodov k počtu všetkých bodov, ktoré bolo možné získať*. Uvedená situácia z anglického jazyka je štandardná a nerobila riešiteľom predloženej úlohy

žiaden problém pri interpretácii zápisu, ani pri následnom prevode na percentuálne vyjadrenie. Avšak z matematiky je výsledok prvého testovania zapísaný 7b/5b, čo mnohí z riešiteľov úlohy interpretovali ako 5b/7b (k dispozícii nebola žiadna dodatočná legenda pre korektnú interpretáciu zápisu). Rodič žiaka, ktorý má prístup k uvedeným údajom potrebuje dodatočnú informáciu o tom, čo znamená, že žiak získal z celkového počtu piatich bodov až sedem bodov. Zrejme sa jedná o prémiové body, napr. za originalitu riešenia, prípadne iné bonusy. Viacerí z riešiteľov akceptovali pre nich prijateľnejšiu verziu a v bodovom vyjadrení bez problémov a komentára vymenili poradie hodnôt v skóre. Pri tejto chybnnej interpretácii sa ľahko môže stať, že napr. z fyziky bude výsledné hodnotenie žiaka nedostatočný namiesto výborný. Na ilustráciu uvedieme záver jednej riešiteľky tejto úlohy: “Vo fyzike je potrebné zistiť dôvody neúspechu a popracovať na zmene. Pozor na oscilovanie v geografii...”.

V žiačkinom bodovom hodnotení z fyziky a geografie sa vyskytuje ešte jeden fenomén, ktorý mohol byť príčinou citovaného tvrdenia. Výskyt *číslice nula* v zápise „a/0“, pri čítaní údajov so zameneným poradím v uvedenom pomere, spôsobí hodnotenie nedostatočný. Iná interpretácia, t.j. že žiačka získala *a* bodov, pričom bolo možné získať nula bodov, už núti k zamysleniu a predpokladu istej bonifikácie. Avšak aj táto interpretačná korekcia môže následne spôsobiť ťažkosti jednak z hľadiska chápania zápisu ako zlomku, a jednak aj v ďalšom kroku z hľadiska matematického spracovania údajov z internetovej žiackej knižky.

3. Problém matematického spracovania údajov

Klasifikačná transformácia bodových ziskov žiaka na tradičnú známku prebiehala v riešiteľských stratégiách v zásade dvomi spôsobmi.

Predmet	Anglický jazyk		Biológia		Dejepis	
body	35/40	9/10	10/10	28,5/30	20/20	1/3
percentá	87,5%	90%	100,0%	95,0%	100,0%	33,3%
známka	2	1	1	1	1	5
priemer	1,5		1		3	

Tab.1. Ukážka metodiky riešiteľky úlohy – výsledný prospech je priemerom čiastkových známok získaných z jednotlivých predmetov v priebehu štvrťroka.

Prvý spôsob (tab. 1) spočíval v postupnom prepočte všetkých uvedených číselných údajov na percentá, následne zaradenie výslednej hodnoty podľa priloženej tabuľky do jednotlivých intervalov a priradenie príslušného slovného, prípadne kvantifikovaného hodnotenia. Z takto získaných známok riešitelia zistili priemernú známku, ktorú prezentovali ako informáciu pre rodičov o študijných výsledkoch žiaka.

Predmet	Anglický jazyk	Biológia	Dejepis
body	44/50	38,5/40	21/23
percentá	88,0%	96,3%	91,3%
známka	2	1	1

Tab. 2. Ukážka metodiky riešiteľky úlohy – výsledný prospech z jednotlivých vyučovaných predmetov zohľadňuje pomer počtu získaných bodov za uvedené časové obdobie k celkovému počtu, ktoré bolo možné získať.

Druhý spôsob (tab. 2) zohľadňuje pomer všetkých získaných bodov k celkovému počtu bodov, ktoré bolo možné získať v priebehu štvrťroka a následne bola vykonaná transformácia na výslednú známku.

Obe predchádzajúce ukážky rozličnej metodiky spracovania predložených údajov naznačujú rozdielnosti vo výstupných údajoch (viď dejepis), pričom sú zobrazené len predmety, v ktorých sa nenachádza interpretačná disproporcia uvedená v odseku 2 (problém interpretácie údajov).

V hodnotení predmetov matematika a geografia akceptovaním chybných postupov v interpretácii a spracovaní vstupných údajov možno získať úplne rozdielne hodnotenie (tab. 3, tab. 4), čoho dôsledky môžu byť rôzne, vrátane demotivácie žiaka, prípadne prekvapenia rodičov. Pri dôslednom matematickom spracovávaní údajov z geografie (prvým spôsobom ilustrovaným v tabuľke č. 4) je riešiteľ konfrontovaný s otázkou umiestnenia číslu nula v menovateli zlomku. Táto skutočnosť je istým iniciátorom myšlienky o vzájomnej výmene čísel v zápise, prípadne vedie k nesprávnemu záveru výsledku „delením nulou“. Zápis v uvedenom tvare nie je matematicky spracovateľný, a preto je zrejme problémom pri exaktnom matematicko-štatistickom vyhodnotení výsledkov. Z dosiahnutých priebežných bodových ziskov žiačky z geografie je však zrejmé, že dosahuje stopercentné až nadštandardné výsledky, preto by zo záverečným hodnotiacim verdiktom nemal byť z tohto hľadiska problém.

Matematika										
bodové skóre		spôsob I.		spôsob II.		spôsob III.			spôsob IV.	
7/5		140%	1	(7+12+19) / (5+14+20)		5/7	71%	3	(5+12+19) / (7+14+20)	
12/14		86%	2	38 / 39		12/14	86%	2	36 / 41	
19/20		95%	1	97%		19/20	95%	1	88%	
		záver: 1		1		2			2	

Tab. 3. Rozdielnosti v hodnotení matematiky.

Geografia										
bodové skóre		spôsob I.		spôsob II.		spôsob III.			spôsob IV.	
10/10		100%		(10+3+22+1+10) / (10+0+20+0+10)		10/10		100%	1	(10+0+20+0+10) / (10+3+22+1+10)
3/0		delenie nulou				0/3		0%	5	
22/20		110%		46 / 40		20/22		91%	1	40 / 46
1/0		delenie nulou		115%		0/1		0%	5	87%
10/10		100%				10/10		100%	1	
záver:		?		1		4		3	2	

Tab. 4. Rozdielnosti v hodnotení geografie.

4. Evaluačná matematika

Hodnotenie žiackych výkonov je súčasťou vzdelávacieho procesu, ktoré by malo byť formatívnym atribútom poskytujúcim hodnotiacu, spätно-вázobnú informáciu prispievajúcu k budovaniu dôvery medzi učiteľom – žiakom – rodičom. V uvedenom kontexte treba dôsledne zvažovať akým spôsobom bude vedená evidencia žiackych výsledkov, akú informačnú hodnotu majú zaznamenané údaje, akým spôsobom budú ďalej spracovávané, a akým spôsobom bude prezentovaný hodnotiaci verdikt, aby bol pre žiaka spravodlivý a motivujúci k ďalšiemu efektívnemu učeniu. Ak komunikácia medzi učiteľom a rodičom prebieha (aj) v prostredí informačno-komunikačných prostriedkov, je nutné zaoberať sa interpretáciou, elaboráciou a prezentáciou hodnotiacich atribútov. Základná znalosť narábania s údajmi a ich štatistického

vyhodnocovania patrí ku kompetenciám každého učiteľa, a teda matematická príprava v tejto oblasti je relevantnou požiadavkou, zvlášť v prostredí IKT, kde sa stretávame s novými formami, resp. s novými modelmi znázorňovania a prezentácie údajov rôzneho typu. Jej zanedbaním môžu vzniknúť paradoxné interpretácie a následné konfliktné hodnotiace verdikty. Vznik a využívanie internetovej žiackej knižky hodnotíme pozitívne, avšak v príspevku upozorňujeme na možný výskyt deformácií pri interpretácii jej používania v praxi.

Literatura

1. PARTOVÁ, E. *Práca s údajmi – aplikácia matematických poznatkov žiakov 1. st. ZŠ*. In: Cesty demokracie vo výchove a vzdelávaní. Bratislava: Iuventa, 2000. 229 s. ISBN 80-88893-63-1.
2. ŠEDIVÝ, O., KRIŽALKOVIČ, K. *Didaktika matematiky pre štúdium učiteľstva I. stupňa ZŠ*. Bratislava: SPN, 1990, 272 s. 1. vydanie, ISBN 80-08-00378-2.
3. Štátny pedagogický ústav: *Kurikulárna transformácia*. (2000-2005), dostupné na World Wide Web: http://www.statpedu.sk/buxus/generate_page.php?page_id=858 [11.2.2008]
4. www.skolanawebe.sk – internetová žiacka knižka, [11. 2. 2008].

Príspevok bol spracovaný ako súčasť grantového projektu s názvom Školská matematika v prostredí IKT (MŠ SR KEGA 3/6021/08).

Kontaktní adresa

*PaedDr. Katarína Žilková, PhD.
Kmi Pedagogická fakulta UK
Račianska 59
813 34 Bratislava 3
Slovenská republika
E-mail: katarina@zilka.sk*

NERECENZOVANÁ ČÁST

POČÍTAČ, MOTIVAČNÍ PROSTŘEDEK VE VÝUCE MATEMATIKY

Cyril HAVEL, David KORDEK, Petr ŠROLL

Abstrakt

Jak využít počítač k motivaci žáků ve výuce matematiky. Presentace, matematický software a interaktivní učence. Program Blender a animace pro použití ve výuce matematiky. OSS program Geonext ve výuce matematiky. Ukázky zajímavých úloh.

THE COMPUTER, THE MOTIVATIONAL INSTRUMENT IN EDUCATION OF MATHEMATICS

Abstract

How can we use the computer to motivation of the pupils in an education of mathematics. Presentation, mathematical software and interactive textbooks. The programme Blender and animations for using in an education of mathematics. OSS, the programme Geonext in an education of mathematics. Exhibits of interesting exercises.

1. Jak použít počítač ve výuce matematiky?

V dnešní době, kdy jsou žáci neustále přesvědčováni, jak je matematika obtížná a abstraktní, je potřeba používat čím dál víc prostředků na její popularizaci. Určitě existují lidé, kteří se mnou nebudou souhlasit, ale myslím, že v dnešní době, když jsou děti obklopeni moderní technikou, by mohl jako hlavní popularizační prostředek sloužit počítač.

Jsem přesvědčen, že malá násobilka na kartičkách, sčítání a odčítání na dřevěných počítadlech v nižších ročnících, nebo kreslení řezů těles atd. ve vyšších ročnících, je dnes už poněkud zastaralá. To by určitě neškodilo, ale mám pocit, že by to prostě žáky nemotivovalo. Všechny výše zmíněné myšlenky můžeme totiž realizovat pomocí počítače.

Pro oživení výkladu ve vyšších ročnících můžeme použít prezentace, do nichž můžeme zařadit obrázky např. skutečných staveb, které připomínají geometrická tělesa (pyramida). Jako zdroj pro tyto obrázky nám v dnešní době může sloužit internet. Dále existuje velké množství matematického software, který neslouží pro vědecké účely, ale je speciálně vytvářen pro výuku matematiky.

Jako příklad můžeme uvést **Cabri** a **Cabri3D**. V prvně jmenovaném programu lze například bez problémů vyřešit konstrukční úlohy is postupem konstrukce, program dokonce umožní krokování konstrukce, tedy dává učiteli možnost kontroly. Výhodou je dynamičnost tohoto software, tedy můžeme například sestrojít trojúhelník, program nám zjistí a popíše velikost vnitřních úhlů. My však můžeme velikost libovolného úhlu

měnit, tím se na monitoru budou přepočítávat i hodnoty ostatních úhlů, jejich součet se však měnit nebude, tedy bude na monitoru stále číslo 180.

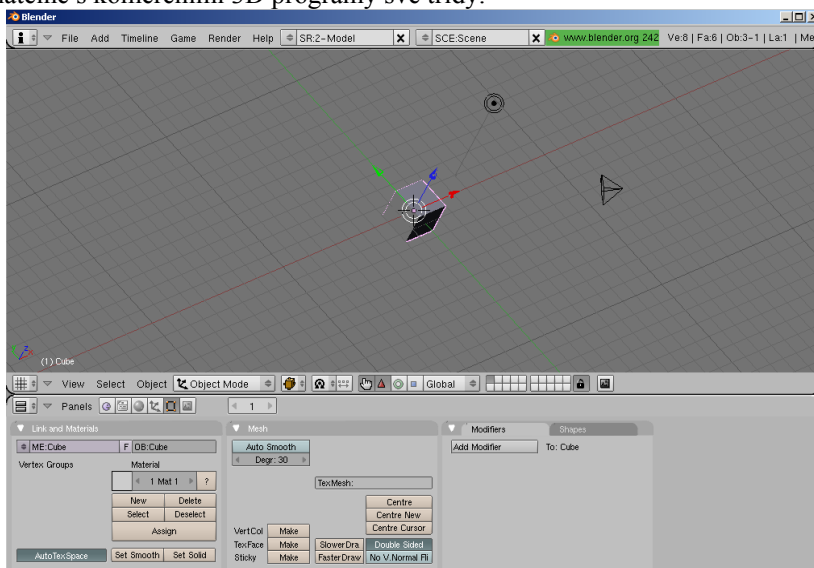
Cabri3D je podle mého názoru vhodná pomůcka na konstrukci řezů na tělesech, můžeme totiž výslednou plochu různě zvýraznit, celé oříznuté těleso natočit pod libovolným úhlem, ... Hlavně však i zde můžeme měnit velikost výsledné plochy tím, že pohybuje specifickými body řezu. Nevýhodou tohoto software je jeho cena, je tak jasné, že nemůže být pořízen do každé školy. Existuje však program, který je velmi podobný Cabri, jednak svým ovládáním, ale i prvky. Není samozřejmě tak dokonalý a precizní, ale je zcela volně stažitelný, a dokonce se zdrojovým kódem. O tomto programu, který se jmenuje Geonext, vám poví více můj kolega. V závěrečné části našeho příspěvku Vás seznámíme s programem na tvorbu animací, a poskytneme několik nápadů, jak to využít při výuce, zejména v nižších ročnících.

V závěru první kapitoly bych se ještě rád zmínil o interaktivní tabuli, pro níž už v současné době existují interaktivní učebnice matematiky, fyziky, zeměpisu, biologie, ... vytvořené vydavatelstvím **FRAUS**. Demo verzi této učebnice a další informace naleznete na následující stránce: <http://www.fraus.cz/index.php>.

2. Program Blender ve výuce matematiky

Každý z nás určitě sledoval v dětství animované seriály, někteří je určitě sledují dodnes. Technologie tvorby těchto snímků se stále zdokonalují a v průběhu asi 10 až 15 let se animování postavíček do seriálů vyvíjí už jen počítačovou formou, která je méně pracná a velmi rychlá oproti ručnímu kreslení. Tím, jak se tyto technologie zdokonalovaly a výkon našich stolních počítačů zvětšoval, jsme již dnes schopni tvořit vlastní jednoduché i složité animace pro naše žáky nebo studenty.

Chtěl bych Vám představit 3D aplikaci Blender, který je zaměřený na tvorbu 3D modelů, obrázků, animací, interaktivní aplikací i her. Je také multiplatformní aplikací exportovanou do mnoha operačních systémů jako například Microsoft Windows, Linux, Mac OS X a je pod licencí GNU GPL. Program prodělal během krátké doby velmi bouřlivý vývoj, díky kterému nyní nabízí nástroje a funkce, co do množství i kvality srovnatelné s komerčními 3D programy své třídy.



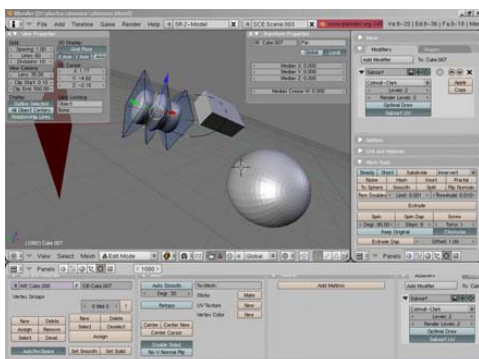
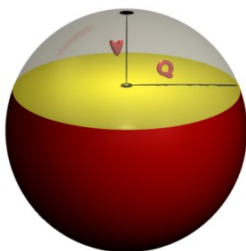
Obr. 1. Blender, při nastavení Model.

Blender stačí stáhnout z domácích stránek www.blender.org. Zde si budete moci vybrat svůj balíček dle operačního systému. Pro Microsoft Windows jsou zde připraveny hned dva balíčky a to jeden pro instalaci do systému a druhý spustíte bez instalace.

Tento program má v České Republice mnoho příznivců, a proto existuje velké množství materiálu v Českém jazyce. Tyto materiály naleznete na internetových stránkách www.blender3d.cz nebo www.3dscena.cz. Dále na domácích stránkách www.blender.org naleznete také velké množství internetových odkazů, které jsou schopny Vám při výuce pomoci. O programu je také vydáván časopis BlenderArt www.blenderart.org.

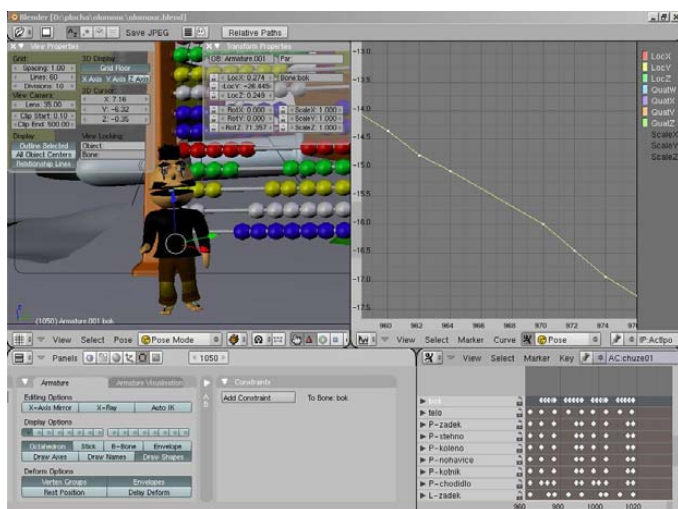
Program Blender lze v hodně použít na prvním i druhém stupni základních škol pro tvorbu výukových nebo jen pomocných materiálů. Můžeme v něm například vytvořit tělesa a ihned je popsat, nebo je popsat v jiném grafickém či textovém editoru.

Vrchlík



Obr. 2. Znárodnění vrchlíku

Animace mohou složit jako motivační prostředek. Děti jsou zvyklé na kreslené postavičky, které jim předávají velké množství informací. Tohoto zájmu o „animáky“ u žáků se lze využít a vytvořit si virtuálního 3D učitele například komického panáčka, který by provázel učební látkou a počítat s žáky. Ve virtuálním světě tato postavička může dělat cokoli co dělá učitel u tabule. Žákům je schopna poradit a řešit s nimi úlohy. Tvorba postaviček už patří k pokročilejším znalostem animace a modelování.



Obr. 3. Ukázka animace pohybu skřítky.

Takováto animace pro žáky na prvním stupně může být velice lákavá. Učitel tak v hodině může poutavě vysvětlit látku za jiných situací dost neatraktivní nebo těžkou. Animace se může tak stát prostředníkem budoucího zájmu o matematiku.

3. Program Geonext ve výuce matematiky

Program Geonext je dynamický matematický software. Tento program umožňuje provádět geometrické konstrukce, s pomocí různých vestavěných funkcí. Jeho dynamičnost spočívá v možnosti změnit již hotové konstrukce pouhým tažením myši. Pokud na měněném prvku závisí jiný prvek, bude se měnit také. Např. pokud vytvoříme kružnici opsanou trojúhelníku a pak posuneme některý z vrcholů trojúhelníku, posune se i střed opsané kružnice a změní se její poloměr. Díky této vlastnosti je program Geonext velmi vhodný pro použití ve výuce matematiky a fyziky. Program Geonext je freeware, čímž odpadá finanční zátěž pro školu, navíc si jej mohou žáci zcela legálně nainstalovat i doma. Vyučující jim pak může zadávat domácí úkoly vypracovávané v prostředí Geonext.

Jak program získat

Program Geonext lze zdarma stáhnout na adrese www.geonext.de. Na výběr máte verze pro nejběžnější operační systémy (Windows, Linux, Mac), navíc si můžete zvolit jeden z mnoha nabízených jazyků, včetně češtiny. Český překlad bohužel není kompletní, chybí dokončit překlad některých částí nápovědy, které jsou i v české verzi německy, nebo anglicky. Pokud sedíte u počítače, na kterém nemáte administrátorská práva, nezoufejte, program Geonext existuje i v online verzi, kterou můžete spustit na jakémkoliv počítači připojeném k internetu. Požaduje pouze prostředí Java.

Ovládání programu

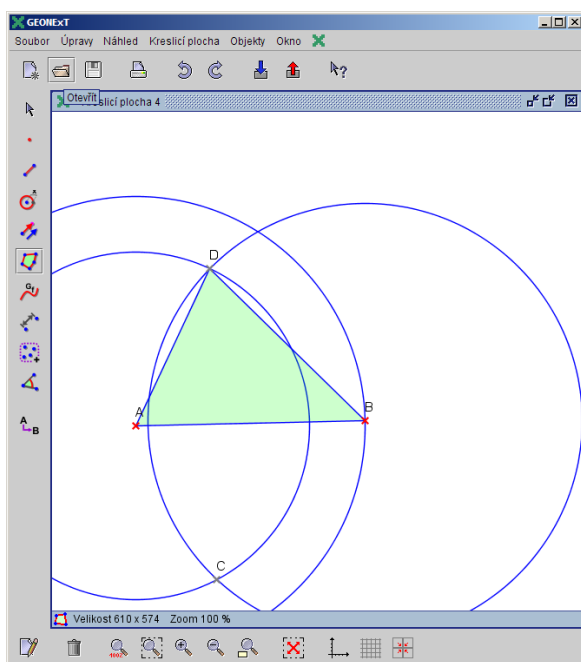
Ovládání programu Geonext je poměrně intuitivní, na každé ikonce je obrázek naznačující, jaké funkce daná ikona nabízí. Po jednoduchém kliknutí můžeme přímo kreslit, po doubleclicku se zobrazí menu, které nám nabídne konkrétní volby u daného prvku. Např. po kliknutí na ikonku „bod“ můžeme klikáním na kreslicí plochu přidávat body, po doubleclicku na „bod“ vám program nabídne řadu variant kam chcete bod

umístit. (střed úsečky, průsečík, bod rovnoběžníku, osově symetrický bod atd...) Další nabídky umožňují: kreslit přímku, kružnici, vektor, polygon, graf funkce, dále pak měření vzdálenosti mezi jednotlivými body, tvorbu úhlů apod.

Ukázky

Sestrojte trojúhelník podle věty SSS.

- 1) kdekoliv na kreslicí ploše umístěte bod. Program jej automaticky označí jako bod A.
- 2) doubleclickněte na „kružnice“ a zvolte možnost „kružnice (zadat poloměr)“ (všimněte si, jaké další možnosti zadání kružnice nám Geonext nabízí.). Kružnice je jediný prvek v programu Geonext, u kterého máme možnost zadat rozměr přímo číslem. Rozměry ostatních prvků musíme zadávat pomocí průsečíku s kružnicí stejně, jako když nanášíme rozměr pomocí kružítko.
- 3) Klikněte na bod A, program vás vyzve k zadání poloměru kružnice (délka strany c), potvrďte.
- 4) Klikněte opět na ikonku „bod“. Pokud se s kurzorem myši přiblížíte k blízkosti kružnice, tak kružnice změní barvu. Tím vám dává najevo, že právě na ní bude bod umístěn. Kliknutím bod umístíte. Pokud se k němu nyní přiblížíte s kurzorem, kurzor se vám změní z křížku na ruku, se kterou můžete bodem pohybovat, ovšem pouze po kružnici.
- 5) Stejně jako v 2) a 3) vytvořte kružnice se středy v bodech A a B.
- 6) Stejně jako v 4) umístěte bod do průsečíku kružnic z bodu A a B. Všimněte si, že program automaticky označil bodem i druhý průsečík kružnic. Dále si všimněte, že ne všechny body mají stejnou barvu. Geonext nám body barevně rozlišil, podle toho, kolik mají stupňů volnosti. S červenými lze libovolně pohybovat, zelené jsou vázané na křivku a konečně šedé nemají žádný stupeň volnosti.
- 7) Nyní zbývá body spojit a vytvořit trojúhelník. Máme 2 možnosti:
 - a. spojit body pomocí úseček,
 - b. vytvořit polygon, jehož vrcholy budou naše body.
 - a) Doubleclickněte na ikonu „přímka“, v nabídce vyberte „úsečka“ a klikáním na jednotlivé body vkládejte úsečky.
 - b) Klikněte na polygon, a pak na jednotlivé body, které mají tvořit vrcholy polygonu. Kliknutím opět na první bod polygon dokončíte.



Obr. 4. Trojúhelník sestrojený v Geonextu.

Závěr

V tomto příspěvku nebylo možné předvést všechny možnosti programu Geonext. Pokud vás program zaujal, můžete v něm sami vyzkoušet další možnosti, zejména měření vzdálenosti bodů, kreslení grafu funkce nebo animace. Program obsahuje také funkci „diashow“, nebo „protokol konstrukce“, s jejichž pomocí snadno vytvoříte návod ke konkrétní geometrické úloze.

Literatura

1. <http://geonext.uni-bayreuth.de/index.php?id=2453>
2. <http://www.musilek.eu/michal/pdf/geonext.pdf>
3. www.blender.org.

Kontaktní adresa

Mgr. Cyril Havel, Mgr. David Kordek, Mgr. Petr Šroll
 Katedra Fyziky a informatiky, Pedagogická fakulta UHK
 Rokitského 62, 500 03 Hradec Králové III
 Telefon: +420 493 331 518
 E-mail: cyril.havel@uhk.cz, david.kordek@uhk.cz, petr.sroll@uhk.cz

ROZVOJ OSOBNOSTI ŽÁKA V MATEMATICE CESTOU MONTESSORI

Miroslava CHMELOVÁ

Abstrakt

Devět základních principů Marie Montessori v matematice. Obecná důležitost a souvislost vybraných principů alternativní pedagogiky s výukou na 1. stupni základní školy.

CHILDREN DEVELOPMENT IN MATHEMATICS ACCORDING TO THE MONTESSORI METHOD

Abstract

The nine basic principles of Maria Montessori in teaching mathematics. The importance and relation of alternative pedagogy to teaching of mathematics at the primary level.

Úvod

Maria Montessori by měla radost. Už před sto lety se italská lékařka hned po ukončení studia začala zabývat problémy výchovy a vzdělávání dětí. Nejen, že výsledky své práce by dnes viděla ve stále se rozvíjejících školách pracujících podle Montessori metody po celém světě, ale viděla by, že stejně jako ona, se dnešní pedagogové opírají o zájem dítěte, snaží se dítě pozorovat a často hovoří o individuálních zvláštностech a potřebách každého jedince. V Rámcovém vzdělávacím programu vyzdvihujeme a požadujeme kompetence k učení, k řešení problémů, kompetence komunikativní, sociální a personální, občanské a pracovní. Uvědomujeme si tedy, že s encyklopedickými znalostmi neuspějeme a že vědomosti pouze „přelít“ nelze. Nejdůležitější je cesta k rozvoji celé osobnosti žáka a jeho zájem o vzdělání.

S oporou o mou dosavadní praxi z České republiky a několika dalších zemí i nedávno dokončené studium na FPE ZČU se zde pokusím aplikovat devět základních principů Marie Montessori ve výuce matematiky do principů již fungujících v reformovaných českých školách.

1. Senzitivní fáze a vývojové etapy

„Podobně jako Jean Piaget, dlouholetý předseda švýcarské Montessori společnosti, rozvíjela v diskusích s dalšími vývojovými psychology i M. Montessori svou vývojovou teorii dítěte.“¹ Využila vlastní dlouholetá pozorování dětí a charakterizovala tzv. senzitivní fáze. Tímto pojmem označila fakt, že ve vývoji dítěte existují období se zvláštní citlivostí pro určité učební postupy a procesy a využití vlivů okolního prostředí.

¹ Rýdl, K. Metoda Montessori pro naše dítě, FF Univerzity Pardubice 2006

Jinými slovy, dítě během dočasných časových úseků dělá to, co ho právě zaujme, pokládá za nejdůležitější, co ho baví. Právě v této době získává specifickou vlastnost či dovednost. Vytvářením vlastních Školních vzdělávacích programů mohou školy z části následovat nejen své zájmy, ale oficiálně i „senzitivní fáze“ dítěte a plánovat individuálně, respektovat a rozvíjet individuální potřeby, možnosti a zájmy každého žáka (se speciálními vzdělávacími potřebami včetně žáků mimořádně nadaných).

2. Absorbující mysl a využití tvůrčího potenciálu dítěte

Mnoho výzkumů prokázalo, že dítě reaguje na nejrozličnější podněty už před narozením. Do tří let nevědomě získává znalosti z okolí, spontánně kopíruje, absorbuje je. Kolem tří let se začíná probouzet vědomá forma. Dítě začíná myslet a rozebírat své dojmy. Po šestém roce života už nikdy nedochází k tak pohotovému pohlcování informací. I my, učitelé 1. stupně počítáme s tím, že dítě není prázdná nádoba. „Dítě v sobě skrývá obrovský potenciál, ale také množství záhad. Tou největší je tajemství lidské přirozenosti.“² My učitelé pak stavíme na jeho zkušenostech, ožívujeme, třídíme a pomáháme dítěti dát tvar a smysl jeho zážitkům.

3. Polarita pozornosti

„Tento jev spočívá v respektování stavu, kdy je dítě zaujato určitou činností a plně se na ni soustředí. V této chvíli pracuje nejefektivněji, pozornost je plně zaměřena na danou činnost.“³

Po prohlídce naší školy jedna návštěvnice řekla: „To dítě ty příklady počítalo celou hodinu, není to příliš dlouho?“ Žák si v daném případě vzal pracovní sešit, vybral si příklady a se zaujetím počítal přibližně 55 minut. Nikdo jej nerušil a žák svou práci dokončil. Práci si sám zkontroloval. Ne, nepočítal příliš dlouho.

Časté střídání činností, vysoké tempo v hodinách a nepostradatelný dobrý herecký výkon se zdál být do té doby jediným možným způsobem pro získání pozornosti dětí. V matematice je vždy nutná soustředěnost na konkrétní problém. Získá-li dítě prostor, čas a důvěru ve svou práci, věřím, že přirozeně věnuje všechnu pozornost dané činnosti. „Nejdůležitějším objevem je zjištění, že dítě se vrací do normálního stavu pomocí pracovní činnosti. (...) Touha dítěte pracovat reprezentuje životně důležitý instinkt, protože bez pracovní činnosti dítě nemůže rozvíjet svou osobnost. Člověk v práci tvoří sám sebe.“⁴

Obr. 1 - Samostatná práce dětí

Obr. 2 Práce s hnědými schody
(Základní porovnání, řazení, vizuální
vnímání objemu)

² Montessori, M. Tajuplné dětství, Nakladatelství SPS Praha 1998

³ viz Školní vzdělávací program. ZŠ JAM, Praha 2006

⁴ Montessori, M. Tajuplné dětství, Nakladatelství SPS Praha 1998



4. Svobodná volba – činnost, pomůcky, spolupracovníci, pracovní prostor

Svobodná volba je důležitou součástí našeho každodenního života. Možnost vybrat si školu podle jejího Školního vzdělávacího programu je jistě pro učitele velkou výhodou. Rodiče si vybírají pečlivě školu, mohou si zvolit učitele svých dětí. Z tabulky podle prof. PhDr. Karla Rýdla, CSc.⁵ je zřejmé, jak se svoboda váže na zásady práce dítěte v Montessori zařízení.

Svobodná volba	Svoboda	Zásady práce
Činnost	Obsah, obtížnost, cíl podle individuálních zájmů	Nepozorujeme rozhodnutí „nedělat nic“ Nutnost dokončení práce Každý materiál je k dispozici jen jednou
Místo	Princip otevřených dveří, možnost „duševních procházek“	Při činnosti nerušit ostatní
Partner	Samostatná práce, dvojice, skupina	Práce musí být produktivní, skupina musí být schopná pracovat
Čas	Otevřený začátek školy bez zvonku, vlastní tempo a dítětem určená délka činnosti	Časové omezení volné práce Zodpovědnost být v určenou dobu na určitém místě a pracovat

Důležitost volby jsem ověřila na mém čtrnáctiletém synovci při jednoduchých domácích pracích. Během mytí nádobí jsem místo povelu typického pro takovou činnost: „Jdi s košem!“ zvolila možnost svobodné volby: „Chceš mi utřít nádobí nebo půjdeš s košem? K překvapení rodiny šel s košem.

⁵ Autorkou upravená verze tabulky publikované v Rýdl, K. Metoda Montessori pro naše dítě

„Pověz mi a zapomenu. Ukaž mi a já si vzpomenu. Nech mne se zúčastnit a já pochopím.“⁶ Bez jakýchkoli pochybností si učitelé pomůcky na vyučování připravují svědomitě a pečlivě a mnozí za to mají můj velký obdiv. Sama jsem takové přípravy zažila a nechápala, jak se mám takto svědomitě připravit na šest hodin denně. Pečlivě připravené pomůcky jsou nutností ve všech předmětech a obzvláště v matematice pro názornou práci. Manipulace s předměty je neoddiskutovatelná. V Montessori škole je taková soustava pomůcek nebo-li materiálů již připravena, logicky seřazena a každá práce má svůj smysl a význam. Práce s jednotlivými materiály vede i k rozvoji jemné motoriky a navíc k naprostému pochopení dané činnosti.

5. Princip volného pohybu

Volný pohyb funguje již v mnoha školních zařízeních. Nenutíme většinou sedět děti celé dny v lavicích, třídy jsou mnohdy vybaveny kobercem, kde žáci rádi a s chutí pracují.

6. Postup od konkrétního k abstraktnímu

Uspořádání učiva od jednoduchého až po složité v logickém sledu vede k představě dítěte o zvládnutém i následujícím učivu. Tato řada už se sama o sobě jeví v učebnici i v plánu učiva dost abstraktně. Pokud ale dáme dětem předměty, pomůcky a necháme je vnímat věci kolem sebe všemi smysly, stává se učivo konkrétním. Dítě si pak umí představit konkrétně vše, s čím pak později pracuje v abstraktní podobě.

7. Vzájemná spolupráce dětí

Ve třídách s heterogenní skupinou, tedy s dětmi různého věku, žáky z různého sociálního či kulturního prostředí spatřuji pouze výhody. Vhodnost týmové či skupinové práce by si asi také už dnes nikdo nedovolil zpochybňovat. Nejlépe my učitelé si dokážeme představit, že často daný problém pochopíme, až když o něm máme učit někoho dalšího. Proto bych zde chtěla vzájemnou spolupráci, učení se a vzájemnou kontrolu mezi žáky podtrhnout a podporovat využití různorodosti každé skupiny stejně jako Maria Montessori.

8. Samostatná kontrola chyby

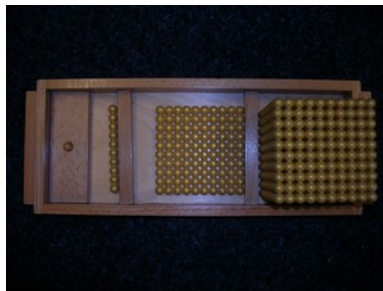
„Chybami se člověk učí.“ Podobné výroky slýcháme celý život. Pokud ale chybu odhalíme sami a máme možnost si ji sami ihned opravit, získává podle mého názoru zmíněný výrok další rozměr. U příkladu dělení jednociferným dělitelem je povinnost kontroly mnoha žákům základní školy příjemná. Často jsem si sama v písemné práci oddychla, že alespoň jeden příklad mám určitě správně. Montessori materiály jsou připraveny tak, aby dítě získalo samostatnou kontrolou okamžitou zpětnou vazbu. Učitel podporuje a pomáhá pouze dětem, které pomoc potřebují. Snaží se postupně doprovodit dítě do stádia vlastní odpovědnosti. Dává svobodu tam, kde je dítě schopno převzít zodpovědnost.

⁶ Confucius

Obrázek 3 Barevné korálky
(zkušenost s kvantitou čísel 1-19)



Obrázek 4 Zlatý perlový materiál
(pojmy jedna, deset, sto, tisíc,
vizuální zkušenost)



Závěr

Výčtem základních principů Marie Montessori a zamyšlením se nad jejich obecnou důležitostí jsem se pokusila vyjádřit, že náš společný cíl se neliší, že všichni chceme podporovat přirozený zájem dítěte, pomáhat mu zafixovat správné pracovní návyky a vytvářet svůj vlastní úsudek a že „Lidská osobnost, ne výchovná metoda, musí být brána v úvahu.“⁷

Literatura

1. RÝDL, K. Metoda Montessori pro naše dítě, FF Univerzity Pardubice 2006. 134 s., ISBN 80-7194-841-1
2. MONTESSORI, M. Tajuplné dětství, Nakladatelství SPS Praha, 1998. 113 s., ISBN 80-86-189-00-7
3. MONTESSORI, M Absorbující mysl, Nakladatelství SPS Praha, 2003. ISBN 80-86-189-02-3
4. Školní vzdělávací program. ZŠ JAM, Praha 2006

Kontaktní adresa

*Mgr. Miroslava Chmelová
KMT FPE ZČU Plzeň
Klatovská 51, 306 14 Plzeň
Telefon: +420 377 636 280
E-mail: c.mirka@seznam.cz*

⁷ Maria Montessori

STALO SE PŘED PATNÁCTI LETY

Jan MELICHAR

Abstrakt

V příspěvku je vzpomenut seminář českých a slovenských kateder matematiky zaměřený na matematiku v oboru učitelství pro 1. stupeň základní školy, který se konal před patnácti lety. Tento seminář byl jedním ze základních kamenů z kterých vyrostla dnes již tradiční konference zaměřená na elementární matematiku a její vyučování.

FIFTEEN YEARS AGO

Abstract

In the document is mentioned meeting of Czech and Slovak departments of mathematics focused on the education of mathematics for elementary schools. The meeting took place fifteen years ago and it was one of the base seminars from which arose the traditional conference focused on the elementary mathematics and its education.

Do roku 1990 studenti oboru učitelství pro 1. stupeň základní školy v Čechách i na Slovensku studovali dle jednotných studijních plánů, které byly závazné a které byly vydávány českých a slovenským ministerstvem školství. Takový byl i závazný studijní plán matematických disciplín v tomto studiu. Po roce 1990 si vysoké školy o studijních plánech začaly rozhodovat samy. Je samozřejmé, že začal být zájem o vzájemnou informovanost jak si s touto samostatností učitelé poradili na sousedních příbuzných vysokých školách. Z těchto důvodů se konal ve dnech 22. až 23. června 1993 na Katedře matematiky Pedagogické fakulty Univerzity Jana Evangelisty Purkyně v Ústí nad Labem seminář českých a slovenských kateder matematiky zaměřený na matematiku v oboru učitelství pro 1. stupeň základní školy. Seminář měl tři hlavní okruhy problémů: 1. Studijní plány matematických disciplín studia oboru učitelství pro 1. stupeň základní školy, 2. Témata diplomových prací z matematiky oboru učitelství pro 1. stupeň základní školy a 3. Okruhy požadavků ke státní závěrečné zkoušce z matematiky s didaktikou oboru učitelství pro 1. stupeň základní školy. Všechny katedry matematiky z České i Slovenské republiky na kterých se studoval obor učitelství pro 1. stupeň základní školy poslaly předem svoje studijní plány matematických disciplín oboru učitelství pro 1. stupeň základní školy. Poslaly témata obhájených diplomových prací z matematiky v roce 1992 a 1993 a zadaných témat na rok 1994 a poslaly okruhy témat ke státní závěrečné zkoušce z matematiky a její didaktiky oboru učitelství pro 1. stupeň základní školy. Před jednáním semináře byl sestaven Sborník z těchto zaslaných materiálů. Seminář ve formě diskusí projednával uvedené okruhy a účastníci semináře diskutovali o přínosech resp. problémech v těchto třech okruzích. Myslím, že za zmínku stojí vyjmenovat účastníky tohoto semináře: **Česká republika:** PF MU Brno: RNDr. Růžena Blažková, RNDr. Marta Francová,

CSc., **VŠP Hradec Králové**: RNDr. Eva Krejčová, CSc., Doc. RNDr. František Kuřina, CSc., Doc. PhDr. Marta Volfová, CSc., **PF UP Olomouc**: RNDr. Jindřiška Eberová, PaedDr. Anna Stopenová, **PF OU Ostrava**: RNDr. Vilma Novotná, PhDr. Bohuslav Pisklák, CSc., RNDr. Jana Zehnalová, CSc., **PF ZU Plzeň**: PaedDr. Jana Coufalová, CSc., Mgr. Šárka Pěchoučková, **PF UK Praha**: RNDr. Darina Jirotková, PhDr. Michaela Kaslová, Prof. RNDr. Milan Koman, CSc., **PF UJEP Ústí nad Labem**: Doc. PaedDr. Miroslav Bělík, CSc., PaedDr. Miroslav Bělík, Doc. RNDr. Miroslav Červinka, CSc., Prof. RNDr. Jan Kopka, CSc., Prof. RNDr. Jan Melichar, CSc., PaedDr. Josef Svoboda, **MÚ ČSAV Praha**: Marie Tichá, CSc., **Slovenská republika**: **PF UK Bratislava**: RNDr. Edita Partová, PhDr. Oliver Židek, CSc., **VŠP Nitra**: Prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc.

Abychom viděli jak jsme se změnili za 15 let, dovolím si předložit Přehled počtu hodin matematických disciplín studia učitelství pro 1. stupeň základní školy, který platil v roce 1993:

Místo	1. ročník		2. ročník		3. ročník		4. ročník	
	ZS	LS	ZS	LS	ZS	LS	ZS	LS
Brno	ZMD 1/2 Zk	A 1/2	A 1/2 Zk	G 1/2 Zk	DM 1/2	DM 1/2 Zk	MS 0/2	MS 0/2
České Budějovi ce	ZAA 1/2 Zk	ZG 1/2 Zk	EAA 1/2	EAA 1/2 Zk	DM 1/2	DM 1/2 Zk	MS 0/2	-
Hradec Králové	ZEA 2/2	ZEA 1/2 Zk	ZEG 2/2 Zk	DM 1/2	DM 1/2 Zk	DM 1/2	MS VPM 0/2 0/2	-
Plzeň	ÚM 1/2 Zk	MD 1/2	MD 1/2	MD VPM 1/1 Zk 0/1	MD 1/2	MD 1/2 Zk	MS 0/2	-
Praha	ML MŘMÚ 0/2 Zk 0/1 ÚM MP 1/0 0/1	EAg EG 0/1 0/2 Zk ÚM MP 1/0 0/1	EG TA 1/1 0/1 MP 0/2	MŘMÚ VS 0/2 Zk 0/1 MP 0/2 Soub.Zk	DM 1/3	DM PzVM 1/3 Zk 0/1	MS 0/2	MS 0/2
Olomouc	PM EAA 0/1 1/2 Zk	EAAD 1/2	EAAD EGD 1/2 Zk 1/1	EGD 1/ Zk	DM 1/1	DM 0/2 Zk	VSM 0/1	-
Ostrava	ZEA VM 0/1 0/2	ZEA 0/2	ZEA 1/2 Zk	ZEG 1/2 Zk	DM 0/1	DM 1/2 Zk	VSM 0/2	-
Ústí nad Labem	M 1/3 Zk	AD 1/2	AD 1/2 Zk	GD 1/2 Zk	DM 1/2	DM 1/2 Zk	KVM 0/1 nNSVM 0/1	KVM 0/1 nNSVM 0/1
Banská Bystrica	ZM 1/2 Zk nepPM 0/2	ZEA 1/2	ZEA 1/2 Zk pov.vol.P A 0/2	ZEG 1/2 Zk pov.vol.P A 0/2	DM 1/2	DM 1/2 Zk	KVM 0/1 nep.MS 0/1 nep.DS 0/1	-
Bratislava	ZEA	ZEA	ZEG	DM	DM	VKM	MS	-

	1/2 Zk	1/2 Zk	1/2 zk	1/2	1/2 Zk	2/1 ZK	0/2	
Nitra	ZEG 1/2 Zk	ZEA 1/2 pvETČ 0/1 pvESG 0/2	ZEA 1/2 Zk pvETČ 0/1 pvESG 0/2	DM 1/2 pvETČ 0/1 pvESG 0/2	DM 1/2 Zk	ZEA 1/2 Zk	Pv SM 0/2 pvSG 0/2	-
Prešov	EA 1/2	EA 1/2 Zk	EG 1/2	AM 2/1 Zk	DM 1/2	DM 1/2 Zk	MS 0/2	-

Vysvětlivky:

ZMD - základy matematických disciplín

A – aritmetika

G – geometrie

DM – didaktika matematiky

MS – matematický seminář

ZAA – základy aritmetiky a algebry

ZG – základy geometrie

EAA – elementární aritmetika a algebra

ZEA – základy elementární aritmetiky

ZEG – základy elementární geometrie

VPM – výběrový předmět z matematiky

ÚM – úvod do studia matematiky

MD – matematika s didaktikou

ML – matematická logika

MŘMÚ – metody řešení matematických úloh

MP – matematický proseminář

EAg – elementární algebra

NepPM – nepov. proseminář z matematiky

PA – proseminář z aritmetiky

PG – proseminář z geometrie

DS – diplomový seminář

VKM - vybrané kapitoly z matematiky

Pv – povinně volitelný

ETČ – elementy teorie čísel

ESG – elementy syntetické geometrie

SM – seminář z matematiky

EG – elementární geometrie

TA – teoretická aritmetika

výb.S – výběrový seminář

PzVM – praxe z vyučování matematice

PM – praktikum z matematiky

EAAD – elementární aritmetika

a algebra s didaktikou

EGD – elementární geometrie
s didaktikou

VSM – výběrový seminář
z matematiky

VM – volitelná matematika

M - matematika

AD – aritmetika s didaktikou

GD – geometrie s didaktikou

KVM – kultura vyučování matematice

nNVSM – nepov. nové směry
ve vyuč. matematice

ZM – základy matematiky

SG – seminář z geometrie

EA – elementární aritmetika

EG – elementární geometrie

AM – axiomatika v matematice

Zk - zkouška

KZ – klasifikovaný zápočet

Sestavil: Jan Melichar

V Ústí n.L. dne 1. června 1993

Další část semináře byla věnována tématům diplomových prací, které byly obhájeny v roce 1992 a 1993 a byly zadány k obhajobě v roce 1994. Jako červená nit ve všech zadaných tématech na všech katedrách byla témata věnovaná alternativním učebnicím matematiky, srovnávacím studiím výuky matematiky na 1. stupni základní školy u nás a v zahraničí, dále témata věnovaná zajímavým a zábavným úlohám, didaktickým hrám v matematice, předškolní přípravě dětí na předmět matematika, rozvoji prostorové představivosti a též již byla i témata věnovaná využití kalkulátoru a personálních počítačů ve výuce matematiky na 1. stupni základní školy. Kromě těchto témat byla témata diplomových prací věnována zavedení přirozených čísel, relacím, operacím, algebraickým strukturám, dělitelnosti a samozřejmě i problematice geometrických

pojmu. Pro zajímavost uvádím některá témata diplomových prací. Například M. Vaňurová (Brno) zadala téma „Využití dětských časopisů v dětské zájmové literatury v práci učitele matematiky“, Alice Nývltová (České Budějovice) obhájila diplomovou práci na téma: „Logo a jeho možnosti při výuce matematiky“, vedoucí práce D. Tržilová, M. Kupčáková (Hradec Králové) zadala diplomovou práci na téma: „Některé zajímavé geometrické jevy v přírodě“, B. Novák (Olomouc) zadal téma: „Obsahová analýza učebnic „Mladý počtář“, Jana Kabinová (Ostrava) obhájila práci na téma „Některé pedagogické aspekty výuky matematiky s pomocí výpočetní techniky“- vedoucí práce V. Novotná, J. Kupčková (Plzeň) obhájila diplomovou práci na téma „Programovací jazyky LOGO a KAREL na 1. stupni ZŠ“- vedoucí práce J. Hervert, M. Kaslová (Praha) zadala téma „Videoprogramy jako východisko k expozici učiva matematiky na 1. stupni ZŠ“, M. Mizerová (Ústí nad Labem) obhájila práci na téma „Studium vybraných typů těles na 1. stupni ZŠ“- vedoucí práce M. Bělík st., Š. Kovačik (Banská Bystrica) zadal práci na téma „Didaktický program pro počítač na 1. stupni ZŠ“, E. Partová (Bratislava) zadala téma „Dramatizace motivační pohádky, příběhu k řešení slovních úloh“, J. Fiamčík (Prešov) zadal téma „Planární grafy a jejich některé aplikace“.

Závěrečná část semináře byla věnována požadavkům ke státní závěrečné zkoušce z matematiky s didaktikou oboru studia učitelství pro 1. stupeň základní školy. Všechny katedry matematiky, kde bylo studium učitelství pro 1. stupeň, zaslaly okruhy těchto požadavků. Je třeba s uspokojením konstatovat, že kromě požadavků na studenty na vědomosti z oblasti elementární matematiky všechny katedry věnují pozornost dovednosti studentů předávat matematické znalosti svým žákům a to nejen v oblasti teoretické, ale i praktické. Pěkně propracované okruhy z oblasti didaktiky matematiky má Katedra matematiky tehdejší Vysoké školy pedagogické v Hradci Králové. Cituji: „Součástí zkoušky z didaktiky matematiky je metodický a didaktický rozbor zadané úlohy (z učebních textů pro 1. stupeň ZŠ).

1. Metodický rozbor se skládá zejména z těchto částí:
 - a) zařazení úlohy do systému učiva,
 - b) posouzení nutnosti matematizace reálné situace popsané úlohou,
 - c) stanovení základních vědomostí nutných pro řešení úlohy,
 - d) ukázky řešení úlohy různými způsoby, stanovení nejvhodnějšího způsobu vzhledem příslušnému ročníku,
 - e) uplatnění názornosti při řešení úlohy,
 - f) určení teoretického základu učiva aplikovaného při řešení úlohy.
2. Didaktický rozbor se skládá zejména z těchto částí:
 - a) Posouzení možnosti využití úlohy v určité části vyučovacího procesu:
 - při motivaci nového učiva, při výkladu nového učiva, při procvičování, při opakování, při domácí práci, při prověřování vědomostí.
 - b) Posouzení možnosti využití při:
 - individuální práci se žáky, samostatné práci, skupinové práci.
 - c) Využití úlohy v rámci mezipředmětových vztahů.“

Neškodí se podívat zpět kdo v České a Slovenské republice vyučoval v roce 1993 matematické disciplíny ve studijním oboru učitelství pro 1. stupeň základní školy:

Česká republika:

Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity v Brně: Doc. RNDr. Václav Viktora, CSc., PaedDr. Irena Bělohoubková, RNDr. Jaroslav Beránek, RNDr. Růžena Blažková, RNDr. Marta Francová, CSc., RNDr. Květoslava Matoušková, CSc., RNDr. Milena Vaňurová, CSc..

Katedra matematiky Pedagogické fakulty Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích: PaedDr. Dana Tržilová, CSc., Doc. PhDr. Jiří Divíšek, CSc., PhDr. Alena Hošpesová.

Katedra matematiky Vysoké školy pedagogické v Hradci Králové: RNDr. Eva Krejčová, CSc., RNDr. Marie Kupčáková, Dr. L. Provazníková, RNDr. Liděk Silverio Dr. P. Trojanovský, Doc. PhDr. Marta Volfová, CSc.

Katedra matematiky Pedagogické fakulty Univerzity Palackého v Olomouci: Doc. PhDr. Bohumil Novák, CSc., RNDr. Jindřiška Eberová, RNDr. Petr Emanovský, PaedDr. Anna Stopenová.

Katedra matematiky Pedagogické fakulty Ostravské univerzity v Ostravě: Doc. RNDr. Alena Varmužová, CSc., RNDr. Vilma Novotná, PhDr. Bohuslav Pisklák, CSc., RNDr. Jana Zehnalová, CSc.

Katedra matematiky Pedagogické fakulty Západočeské univerzity v Plzni: PaedDr. Jaroslav Hervert, PaedDr. Jana Coufalová, CSc., PhDr. Věra Kárová, CSc., Mgr. Šárka Pěchoučková.

Katedra matematiky a didaktiky matematiky Pedagogické fakulty Univerzity Karlovy v Praze: Doc. Jaroslava Horálková, CSc., PaedDr. Marie Ausbergerová, PaedDr. Vladimír Dřízal, RNDr. Darina Jirotková, PhDr. Michaela Kaslová, RNDr. Tomáš Schütz, Doc. RNDr. Milan Trch, CSc., PaedDr. Eva Zapotilová, CSc. Spolupracovali: Doc. RNDr. Milan Hejný, CSc., Prof. RNDr. Milan Koman, CSc., Marie Tichá, CSc.

Katedra matematiky Pedagogické fakulty Univerzity J. E. Purkyně v Ústí nad Labem: Doc. PaedDr. Miroslav Bělík, CSc., PaedDr. Miroslav Bělík, Doc. RNDr. Miroslav Červinka, CSc., Prof. RNDr. Jan Melichar, CSc., PaedDr. Josef Svoboda. Spolupracoval: Prof. RNDr. Jan Kopka, CSc.

Slovenská republika:

Katedra didaktiky matematiky fakulty humanitních a přírodních věd Univerzity Mateja Bela v Banské Bystrici: PaedDr. Želmíra Sobôtková, CSc., PaedDr. Lubica Gérová, Doc. RNDr. Pavol Hanzel, CSc., RNDr. Štefan Kovačík, Doc. RNDr. Pavol Kršňák, CSc., Eva Vasil'ková.

Katedra matematiky a výpočtovej techniky pedagogické fakulty Univerzity Komenského v Bratislavě: PhDr. Oliver Židek, CSc., RNDr. Pavol Černek, CSc., RNDr. Daniela Hricišáková, CSc., RNDr. Jana Kopáčová, RNDr. Edita Partová, RNDr. Ivan Sadloň, RNDr. František Vinš.

Katedra matematiky fakulty přírodních věd Vysoké školy pedagogické v Nitre: Prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc., RNDr. Ján Beka, CSc., RNDr. Jozef Bukor, Doc. RNDr. Anton Cuninka, CSc., PhDr. Marian Gnoth, PhDr. Edita Hamadová, RNDr. Vojtech László, PhDr. Marta Lászlóvá, RNDr. Dagmar Markechová, CSc., PhDr. Mária Šúňová, CSc., PhDr. Ružena Teplíčková.

Katedra matematiky pedagogické fakulty Univerzity P. J. Šafárika v Prešově: Doc. RNDr. Jozef Fiamčík, CSc., PhDr. Marianna Borošová, RNDr. Anna Breznická, RNDr. L. Lipková, PaedDr. Ján Petrik, Mgr. A. Sedlák.

Z daného přehledu je vidět, že matematickým disciplinám ve studiu učitelství pro 1. stupeň základní školy byla věnována v roce 1993 pozornost a že i kvalifikační složení vysokoškolských učitelů bylo na slušné úrovni o čemž svědčí počet vysokoškolských profesorů, docentů i kandidátů věd. Je samozřejmé, že mnozí z vyjmenovaných si za uplynulých patnáct let zvýšili svoji kvalifikaci. Studijní obor učitelství pro 1. stupeň základní školy se rozšířil i na další univerzity (například Technická univerzita v Liberci, Katolická univerzita v Ružomberku, Trnavská univerzita v Trnavě).

Literatura

1. MELICHAR, J. *Seminář českých a slovenských kateder matematiky zaměřený na matematiku v oboru učitelství pro 1. stupeň základní školy*, Katedra matematiky Pedagogické fakulty UJEP, Ústí nad Labem, 1993, 68 str.

Kontaktní adresa

*Jan Melichar, Prof., RNDr., CSc.
Katedra matematiky Pedagogické fakulty UJEP,
Hoření 13, 400 96 Ústí nad Labem, Česká republika
E-mail: melichar@pf.ujep.cz
Telefon: 00420475282280*

INTERAKTIVNÍ VÝUKA VLASTNOSTÍ DĚLITELNOSTI NA VÍCELETÝCH GYMNÁZIÍCH A ZÁKLADNÍCH ŠKOLÁCH

Michal ROHÁČEK, Pavel TLUSTÝ

Abstrakt

Tento příspěvek popisuje vyučovací hodiny v primě a kvartě na víceletých gymnáziích nebo výuku v 6. a 9. ročníku na základních školách realizované využitím interaktivní tabule, programu Excel a prostředí Imagine Logo, případně kalkulačkou a žákovskými počítači. Obsahuje skupiny příkladů, které postupně vedou k odvození konkrétního kritéria. Využívá se zde vhodně zvolených obrázků, účelně napsaných tabulek a jejich následného vhodného upravení. Výuka je vedena pomocí interaktivní tabule a nechybí zde zmínky práce s výpočetní technikou a dostupným softwarem. Jako formy výuky jsou použity frontální a skupinová práce ve dvojicích i týmech.

INTERACTIVE TEACHING OF ATTRIBUTES OF DIVISIBILITY AT MULTI-ANNUAL GRAMMAR SCHOOLS AND PRIMARY SCHOOLS

Abstract

This contribution describes lessons in the first and fourth forms at multi-annual grammar schools or teaching in the sixth and ninth classes at primary schools which are realised with the use of the interactive board, MS Excel programme and Imagine Logo setting, optionally with the use of calculators and pupils computers. It contains groups of examples which are gradually leading to the derivation of the factual criterion. There are used suitably chosen pictures, practically written tables and subsequent applicable adjustment of them. The teaching is led with the help of the interactive board and references about the work with computer technology and available software are not absent here. As forms of teaching frontal and group work both in pairs and working groups are used.

1. Vlastnosti dělitelnosti - prima (6. ročník ZŠ)

První část příspěvku se věnuje vlastnostem dělitelnosti čísel v naší (desítkové) soustavě. Časová dotace je zde tři hodiny po 45 minutách. První blok je zaměřen na dělitelnost čísel 2, 4, 5 a 8, druhý na tzv. ciferný součet, tedy dělitelnost čísly 3 a 9 a poslední blok na dělitelnost číslem 11 a čísly, které vznikají součinem nesoudělných čísel (např. 6, 10, 12, 15, 18 atd.). Výuka probíhala na Gymnáziu Prachatice - podpora tabule SMART Board a kalkulaček a na ZŠ Prachatice Zlatá Stezka 240 - zde s podporou tabule ACTIV Board a žákovských počítačů.

1.1. Průběh 1. hodiny

Na interaktivní tabuli se postupně zobrazují tabulky, které jsou žákům také rozdány v tištěné podobě. Základní prázdná tabulka (obr. 1), tabulky pro násobky 2, 4, 5 (obr. 4), pro násobky 3 a 9 (obr. 7), rastrové tabulky 10x10 s konkrétními čísly a čtverečkované papíry na pomocnou práci. Nebo si žáci na PC otevrou soubor (sešit) z MS Excel.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150

Obr. 1

Úloha 1. (13 min.): V základních tabulkách vybarvíte postupně různými barvami všechny násobky čísel 2, 3, 4 a 5 (obr. 2 a obr. 3). *Činnost učitele (U):* Postupnou animací spolu s návrhy žáků na řešení ukazuje kroky řešení. *Činnost žáků (Ž):* Postupně ve dvojicích vybarvují tabulky.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150

Obr. 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150

Obr. 3

Úloha 2. (10 min.): Kolik je násobků čísla 2 v prvním řádku tabulky? Kolik násobků 2 je od 1 do 100? Na základní tabulce si prohlédni násobky 2 a stejnou barvou vybarvi tabulku pro násobky 2 (obr. 4a). Zkus zformulovat vlastnost dělitelnosti číslem 2. *Ž:* Žáci odpovídají na otázky, výsledky zapisují a zkoumají závislost mezi tabulkami, objevy píšou do sešitů. *U:* Otázkami se přesvědčí jestli žáci pochopili úlohu a poté

postupně s žáky přistoupí k řešení, animaci a závěrům. **Závěr:** Kritérium dělitelnosti dvojkou a rozdělení přirozených čísel na sudá a lichá.

Úloha 3. (10 min.): Na základní tabulce si prohlédni násobky 4 a stejnou barvou vybarvi tabulku pro násobky 4 (obr. 4b). Použij rastr tabulky 10x10 s čísly 1 až 100, 101 až 200, 301 až 400 apod. a opět vybarvi násobky 4 (obr. 5). Přilož tyto tabulky na sebe a výsledek popiš do sešitu. Zkus zformulovat vlastnost dělitelnosti, tentokrát číslem 4. *Ž:* Žáci vybarvují ve skupinách po čtyřech tabulky, které následně přikládají na sebe a proti světlu zjišťují shodnost šrafování (v Excelu kopírují formáty). Zkoumají závislost mezi tabulkami, objevy píší do sešitů. *U:* Postupně na tabuli ukazuje řešení a s žáky přistoupí k závěru. **Závěr:** Kritérium dělitelnosti čtyřkou.

Úloha 4. (2 min.): Zadání domácího úkolu! S kamarády a pomocí předchozí úlohy zkus objevit znak dělitelnosti čísla osm.

Úloha 5. (8 min.): Kolik je násobků čísla 5 v základní tabulce od 1 do 100? Kolik násobků 5 je od 1 do 1000? Na základní tabulce si prohlédni násobky 5 a stejnou barvou vybarvi tabulku pro násobky 5 (obr. 4c). Zkus zformulovat vlastnost dělitelnosti číslem pět. *Ž:* Žáci odpovídají na otázky, výsledky zapisují a zkoumají závislost mezi tabulkami, objevy píší do sešitů. *U:* Otázkami se přesvědčí jestli žáci pochopili úlohu a poté postupně s žáky přistoupí k řešení, animaci a závěrům. **Závěr:** Kritérium dělitelnosti 5.

1	2
3	4
5	6
7	8
9	10
11	12
13	14
15	16
17	18
19	20
21	22
23	24
25	26
27	28
29	30

Obr. 4a

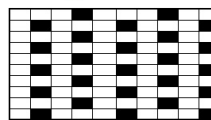
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16
17	18	19	20
21	22	23	24
25	26	27	28
101	102	103	104
105	106	107	108
109	110	111	112
113	114	115	116
117	118	119	120
121	122	123	124

Obr. 4b

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	32	33	34	35
36	37	38	39	40
41	42	43	44	45
46	47	48	49	50
51	52	53	54	55
56	57	58	59	60
61	62	63	64	65
66	67	68	69	70
71	72	73	74	75

Obr. 4c

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100



Obr. 5

Obr. 4

1.2. Průběh 2. hodiny

Úloha 6. (12 min.): Zapište rozvinutý zápis čísla 105 v desítkové soustavě. Jsou sčítance dělitelné třemi? Jak poznáme, že číslo 54 je dělitelné 3? *Ž:* Žáci řeší úlohu přes znalost dělitelnosti součtu. Protože víme, že $100 = 99 + 1$, můžeme tedy psát $105 = (99 + 1) + 5 = 99 + 6$. Oba sčítance jsou dělitelné třemi a tedy i číslo 105 je dělitelné třemi. *U:* Postupnou animací obrázků ukazuje rozklad čísla 54 (obr. 6). V každém řádku utvoříme trojice, na konci každého řádu zůstane jeden kámen navíc. Po odstranění všech trojic, zbývá tolik kamenů, kolik bylo řádků (5) a 4 kameny byly navíc. *Poté s žáky definuje objev a pojmenuje ho jako ciferný součet.* Původní číslo (54) bude dělitelné třemi, když ze zbylých kamenů vytvoříme trojice. **Závěr:** Ciferný součet.



Obr. 6

Úloha 7. (15 min.): Na základní tabulce si prohlédni násobky 3 a stejnou barvou vybarvi tabulku pro násobky 3 (obr. 7). Využij ciferný součet (poznatek z 6. úlohy)

a tabulku násobků 3 změň na novou (obr. 8), kde každé číslo nahradíš jeho ciferným součtem. Zkus zformulovat vlastnost dělitelnosti číslem 3. Ž: *Žáci zvýrazňují násobky tří a dále vytváří ciferné součty, výsledky zapisují do nové tabulky a zkoumají závislosti mezi tabulkami, objevy píšou do sešitů.* U: *Otázkou se přesvědčí jestli žáci pochopili úlohu a poté postupně s žáky přistoupí k řešení, animaci a závěru.* **Závěr:** Kritérium dělitelnosti 3.

1	2	3						
4	5	6						
7	8	9						
10	11	12						
13	14	15						
16	17	18						
19	20	21						
22	23	24						
25	26	27						
28	29	30						
31	32	33						
34	35	36						
37	38	39						
40	41	42						
43	44	45						

Obr. 7

1	2	3						
4	5	6						
7	8	9						
10	11	12						
13	14	15						
16	17	18						
19	20	21						
22	23	24						
25	26	27						
28	29	30						
31	32	33						
34	35	36						
37	38	39						
40	41	42						
43	44	45						

Obr. 8

Úloha 8. (15 min.): V tabulce po devíti sloupcích je vepsáno 135 přirozených čísel. Nahraď v dalších tabulkách každé číslo jeho ciferným součtem (obr. 9). Ž: *Pracuje na tabulkách a uvědomuje si souvislosti mezi ciferným součtem a dělitelností třemi.* U: *Připomene žákům souvislost s dělitelností 3 a učiní s nimi závěr.* **Závěr:** Kritérium dělitelnosti 9.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60	61	62	63
64	65	66	67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78	79	80	81
82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99
100	101	102	103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114	115	116	117
118	119	120	121	122	123	124	125	126
127	128	129	130	131	132	133	134	135

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	5	6	7	8	9

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Obr. 9

1.3. Průběh 3. hodiny

Úloha 9. (15 min.): Mají čísla 6, 10, 12, 15 a 18 něco společného? Určete vlastnosti dělitelnosti těchto čísel. Využijte předchozí vybarvené tabulky. U: *Připomene žákům soudělnost a nesoudělnost čísel, projekcí na tabuli shrnuje tabulky.* Ž: *Žáci provádí rozklad zadaných čísel na prvočinitele. Pomocí tabulek postupně zjišťují, že barvy buněk násobků nesoudělných dělitelů 2 a 3, 2 a 5, 2 a 9, 3 a 4, 3 a 5 jsou na stejné pozici, že se shodují.* U: *Společně s žáky odvozuje kritéria dělitelnosti zadaných čísel a činí závěr. Na základě poznání žáků, že násobky čísla 10 končí vždy 0, je řečen další závěr.* **Závěr:** Dělitelnost čísla složenými z několika nesoudělných dělitelů. Číslo dělitelné základem končí ve všech číselných soustavách cifrou 0.

Úloha 10. (25 min.): Napište pomocí kalkulačky (nebo MS Excel) do tabulky 10x10 násobky čísla 11 (obr. 10). Najděte vztah mezi jednotlivými ciframi čísel (mezi jednotlivými řády, tj. mezi jednotkami, desítkami, stovkami, tisíci, atd.) z tabulky a číslem 11. Je tam vůbec nějaký? Ž: *Žáci řeší úlohu ve skupinách po čtyřech, výsledky zapisují do sešitů.* U: *Otázkou se přesvědčí, zda žáci znají princip (skladbu) čísla, případně animací ukáže obrázky jednotlivých řádů konkrétního čísla a následný rozklad čísla. Poté společně formulují závěr.* **Závěr:** Kritérium dělitelnosti 11.

11	22	33	44	55	66	77	88	99	110										
121	132	143	154	165	176	187	198	209	220										
231	242	253	264	275	286	297	308	319	330										
341	352	363	374	385	396	407	418	429	440										
451	462	473	484	495	506	517	528	539	550										
561	572	583	594	605	616	627	638	649	660										
671	682	693	704	715	726	737	748	759	770										
781	792	803	814	825	836	847	858	869	880										
891	902	913	924	935	946	957	968	979	990										
1001	1012	1023	1034	1045	1056	1067	1078	1089	1100										

2211	2222	2233	2244	2255	2266	2277	2288	2299	2310										
2321	2332	2343	2354	2365	2376	2387	2398	2409	2420										
2431	2442	2453	2464	2475	2486	2497	2508	2519	2530										
2541	2552	2563	2574	2585	2596	2607	2618	2629	2640										
2651	2662	2673	2684	2695	2706	2717	2728	2739	2750										
2761	2772	2783	2794	2805	2816	2827	2838	2849	2860										
2871	2882	2893	2904	2915	2926	2937	2948	2959	2970										
2981	2992	3003	3014	3025	3036	3047	3058	3069	3080										
3091	3102	3113	3124	3135	3146	3157	3168	3179	3190										
3201	3212	3223	3234	3245	3256	3267	3278	3289	3300										

Obr. 10

2. Vlastnosti dělitelnosti v jiných číselných soustavách - kvarta (9. ročník ZŠ)

Druhá část příspěvku ukazuje jiné numerační soustavy a některé vlastnosti dělitelnosti v nich. Potřebný čas je zde minimálně čtyři hodiny. V první hodině jsou zde zopakovány poznatky z předcházejících ročníků (zmněno výše) s připomenutím dělitele, násobku, čísla složeného, prvočísla, soudělnosti čísel a dělitelnosti součtu, rozdílu a součinu. Toto příspěvek již neopakuje. Druhá hodina odhaluje jiné numerační soustavy a princip převodu do nich, s malým krokem do historie. Další hodiny (minimálně dvě) jsou zaměřeny na kritéria dělitelnosti v některých „jiných“ číselných soustavách a souvislosti s „naší“ desítkovou soustavou.

2.1. Numerační soustavy

Představte si, že máte na každé ruce jen jeden prst (celkem 2) nebo dva prsty (celkem 4) a ne pět jako nyní. **Úloha:** Zkuste vyjádřit číslo 11 v soustavě o základu dvě a číslo 39 v soustavě o základu čtyři. Víte jak čísla znázorňovali Egypťané, Májové či Babyloňané? *U: Na interaktivní tabuli s žáky a s podporou programu vytvořeném v prostředí Imagine Logo žákům postupně ukazuje animace (např. obr. 11). Ž: Rozkreslují si číslo 11 (39) jako předměty (kuličky) a postupně je sdružují do skupin po dvou (čtyřech). Tento postup opakují dokud nemají rozdělené všechny kuličky pomocí umístění kamenů do příslušných misek (řádků). Zevšeobecnění:* $(11)_{10} = (1011)_2$ a $(39)_{10} = (213)_4$. *U: Postupnou animací ukazuje historické zápisy čísel některých národů (obr. 12). Tato kapitola by vydala na celý příspěvek, vzhledem omezenému prostoru příspěvku půjdeme dále.*



Obr. 11



Obr. 12

2.2. Kritéria dělitelnosti v soustavách

Úloha 1. (25 min.): Pomocí rastrů či čtverečkováného papíru si vytvořte tabulky některých číselných soustav, například numerační soustavy o základu tři, čtyři a pět. Do stejně velkých rastrů napište čísla v desítkové soustavě, to pro kontrolu a lepší orientaci. *Ž: Žáci v týmech (po pěti) vytvářejí tabulky. U: Učitel odpovídá na případné dotazy a průběžně pro kontrolu promítá na tabuli připravené tabulky (obr. 13).*

Úloha 2. (15 min.): Vybarvete postupně vytvořené tabulky různými barvami všechny příslušné násobky čísel 2, 3, 4 a 5 v daných soustavách (obr. 14). *U: Postupnou animací spolu s návrhy žáků na řešení ukazuje kroky řešení. Ž: Žáci postupně v týmech vybarvují tabulky.*

1	2	3	10
11	12	13	20
21	22	23	30
31	32	33	100
101	102	103	110
111	112	113	120
121	122	123	130
131	132	133	200
201	202	203	210
211	212	213	220

1	2	3	4	10
11	12	13	14	20
21	22	23	24	30
31	32	33	34	40
41	42	43	44	100
101	102	103	104	110
111	112	113	114	120
121	122	123	124	130
131	132	133	134	140
141	142	143	144	200

1	2	10
11	12	20
21	22	100
101	102	110
111	112	120
121	122	200
201	202	210
211	212	220
221	222	1000
1001	1002	1010

1	2	3	10
11	12	13	20
21	22	23	30
31	32	33	100
101	102	103	110
111	112	113	120
121	122	123	130
131	132	133	200
201	202	203	210
211	212	213	220

1	2	3	4	10
11	12	13	14	20
21	22	23	24	30
31	32	33	34	40
41	42	43	44	100
101	102	103	104	110
111	112	113	114	120
121	122	123	124	130
131	132	133	134	140
141	142	143	144	200

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16
17	18	19	20
21	22	23	24
25	26	27	28
29	30	31	32
33	34	35	36
37	38	39	40

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	32	33	34	35
36	37	38	39	40
41	42	43	44	45
46	47	48	49	50

1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12
13	14	15
16	17	18
19	20	21
22	23	24
25	26	27
28	29	30

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16
17	18	19	20
21	22	23	24
25	26	27	28
29	30	31	32
33	34	35	36
37	38	39	40

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	32	33	34	35
36	37	38	39	40
41	42	43	44	45
46	47	48	49	50

Obr. 13

Obr.14

Úloha 3. (45 min.): Napište kritéria dělitelnosti dvěma v trojkové soustavě (10 min.), dělitelnost dvěma a třemi ve čtyřkové soustavě (15 min.) - obr. 15 a dělitelnost 2, 3 a 4 v pětkové soustavě (20 min.) - obr. 16. Rozsah příspěvku nedává možnost podrobného popisu, ale postupuje se analogicky jako u výkladu v desítkové soustavě.

1	2	3	10
11	12	13	20
21	22	23	30
31	32	33	100
101	102	103	110
111	112	113	120
121	122	123	130
131	132	133	200
201	202	203	210
211	212	213	220

1	2	3
10	11	12
13	20	21
22	23	30
31	32	33
100	101	102
103	110	111
112	113	120
121	122	123
130	131	132

1	2	3
10	2	3
10	11	12
10	11	12
10	11	12
10	11	12
10	11	12
10	11	12
10	11	12
10	11	12

1	2	3
10	2	3
10	11	12
10	11	12
10	11	12
10	11	12
10	11	12
10	11	12
10	11	12
10	11	12

1	2	3	4	10
11	12	13	14	20
21	22	23	24	30
31	32	33	34	40
41	42	43	44	100
101	102	103	104	110
111	112	113	114	120
121	122	123	124	130
131	132	133	134	140
141	142	143	144	200

1	2	3	4
10	11	12	13
14	20	21	22
23	24	30	31
32	33	34	40
41	42	43	44
100	101	102	103
104	110	111	112
113	114	120	121
122	123	124	130

1	2	3	4
10	11	12	13
14	20	21	22
23	24	30	31
32	33	34	40
41	42	43	44
100	101	102	103
104	110	111	112
113	114	120	121
122	123	124	130

Obr. 15

Obr. 16

Literatura

1. BINTEROVÁ, H., FUCHS, E., TLUSTÝ, P. *Matematika 6 Aritmetika - učebnice (pracovní sešit) pro základní školy a víceletá gymnázia*. 1.vyd. Plzeň: Nakladatelství Fraus, 2007. ISBN 978-80-7238-654-3 (ISBN 978-80-7238-655-0).
2. JELÍNEK, M. *Numerální soustavy*. 1. vyd. Praha: SPN, 1974. 14-392-74
3. ROHÁČEK, M. *Diplomová práce - Dělitelnost a číselné soustavy*. České Budějovice: JČU PF, 2006

Kontaktní adresa

Mgr. Michal Roháček
Gymnázium Prachatice
Zlatá stezka 137
Prachatice
Telefon: +420 388 402 106
E-mail: m1r@email.cz

prof. RNDr. Pavel Tlustý, CSc.
Jihočeská univerzita v Českých
Budějovicích, Pedagogická fakulta
Jeronymova 10
371 15 České Budějovice
E-mail: tlusty@pf.jcu.cz

POSTERY

GRAFICKÝ ZÁZNAM POSTUPU ŘEŠENÍ U NADPRŮMĚRNÝCH ŽÁKŮ

Michaela KASLOVÁ

Abstrakt

Poster prezentuje nový způsob stimulace nadprůměrných žáků k analýze jejich řešení matematických problémů, k zápisu postupu v grafickém kódu jako nástroje komunikace ve vynímečných situacích, způsob jak vyprovokovat nadprůměrné žáky k poskytnutí specifické pomoci ostatním.

GRAPHIC REPRESENTATION OF THE SOLUTION PROCESS BY ABOVE-AVERAGE PUPILS

Abstract

Poster presents a new way how stimulate gifted pupils to analyse their solution process, how stimulate them to use a graphical code as an instrument of communication in exceptional situations and how provoke them to discover a way to be able give the specific help to others.

1. Úvod

Nadprůměrným žákem prvního stupně v matematice chápeme takového žáka, který je schopen proniknout do prezentovaného problému a hledat jeho řešení přesto, že se s daným typem problému setkává poprvé, který u známých úloh je schopen nalézt nové či ekonomičtější řešení či postup, který je schopen alternovat jeden komunikační kód jiným v případě, že mu pro vyjádření jeho myšlenek dosud užívaný kód nevyhovuje. Takový žák je schopen některé úlohy řešit vhlédem. Tam kde uvažuje a hledá řešení, je schopen uvažovat o více možnostech, elementárně argumentovat i podat důkaz tvrzení přiměřený dané věkové skupině. Nadprůměrný žák nemusí být nutně ještě matematickým talentem.

Komunikace s nadprůměrným žákem má svá specifika (Kaslová, Vondráková, Hřebíková), mezi ně patří i to, že nadprůměrní žáci ve většině případů neradi popisují postup řešení orálním kódem (výjimku tvoří „orální typy, které naopak odmítají psát, k nim se řadí nadprůměrní dyslektici, a konečně vyhraněný typ samaritán, pro kterého je orální prezentace postupu smysluplná v tom, že v ní spatřují akt pomoci druhým).

2. Postup řešení a užití komunikační kódy

Pokud je nadprůměrný žák vhodně motivován, je schopen popsat postup řešení problému. Tito žáci byli během posledních tří let vystavováni různým situacím, ve kterých měli postup nejen popsat, ale i vysvětlit. Takové prostředí vytváří podmínky pro to, aby žák (dále jen Z) **mohl nahlížet na úlohu i z obecnějšího pohledu**. Situace

nepřímo nabízející dvě úrovně obecnosti dovolují experimentátorovi sledovat nejen **způsob uvažování, volbu kódu, ale i míru nadhledu** Z nad daným problémem. Problémy byly voleny jak čistě aritmetické, tak geometrické, případně slovní úlohy připouštějící užití více metod řešení. K popisu mohli žáci využít libovolný grafický kód nebo orální kód.

Sledované skupiny žáků (ve věku 6 a půl roku až 10 let) je možné rozdělit do tří skupin dle volby komunikačního kódu při popisu, vysvětlování: a) žáci neschopni postup popsat **ani jedním** z nabízených komunikačních kódů; v každém roce se jejich počet pohyboval mezi 2 a 3 %; b) žáci preferující popis pouze **orálním kódem**; žáků bylo mezi 10 – 12 %; c) žáci upřednostňující **grafický kód** představovali přes 80 % v každé skupině.

Toto členění je relativně nezávislé na věku, i když E zpočátku předpokládal, že u mladších dětí s menší zkušeností v užívání grafických kódů bude preference orálního kódu tak jak to odpovídá závěrům (3). Žáci skupin a) a b) byli následně vyzváni (a dle osobnostní charakteristiky motivováni) k tomu, aby použili podle svého uvážení grafický kód pro „návod“ či „vysvětlení“. Proto i v následujícím paragrafu budeme na skupinu nahlížet jako na nestejnorodou, složenou z těch, kteří užitý kód preferují, a z těch, kterým byl „vnucen“.

3. Analýza užití grafických kódů

Jak jsme předpokládali, objevily se v grafickém kódu dvě úrovně obecnosti (ukázky viz poster): 1) grafický záznam obsahoval **konkrétní data** ze zadané úlohy; 2) grafický záznam byl použitelný **pro řešení jakéhokoli problému daného typu**, někteří žáci dokonce pracovali s grafickým záznamem parametrů (v podobě rovinných geometrických útvarů, několika teček, slovních zkratk apod.). Písmena se objevovala převážně u žáků čtvrtých a pátých ročníků. Grafické znaky se od sebe lišily především tím, zda žák (ne)použil **znaky zavedené ve škole**, či zda si vytvořil **znaky sám** (šipky, vlnovky, zkratky slov), nebo dokonce kombinoval zavedené znaky s hláskovým písmem (pokyny, příkazy odposlouchaných ve škole a zapsaných slovy) jako např. „zapiš“, „opiš“, „namaluj“.

4. Závěr

Popsat graficky užitý postup v **obecnější rovině vede žáky do metahladiny**, aniž by k tomu byli cvičeni či vyzváni. Je pro nás nové, že jsou toho žáci 1. stupně schopni, že volbu grafického kódu dokonce zdůvodňují, umějí i s časovým odstupem svůj kód dekodovat – verbalizovat a vysvětlit. Vytvořené kódy mají odlišnou povahu – lze vyčlenit kódy statické (minoritní) a dynamické (převládající), které dokonce lépe vystihují žakovu myšlenku, než žákem volený orální kód, neboť tam mívá žák problém především s volbou sloves.

Popsaná aktivita má mimo jiné i **diagnostický charakter**. Při dekodování grafického kódu ve skupině žáků totiž stimuluje intenzivní diskusi o pravidlech, krocích (požitých, možných i zakázaných), podmínkách i znacích. Otvírá tedy novou oblast diskuse i komunikace v matematice. Uvedené aktivity nepovažujeme za nutné zařazovat do vyučování matematiky 1.st., ale domníváme se, že jsou nejen vhodným diagnostickým či stimulačním nástrojem, ale svojí povahou **vyhovují nadprůměrným žákům**. Charakteristika dané aktivity odpovídá i tomu, jaké nároky kladou na volbu aktivit s nadprůměrnými žáci takové kapacity jako V. Buriánek (1): „...nemá smysl jít s žákem napřed a předbíhat látku, ale jít do hloubky.“; Vondráková. (9): „... je vhodné respektovat specifika nadprůměrných..“ ,

Literatura

1. BURIÁNEK, V. Talent v matematice (rukopis přednášky) Hradec Králové 24.4. 2003
2. HŘEBÍKOVÁ, L. Nadání a nadání. Praha: UK Pedf, 2005. ISBN 80-7290-213-X
3. KASLOVÁ, M. Komunikace s nadprůměrnými žáky na 1. st. ZŠ In Dva dny s didaktikou matematiky 2006. Eds. Nad'a Stehlíková, Darina Jirotková. Praha: UK Pedf., 2006. s.45-52 ISBN 978-80-7290-6
4. KASLOVÁ, M. Úlohy vhodné pro nadprůměrné žáky In Dva dny s didaktikou matematiky 2007, Eds. Nad'a Stehlíková, Darina Sirotková. Praha: UK Pedf, 2007, s.58 – 62. ISBN 978-80-7290-345-0
5. KASLOVÁ, M. Rozdíly ve strategiích řešení u devítiletých žáků. In Ani jeden matematický talent nazmar. Ed. Jaroslav Zhouf. Hradec Králové: UK Pedf, 2007. s. 138-146. ISBN 978-7290-332-0
6. KASLOVÁ, M. Perception et le codage des données numériques chez les enfants agés de 6 ans. In Changes in society – proceedings of CIEAEM57. Ed. Maria Bartolini-Bussi. Palermo : Università di Palermo, 2005. s.303-304.
7. KASLOVÁ, M. Vývoj písemné komunikace v matematice na 1. st. ZŠ aneb cesta P k číslu a. In Ani jeden matematický talent nazmar. Ed. Jaroslav Houf. Praha: UK Pedf 2005, s.71-81. ISBN 80-7290-224-3
8. VONDRÁKOVÁ, E. (nepublikované diskuse k přednášce) STN. Praha: 17.4.2007

Projekt i jeho prezentace jsou realizovány díky grantu uděleného městskou částí Praha 1 – grantem P1 19/07 pro volnočasové aktivity na školní rok 2007/2008.

Kontaktní adresa

*PhDr. Michaela Kaslová
UK v Praze, Pedf - KMDM
Rettigové 4, 116 39 Praha 1
E-mail: michaela.kaslova@pedf.cuni.cz*

Recenze

Na recenzích příspěvků se podíleli:

Beránek Jaroslav, RNDr., CSc.
Blažková Růžena, RNDr., CSc.
Hanzel Pavol, Prof., RNDr., CSc.
Klenovčan Pavel, Doc., RNDr., CSc.
Kopecký Milan, Doc., RNDr., CSc.
Melichar Jan, Prof., RNDr., CSc.
Novák Bohumil, Doc., PhDr., CSc.
Perný Jaroslav, Doc., PaedDr.
Vaňurová Milena, RNDr. CSc.
Zdráhal Tomáš, , Doc., RNDr., CSc.
Židek Oliver, Doc., PhDr., CSc.

ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS PAEDAGOGICA, MATHEMATICA VI

MATEMATIKA 3

Hlavní uspořadatel RNDr. Martina Uhlířová
Odborný redaktor doc. PhDr. Bohumil Novák, CSc.
Odpovědná redaktorka Mgr. Jana Kreiselová
Technická úprava RNDr. Martina Uhlířová

Vydala a vytiskla Univerzita Palackého v Olomouci
Křížkovského 8, 771 47 Olomouc
www.upol.cz/vup
e-mail: vup@upol.cz

1. vydání

Olomouc 2008

ISBN 978-80-244-1963-3

Neprodejné